DEUX PARADOXES

Les paradoxes sont donnés en section 1. Les solutions sont présentées en section 2 page 3, une par page pour ne pas être tenté de les lire toutes d'un coup ! Des élémens de réponses sont donnés progressivement.

Ce document est disponible sur internet voir :

`http://utbmjb.chez-alice.fr/INSA/zetetique/paradoxes_enplus_papier.pdf`

1. Les énoncés

Rappelons le principe de la récurrence :

soit à démontrer une proposition $\mathcal{P}_n$ pour tout entier supérieur à un entier n_0. On démontre d'abord l'initialisation, c'est à dire que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie. On démontre ensuite le pas, c'est-à-dire, on démontre que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $\mathcal{P}_n$ entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$. C'est-à-dire encore : on se donne n fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ (l''hypothèse de récurrence) est vraie et on démontre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Quand ces deux étapes sont faites, on peut affirmer que pour tout entier supérieur n_0, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Paradoxe 1. Ici, on démontre que pour toute boite de crayon, non vide, tous les crayons sont de la même couleur.

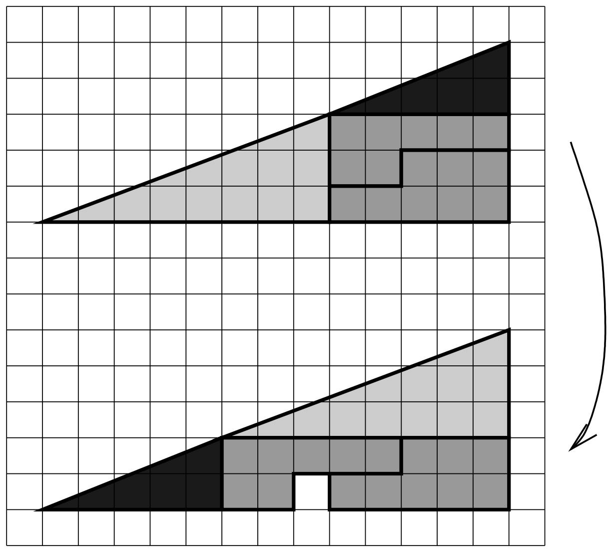
On note donc, pour $n \geq 1$, la proposition $\mathcal{P}_n$: «Tous les crayons d'une boite quelconque à n crayons sont de la même couleur.»

Ici, on initialise à $n_0 = 1$. La preuve de $\mathcal{P}_1$ est évidente : Tous les crayons d'une boite à 1 crayons sont de la même couleur.

On se donne $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on démontre $\mathcal{P}_{n+1}$. Soit donc une boite à $n+1$ crayons. On considère tout d'abord la première sous-boite formée des n premiers crayons. D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. On considère ensuite la deuxième sous-boite formée des n derniers crayons. D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. Les deux sous-boites ont un crayon en commun, qui est de la couleur des crayons de chacune des deux sous-boites ; les deux sous-boites sont donc de la même couleur et donc, pour notre boite à $n+1$ crayons, tous les crayons sont de la même couleur et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie !

Paradoxe 2.



Un simple réarangement des polygones de la figure du haut fait apparaître un carré dans la figure du bas. D'où vient-il ?

2. Les solutions

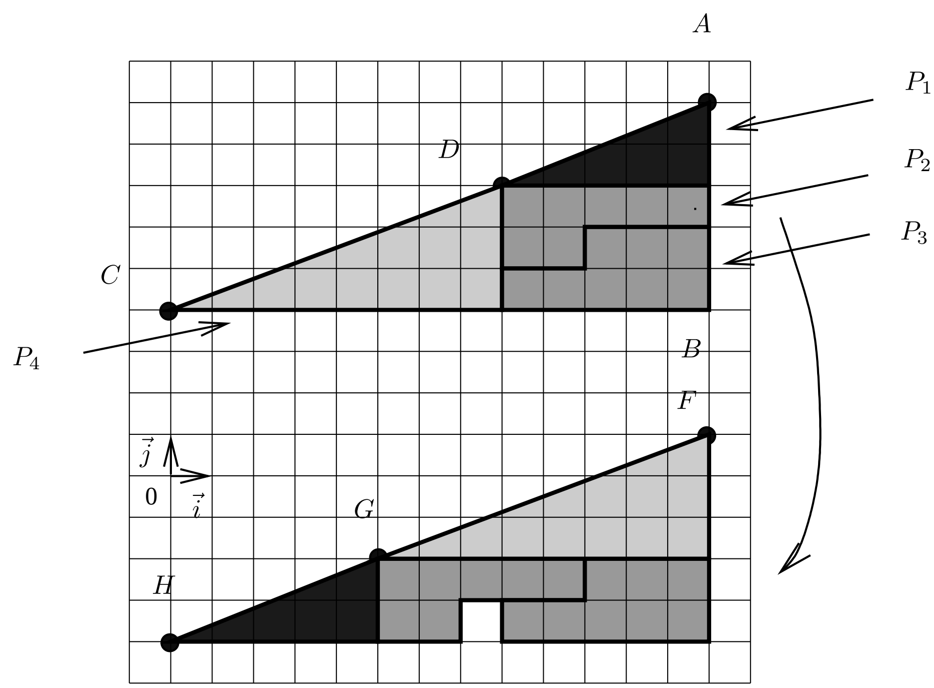
Solution du paradoxe 1

(1) Essayer de passer de $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_2$!

(2) De façon générale, pour essayer de déceler une faute dans un raisonnement faux, refaites-le pour des petites valeurs des paramètres !

Solution du paradoxe 2

(1) Quelle est la surface d'un polygone si celui-ci est un triangle ? Et si celui-ci n'est pas un triangle ?



(2)

Figure 1.

Sur la figure 1, on a noté chacun des polygones P_1, P_2, P_3 et P_4.

Détaillons le calcul des surfaces. Il est clair que leurs surfaces respectives valent (en prenant un carré pour unité)

$$S_1 = 5 \times 2/2 = 5,$$
$$S_2 = 5 + 2 = 7,$$
$$S_3 = 5 + 3 = 8,$$
$$S_4 = 3 \times 8/2 = 12$$

Normalement, on a, en regardant la figure du haut :

$$S' = 5 + 7 + 8 + 12 = 32. \tag{2.1}$$

De même, en regardant la figure du bas, on a

$$S'' = (5 + 7 + 8 + 12) + 1 = 33 \tag{2.2}$$

Les deux équations (2.1) et (2.2) sont donc problématiques ! Le paradoxe semble venir du fait que les deux surfaces doivent être égales ! Mais pourquoi le seraient-elles ?

(3) Elles le sont, si elles sont des triangles, ce qui n'est pas le cas ! Si elles étaient des triangles, on aurait pour la figure du haut

$$S = 13 \times 5/2 = \frac{65}{2} = 32,5 \tag{2.3}$$

et de même pour celle du bas, ce qui est manifestement faux !

(4) L'équation (2.3) a été établie sur le fait que ABC est un triangle, ce qui est fondé sur le fait que les points A, D et C soient alignés.

Est-ce vrai ? En prenant comme repère le carreau (un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est dessiné sur la figure) la pente de la droite (CD) vaut

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

tandis que celle de (AD) vaut

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

Ces deux valeurs sont proches mais pas égales !

On fait la même chose pour la figure du bas dont l'enveloppe n'est pas un triangle.

Ainsi, l'aire de la figure du haut vaut bien

$$S' = 5 = 5 + 7 + 8 + 12 = 32.$$

tandis que celle du bas vaut

$$S'' = (5 + 7 + 8 + 12) + 1 = 33.$$

Ces deux figures, dont l'enveloppe n'est pas un triangle, ne sont pas superposables !

(5)

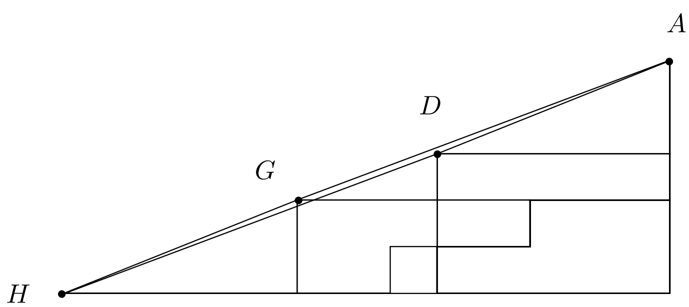


Figure 2.

Sur la figure 2, on a superposé les deux figures, et on voit bien une différence de surface.

Calculons donc la surface de la figure $HGAD$, en utilisant la figure 3 où la différence a été artificiellement augmentée.

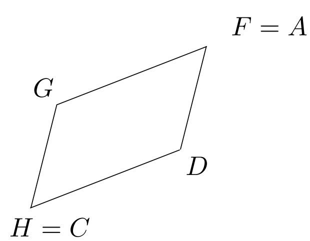


Figure 3. La surface $HDAG$

Le quadrilatère est un parallélogramme, puisque par construction, on a $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DF}$ et on a donc

$$\begin{aligned} S_{HDAG} &= \|\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{HG}\|, \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \\ &= \left|2 \times 8 - 3 \times 5\right|, \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui explique *a posteriori*, l'écart entre les deux surfaces S' et S'' définies par (2.1) et (2.2).

(6) Reste à savoir comment a été trouvé ce joli paradoxe !