POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

NOTES DE COURS DE l'UE MFIappro

Informatique 3A

MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES POUR L'INFORMATIQUE (APPRENTIS)

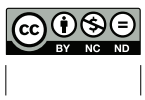
2024-2025, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 28 août 2024

Le lien original de ce document est le suivant :
http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/coursMFIappro.pdf

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/
ou en français
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr

Table des matières

Avant-propos v

partie 1. Partie Commune 1

Chapitre 1. Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) 2
1.1. Références 2
1.2. Notions de continuité, limite 2
1.3. Dérivation 3
1.4. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange 9

Chapitre 2. Intégration (théorie) 12
2.1. Références 12
2.2. Introduction informelle sur un exemple 12
2.3. «Le» principe 17
2.4. Intégrales impropres 18
2.5. Autres formules de calcul approché d'intégrales 18

Chapitre 3. Intégration (pratique) 19
3.1. Références 19
3.2. Intégration immédiate 19
3.3. Intégration par partie 19
3.4. Changement de variable 20
3.5. Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières 24
3.6. Et matlab symbolique ? 25

Chapitre 4. Systèmes linéaires et matrices 26
4.1. Rappels sur les systèmes linéaire d'ordre n 26
4.2. Programmation informatique 30
4.3. Étude d'un exemple concret 30
4.4. Un peu de théorie 35
4.5. D'autres méthodes de résolutions de systèmes linéaires 40

Chapitre 5. Diagonalisation 41

Chapitre 6. Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants 42
6.1. Introduction 42
6.2. Équations différentielles d'ordre un 42
6.3. Équations différentielles d'ordre deux 51
6.4. Approximation numérique des équations différentielles vues dans ce chapitre 54
6.5. Application en utilisation en DDRS 54
6.6. Et matlab symbolique ? 55

Chapitre 7. Erreurs 56

partie 2. Partie Spécifique 57

Chapitre 8. Ensembles 58
8.1. Définitions 58
8.2. Union, Intersection 59
8.3. Produit cartésien 60

Chapitre 9. Applications 61
9.1. Définition 61
9.2. Surjection, Injection, Bijection 61
9.3. Ensembles finis et infinis 65
9.4. Parties d'un ensemble 65
9.5. Applications définies par récurrence et récursivité 66

Chapitre 10. Un peu de logique 67
10.1. Proposition et tables de vérités 67
10.2. Implication et équivalence 68
10.3. Quantificateurs 69

Chapitre 11. Suites 70
11.1. Introduction 70
11.2. Définitions 70
11.3. Propriétés élémentaires 71
11.4. Suites de références 72
11.5. Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique 74
11.6. Résolution d'équation non linéaire 85
11.7. Applications des suites 85

Chapitre 12. Séries 87
12.1. Introduction 87
12.2. Définition et propriétés de base 87
12.3. Séries associées aux suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique 88
12.4. Séries à termes positifs 90
12.5. Séries absolument convergentes 92
12.6. Séries alternées 92
12.7. Séries de références 93

Chapitre 13. Comparaison asymptotique 97

Chapitre 14. Exponentielle 112

Chapitre 15. Logarithme 113

Chapitre 16. Problèmes ouverts (ou non !) 114
16.1. Conjecture de Syracuse ou de Collatz ou Problème $3n + 1$ 114
16.2. Tri de Crêpes 118
16.3. Problème des flux d'argent et du gîte 118

partie 3. Annexes 121

Annexe A. Quelques développements limités usuels 122

Annexe B. Quelques dérivées usuelles 123

Annexe C. Quelques primitives usuelles 124

Annexe D. Rappels sur les racines d'un polynôme de degré 2 125

Annexe E. Changement de variable informatique 127

Annexe F. Quelques calculs de primitives 130
F.1. Primitives de fractions rationnelles 130
F.2. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus 132
F.3. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus hyperboliques 135
F.4. Intégrales abéliennes 137

Annexe G. Intégrales impropres 140

Annexe H. Trigonométrie 142
H.1. Rappels et définitions de base 142
H.2. Quelques exercices 150
H.3. Autres rappels 157
H.4. Les angles sont, en fait, inutiles ! 166
H.5. Propriétés des fonctions trigonométriques 168
H.6. Les fonctions trigonométriques réciproques 168

Annexe I. L'argument d'un nombre complexe et la fonction atan_2 169
I.1. L'argument d'un nombre complexe 169
I.2. La fonction atan_2 170
I.3. Exemples 172

Annexe J. Étude théorique d'un problème de moindres carrés 174
J.1. Rappels sur la régression linéaire 174
J.2. Rappels sur la norme Euclidienne et le produit scalaire associé 175
J.3. Théorie 175

Annexe K. Diagonalisation 178
K.1. Étude d'un exemple 178
K.2. Généralisation 180
K.3. Une application : résolution d'un système différentiel 182

Annexe L. Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2 183
L.1. Équations différentielles d'ordre 1 183
L.2. Équations différentielles d'ordre 2 186

Annexe M. Approximations de π 190
M.1. Introduction 190
M.2. Méthode d'Archimède 190
M.3. Méthode de Cues 205
M.4. Et la méthode originale des isopérimètres de Descartes ! 211
M.5. Approximation quadratique par une méthode arithmético-géométrique 213
M.6. Approximations d'ordres plus élevés 215

M.7. Simulations numériques 215

Annexe N. Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle (sous la forme de deux exercices corrigés) 223
Premier énoncé 223
Premier corrigé 223
Second énoncé 226
Second corrigé 226

Annexe O. Emprunts bancaires 228
O.1. Emprunt hors assurance 228
O.2. Emprunt avec assurance et divers frais 233

Annexe P. Exponentielle 234
P.1. Introduction 234
P.2. Définition et propriétés élémentaire de l'exponentielle 234

Annexe Q. Logarithme 241
Q.1. Introduction 241
Q.2. Définition et propriétés élémentaire du Logarithme 241
Q.3. Fonction exponentielle et logarithme en base a 244
Q.4. Fonction puissance 245
Q.5. Établissement des formules des propositions 11.26 et 11.27 249
Q.6. Applications concrètes du logarithme 251

Annexe R. Approximations polynômiales de $\ln(1+x)$ et de e^x 252
R.1. Introduction 252
R.2. Les principes de l'analyse numérique (ou méthodes numériques ou calcul scientifique) 252
R.3. Approximation de e^x 254
R.4. Approximation de $\ln(1+x)$ 261
R.5. Simulations numériques sur une majoration de $e\ln^2 2$ 275

Annexe S. Applications concrètes du logarithme 278
S.1. Introduction et principes théoriques 278
S.2. Règle à calcul 281
S.3. Diagrammes log-log 281

Annexe T. Deux équations fonctionnelles (redéfinition de l'exponentielle et du logarithme 285
T.1. Introduction 285

Bibliographie 286

Avant-propos

Ce polycopié constitue les notes de cours de Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique (Apprentis) du département Informatique 3A (2024-2025, Automne).

La première partie (à partie de la page 2) de ce cours est commune aux étudiants en formation initiale et aux apprentis. Elle correspond à l'UE officiellement dénommée "Fonds Maths" (Fondements Mathématiques). Elle comportera six séances de CM et quatre séances de TD.

La seconde partie (à partie de la page 58) de ce cours est dédiée aux étudiants apprentis. Elle correspond à l'UE officiellement dénommée "Maths pour l'Info (appro)" (Mathématiques pour l'Informatiques pour Apprentis). Elle comportera onze séances de CM/TD et éventuellement trois séances de TP.

Ce polycopié de cours est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  - 'Poste de travail',
  - puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  - puis '`jerome.bastien`',
  - puis '`Polytech`',
  - puis '`Informatique 3A`'.
  - enfin sur '`MFIappro`'.

Des notes en petits caractères comme suit pourront être omises en première lecture :

Attention, passage difficile ! ♢

Première partie

Partie Commune

Chapitre 1

Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

1.1. Références

(1) On pourra consulter par exemple le site de Frédéric Holweck relatif à l'UV MT12 de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM) :

`http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/MT12.html`

Pour les développements limités, on pourra consulter notamment le liens suivant :

`http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/dl.pdf`

On jettera aussi un œil à

`http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf`

(2) On pourra aussi consulter par exemple le site d'Arthur Lannuzel relatif à l'UV MT11 de l'UTBM :

`http://mathutbmal.free.fr/MT11.html`

On pourra consulter notamment les liens suivants :

— Dérivée de fonctions : `http://mathutbmal.free.fr/MT11/cours/deriveesdefonctions.pdf`
— Développements limités : `http://mathutbmal.free.fr/MT11/cours/Dvlptlimites.pdf`
— Dévloppements limités à connaître : `http://mathutbmal.free.fr/MT11/cours/formulairedvptlimites.PDF`

(3) Pour la dérivation, on pourra consulter le lien de Wikipédia, très instructif, mais à un niveau plus élevé `https://fr.wikipedia.org/wiki/Analyse_des_infiniment_petits_pour_l'intelligence_des_lignes_courb`

1.2. Notions de continuité, limite

Rappelons qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement définie sur tout $\mathbb{R}$. Elle n'est définie que sur son ensemble de définition D_f. Dans ce cas, $f : \left| \begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est de nouveau une application. Par exemple $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction est continue en un point x_0 de son ensemble (à l'intérieur) de définition I si on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1.1}$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Si on traduit (1.2), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera continue en un point x_0 ssi "l'écart entre $f(x_0)$ et $f(x)$ est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que x est suffisamment proche de x_0".

La plupart des fonctions « usuelles » sont continues là où elles sont définies... sauf où où elles ne le sont pas.

Exemple 1.1. Montrer que la fonction « signe » donnée par

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est discontinue en zéro.

Exemple 1.2. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = E(x)$ (partie entière) est discontinue en tous les entiers naturels.

On dit que f, non définie en x_0 (c'est-à-dire que x_0 n'appartient pas à I), admet l pour limite si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Exemple 1.3. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$ admet 0 comme limite en 0.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en un point x_0 de son ensemble (à l'intérieur) de définition I si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A \tag{1.5}$$

On dit par exemple que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.6}$$

Exemple 1.4. Montrer que pour la fonction f donnée par $f(x) = 1/x$, on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

1.3. Dérivation

On pourra consulter, par exemple, [Vél03] ou [Bas18, chapitre 4].

1.3.1. Notions de dérivées

On se donne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un point a (dans son ensemble de définition).

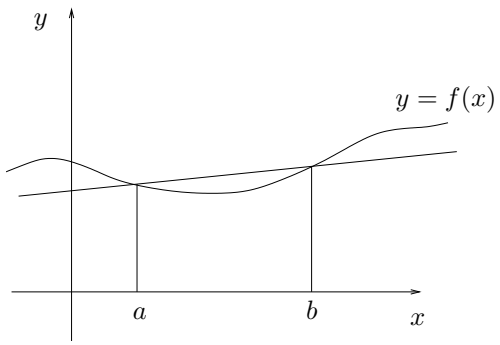


Figure 1.1. La droite passant par $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.

On rappelle que si $b \neq a$, la droite (cf. figure 1.1) passant par les points de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$ a pour équation :

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.7}$$

Plus conventionnellement,

$$Y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(X - a) + f(a). \tag{1.8}$$

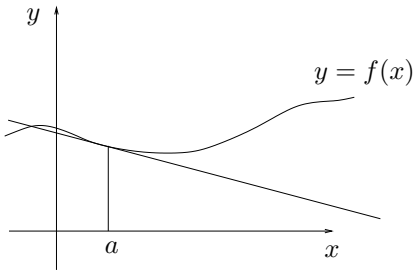


FIGURE 1.2. La tangente à la courbe au point $\big(a, f(a)\big)$

Si on fait tendre b vers a, cette droite «tend» vers la tangente à la courbe au point $\big(a, f(a)\big)$ (cf. figure 1.2). Ainsi, la pente de la droite d'équation (1.8) (égale à $(f(b) - f(a))/(b - a)$) tend vers un nombre, égal à la pente de la tangente à courbe. Ce nombre est noté $f'(a)$ et est appelé nombre dérivé [1] de f en a. Autrement dit :

$$f'(a) = \lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.9}$$

Cette limite n'existe pas nécessairement. Si elle existe, on dit que f est dérivable en a. On supposera que les fonctions étudiées sont toujours dérivables [2].

(1.9) est équivalent à : si f est dérivable en a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad \left(|a - b| \leq \eta \Longrightarrow \left| f'(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| \leq \varepsilon \right) \tag{1.10}$$

Si on traduit (1.10), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dérivable en un point a et aura pour nombre dérivé en ce point $f'(a)$ ssi "l'écart entre $f'(a)$ et le taux d'accroissement de f entre a et b (défini comme $(f(a) - f(b))/(a - b)$) est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que b est suffisamment proche de a".

Par passage à la limite dans (1.8), on constate que l'équation de la tangente à la courbe en $\big(a, f(a)\big)$ s'écrit

$$Y = f'(a)(X - a) + f(a). \tag{1.11}$$

De façon similaire à (1.7), on pourra retenir (1.11) sous la forme

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = f'(a). \tag{1.12}$$

On écrira parfois (1.9) sous la forme suivante (équivalente) : au voisinage de a,

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + (b - a)\varepsilon(b), \tag{1.13a}$$

$$\text{avec } \lim_{b \to a} \varepsilon(b) = 0. \tag{1.13b}$$

ou alors (en posant $h = b - a$) au voisinage de a,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \tag{1.14a}$$

$$\text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{1.14b}$$

Ces deux écritures constituent en fait, un développement limité [3]. Voir la section 1.4 page 9.

1. La fonction dérivée est la fonction, qui, à a associe $f'(a)$, si la dérivée existe.

2. Le but de cette UV n'est pas d'étudier les propriétés de «régularité» des fonctions ou plus généralement, les hypothèses théoriques nécessaires, mais de savoir utiliser les notions de mathématiques indispensables au métier d'ingénieur. Ainsi, on supposera toujours acquises ces différentes hypothèses théoriques

3. Les équations (1.14a) et (1.14b) peuvent s'écrire aussi, au «premier ordre» près en h et au voisinage de a :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a), \tag{1.15}$$

Remarque 1.5.

(1) La notion de dérivée est liée à celle de vitesse instantanée en mécanique.

(2) La tangente peut aussi être mise en évidence en faisant un zoom sur une courbe.

1.3.2. Règles de dérivations

Donnons les règles suivantes : pour toute fonction f et g[4] pour tout réels α et β, pour tout réel x,

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \tag{1.19a}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{1.19b}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}, \tag{1.19c}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}, \text{ si } g(x) \neq 0, \tag{1.19d}$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'\big(g(x)\big), \tag{1.19e}$$

$$\big(f^\alpha\big)'(x) = \alpha\big(f^{\alpha-1}\big)(x)f'(x), \tag{1.19f}$$

$$\Big(f^{(-1)}\Big)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{(-1)}(x)\right)}, \text{ où } f^{(-1)} \text{ est l'application réciproque de } f. \tag{1.19g}$$

L'équation (1.19f) est souvent écrite pour α entier. Pour $\alpha = 1/2$, elle permet de retrouver par exemple que

$$(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Pour $\alpha = -1$, elle permettrait de retrouver $(1/f(x))'$.

On donne les dérivées usuelles en annexe B.

Voir les exercices de TD correspondant.

---

qu'on notera aussi sous la forme

$$\frac{df}{dx}(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1.16}$$

Autrement dit, on assimile la courbe à la tangente. Cette notion se généralisera grâce aux formules de Taylor et de développements limités d'ordre plus élevés, où l'on assimilera f non plus à polynôme de degré un mais de degré n pour $n \in \mathbb{N}$. Cependant attention aux erreurs que peut produire l'écriture de (1.15), notamment si $f'(a)$ est nul. On peut être tenter d'écrire abusivement, par exemple, en zéro :

$$\cos(h) \approx \cos(0) + h\cos'(0) = 1, \tag{1.17}$$

et d'en déduire, pour h non nul ,

$$\frac{1 - \cos(h)}{h^2} \approx \frac{0}{h^2} \approx 0,$$

ce qui pourrait impliquer

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = 0,$$

alors qu'on peut montrer que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}. \tag{1.18}$$

Si on écrit correctement les développements limités, on n'a plus ce paradoxe. En effet, on réécrit (1.17) sous la forme

$$\forall h, \quad \cos(h) = \cos(0) + h\cos'(0) + \frac{h^2}{2}\cos''(0) + h^2\varepsilon(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2} - \varepsilon(h),$$

dont on déduit (1.18).

4. supposées être dérivable en x

1.3.3. Rappels sur la monotonie d'une fonction

L'une des applications directes de la dérivation est l'étude la monotonie (croissance ou décroissance) d'une fonction, étudiée en section 1.3.4 page suivante. Rappelons-en quelques éléments.

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_monotone`

On rappelle :

DÉFINITION 1.6 (Monotonie au sens large). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I. On dit que f est :
- croissante (ou : croissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$;
- décroissante (ou : décroissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$;
- monotone (ou : monotone au sens large) sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

DÉFINITION 1.7 (Monotonie au sens strict). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I. On dit que f est :
- strictement croissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$;
- strictement décroissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$;
- strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

EXEMPLE 1.8.

(1) La fonction x^n, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si a, b, a' et b' sont des réels tels que $0 \leq a < b$ et $0 \leq a' < b'$, alors $aa' < bb'$. En effet, on a $b - a > 0$ d'où $(b - a)a' > 0$ d'où

$$ba' > aa'. \tag{1.20}$$

De même $b' - a' > 0$, d'où $b(b' - a') > 0$ d'où

$$bb' > ba' \tag{1.21}$$

D'après (1.20) et (1.21), on a

$$bb' > ba' > aa'.$$

On en déduit par récurrence sur l'entier n que pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls tels que $x < y$, on a $x^n < y^n$.

(2) Lorsque n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (cf. l'exemple précédent) et impaire.

PROPOSITION 1.9 (Limite d'une fonction monotone). *Soit f définie et croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I du type $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f vérifie alors l'une des deux assertions suivantes :*

(1) Soit, elle n'est pas majorée (resp. minorée) et elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers b.

(2) Soit elle majorée (resp. minorée) et elle tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers b.

On a évidemment le même résultat en $-\infty$.

PROPOSITION 1.10 (bijection). *Une application strictement monotone et continue d'un intervalle $I = (a, b)$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ induit une bijection strictement monotone de I vers $[f(a), f(b)]$[5] dont la bijection réciproque est strictement monotone de $[f(a), f(b)]$ vers I, strictement croissante (resp. décroissante) si f l'est.*

5. si a n'est pas fini, $f(a)$ désigne la limite de $f(x)$ quand x tend vers a, qui existe dans $[-\infty, \infty]$; idem en b.

1.3.4. Application de la dérivation à l'étude de la monotonie d'une fonction

THÉORÈME 1.11 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). *Soient I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Alors,*

(1) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

(2) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et de plus l'ensemble des points où la dérivée f' s'annule est d'intérieur vide (c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle non réduit à un singleton).

(3) f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

En pratique, notons que la seconde assertion du point 2 est vraie en particulier si les zéros [6] de f' sont en nombre fini. En retiendra donc plutôt la forme simplifiée suivante :

PROPOSITION 1.12 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). *Soient I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Alors, si $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et si les zéros de f' sont en nombre fini alors$f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

EXEMPLE 1.13. Montrer à la main que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et non monotone sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1.14. Montrer à la main que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$ et reprendre les résultats de l'exemple 1.13.

EXEMPLE 1.15. Reprendre les exemples 1.8 page précédente à l'aide de la dérivée.

EXEMPLE 1.16. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en zéro.

EXEMPLE 1.17. La fonction $x \mapsto x^3$ est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$? Quel est la valeur de sa dérivée en zéro ? Commenter !

Voir les exercices de TD correspondant.
De cela, on déduira les célèbres tableaux de variations.

EXEMPLE 1.18. Traitons cet exemple sous forme d'exercice corrigé.
Énoncé

(1) Sur l'intervalle $[1, 3]$, étudier la fonction polynômiale donnée par

$$p(x) = -x^3 + 4\,x^2 - 4\,x + 1. \tag{1.22}$$

(2) La tracer succinctement

(3) En déduire ses extrémas.

(4) Quels sont les extrémas de la fonction $|p|$ sur $[1, 3]$?

Corrigé

(1) La dérivée p' de p vaut

$$p'(x) = -3\,x^2 + 8\,x - 4, \tag{1.23}$$

dont les racines sont $2/3$ et 2. On en déduit le tableau de variation de la fonction p. Voir le tableau 1.1 page suivante. Ainsi, p est strictement croissante sur $[1, 2]$ et p est strictement décroissante sur $[2, 3]$.

(2)

Voir la figure 1.3.

6. c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $f'(x) = 0$. On parle aussi de racine de f'.

x	1		2		3
signe de $p'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de p	0	↗	1	↘	-2

TABLE 1.1. Tableau de variation de p

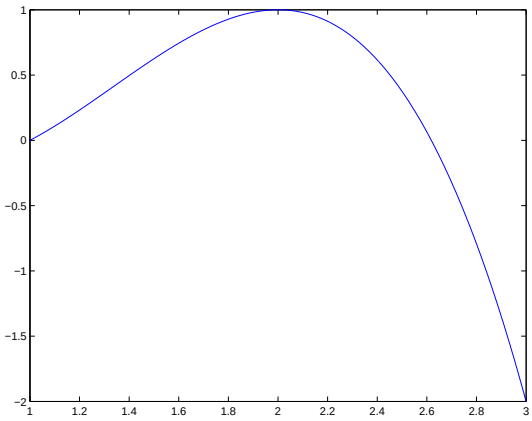


FIGURE 1.3. Le tracé de la fonction p.

(3) Les extrémas de p sont les valeurs par p des valeurs appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Leurs images par p sont $\{0, 1, -2\}$. Ainsi, les extrémas de p sont -2, pour le minimum et 1, pour le maximum.

(4) On vérifie que 0 et 2 sont le minimum et le maximum de $|p|$.

REMARQUE 1.19.

- Si on utilise la fonction `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/fichiers_matlab/maxabsfun.m`, disponible sur le web, on obtient directement le résultat suivant : le maximum de $|p|$ est égal à 2. Voir la figure 1.4.
- En fait, cet exercice a été posé « à l'envers » ! On se donne x_0, x_1 et x_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à 1, 2 et 3) et y_0, y_1 et y_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à 0, 1 et -2). On cherche une fonction polynomiale p telle que

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ p'(x_1) &= y_1, \\ p(x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

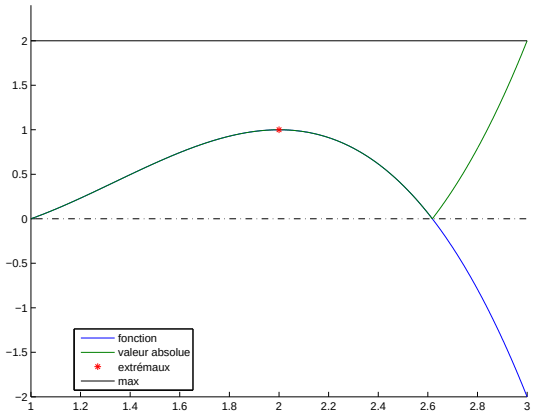


FIGURE 1.4. Le résultat de la fonction `maxabsfun.m`.

La théorie de l'interpolation nous dit que ce polynôme existe et est unique et permet de le constuire. Voir [BM03] et [DB21].

1.4. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange

1.4.1. Développements limités

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_limité`

Un développement limité généralise à l'ordre n quelconque, l'approximation à l'ordre 1 de la fonction par sa tangente. En effet, on peut écrire l'équation (1.13) sous la forme équivalente :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \tag{1.24}$$

où ε est une fonction tendant vers zéro quand x tend vers a.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe a_0, a_1, ..., a_n et une fonction ε tendant vers zéro au voisinage de zéro vérifiant

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i + (x-a)^n\varepsilon(x) \tag{1.25}$$

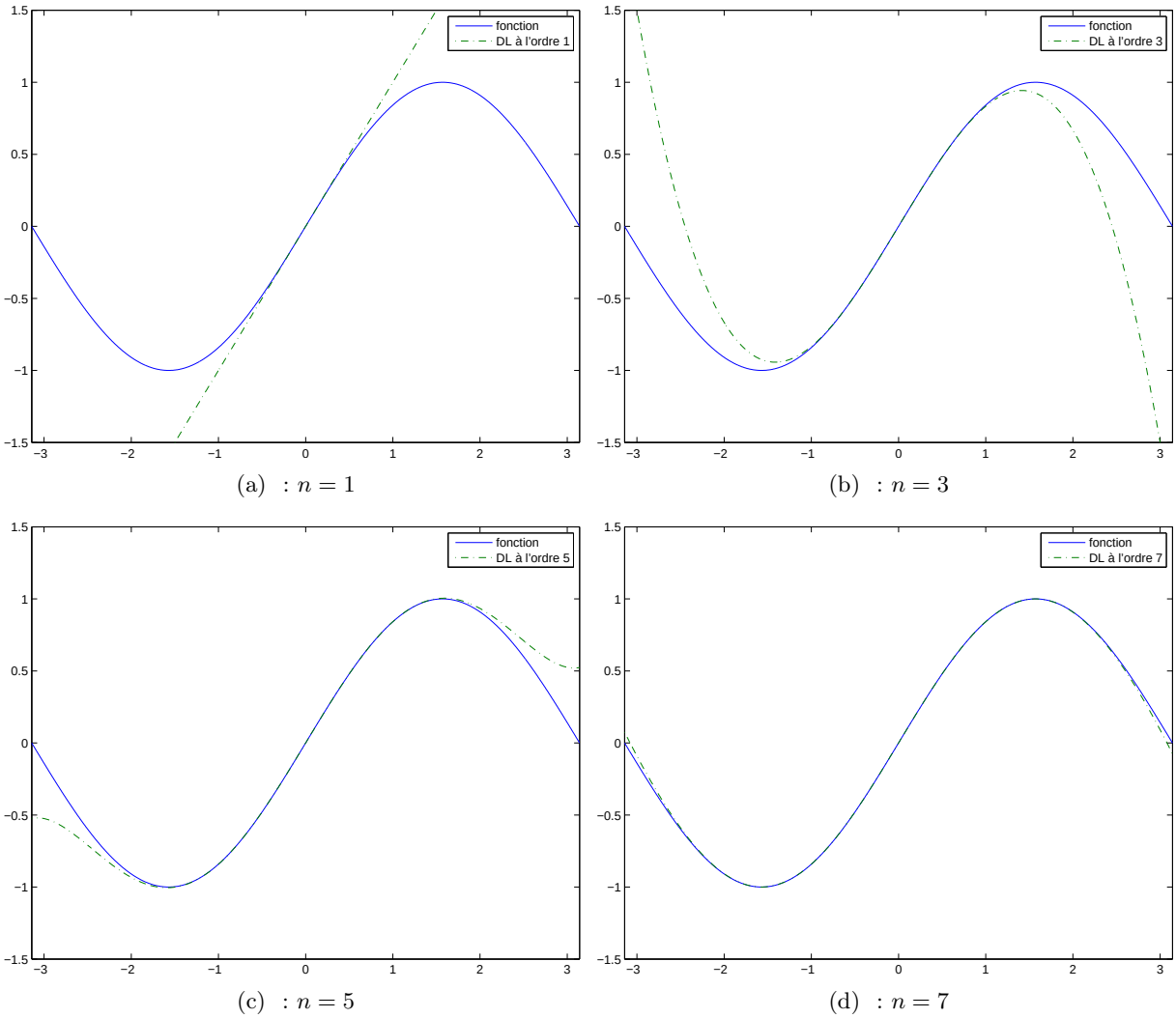
ce que l'on écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i + o\left((x-a)^n\right). \tag{1.26}$$

Si f est dérivable n fois en a, on montre que l'on a alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i + o\left((x-a)^n\right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

On donne les développements limités usuels en annexe A.



(a) : $n = 1$ (b) : $n = 3$

(c) : $n = 5$ (d) : $n = 7$

FIGURE 1.5. Tracé de la fonction sinus et de son approximation par différents développements limites d'ordre n.

Voir le fichier joint (sous matlab) `developpement_limite`, grâce auquel on été obtenus les résultats suivant :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x + o\left(x^1\right), \\
\sin(x) &= -1/6\, x^3 + x + o\left(x^3\right), \\
\sin(x) &= \frac{1}{120}\, x^5 - 1/6\, x^3 + x + o\left(x^5\right), \\
\sin(x) &= -\frac{1}{5040}\, x^7 + \frac{1}{120}\, x^5 - 1/6\, x^3 + x + o\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

Voir aussi la figure 1.5.

Les développements limités sont locaux : ils fournissent des renseignements sur le comportement d'une fonction au voisinage d'un point a. Il existe aussi d'autres formules (celles de Taylor-Lagrange) où l'on remplace la fonction inconnue ε par un terme qui peut être majoré par une dérivée de f. Voir section 1.4.2.

Les développements limités peuvent s'ajouter, se multiplier, se diviser, se composer, comme des polynômes usuels.

Voir les exercices de TD correspondant.

1.4.2. Formules de Taylor-Lagrange

En face du développement limité (1.27) (aussi appelé formule de Taylor-Young), on trouve aussi les formules de Taylor-Lagrange qui s'écrivent :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \tag{1.28}$$

où ξ est un réel (inconnu) strictement compris entre a et x.

Remarque 1.20. Sur l'utilisation de la formule (1.28) pour approcher numériquement $\cos x$ et $\sin x$, on pourra consulter les exercices de TD 1.35 et 1.36.

Remarque 1.21. Sur l'utilisation de la formule (1.28) pour approcher numériquement e^x et $\ln(1+x)$, on pourra consulter l'annexe R page 252 et notamment les sections R.3.1 et R.4.1.

.

Chapitre 2

Intégration (théorie)

2.1. Références

(1) On pourra consulter par exemple le site de Frédéric Holweck relatif à l'UV MT12 de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM) :
`http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/MT12.html`

(2) On pourra aussi consulter par exemple le site d'Arthur Lannuzel relatif à l'UV MT11 de l'UTBM :
`http://mathutbmal.free.fr/MT11.html`

On pourra consulter notamment les liens suivants :

— Intégrale de Riemann : `http://mathutbmal.free.fr/MT12/cours/IntegraledeRiemann.pdf`
— Primitives classiques : `http://mathutbmal.free.fr/MT12/cours/primitivesclassiques.pdf`
— Méthodes classiques d'intégration : `http://mathutbmal.free.fr/MT12/cours/Methodes_classiques_dintegration.pdf`

(3) Pour une définition plus théorique (qui présente en même temps les intégrales multiples), on pourra aussi consulter [Bas11a, chapitres 5 et 6].

(4) On pourra aussi consulter l'URL de wikipédia suivante :
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration_(mathématiques)`

2.2. Introduction informelle sur un exemple

Traitons plusieurs exemples issus de [Bas18, chapitre 4].

Si on considère un solide évoluant sur un axe rectiligne, dont l'abscisse est notée $x(t)$, nous passons du déplacement à la vitesse et de la vitesse à l'accélération par dérivation, ce qui graphiquement, correspond à prendre la tangente à la courbe.

Rappelons que si d est la distance parcourue, pendant un temps t, la vitesse moyenne est définie par

$$v = \frac{d}{t}. \tag{2.1}$$

Cette formule définit aussi la vitesse instantanée à tout instant, si celle-ci est constante.

Si $x(t)$ est connue, la vitesse moyenne v sur l'intervalle de temps $[t, t+T]$, la vitesse moyenne sur cet intervalle de temps est définie par

$$v = \frac{x(t+T) + x(t)}{T}, \tag{2.2}$$

parfois notée sous la forme

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

La vitesse instantanée à l'instant t est

$$v(t) = x'(t), \tag{2.4}$$

noté aussi sous une forme analogue à (2.3)

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{2.5}$$

et en confondant parfois abusivement Δx et dx, et Δt et dt, quand dt est « petit ».

On pourra consulter de nouveau [Bas18, chapitre 4], mais aussi le cours de MNB où la notion de dérivation numérique sera abordée !

Nous allons maintenant faire l'opération inverse, passer de la vitesse au déplacement.

EXEMPLE 2.1. On suppose la vitesse constante et connue, égale à $v_0 = 100$ km/h.

(1) À partir de la vitesse, comment calculer le déplacement au cours du temps ?

(2) Montrer que sur la courbe (temps,vitesse), cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et t.

EXEMPLE 2.2. On suppose maintenant la vitesse connue et définie par la formule

$$v(t) = 200t.$$

(1) Montrer que si le déplacement est donné par

$$x(t) = 100t^2. \tag{2.6}$$

alors $x'(t) = v(t)$.

(2) En utilisant la formule du déplacement donnée par (2.6), montrer sur la courbe (temps,vitesse), le déplacement cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et t.

EXEMPLE 2.3. Supposons maintenant la courbe v connue et quelconque. On cherche à déterminer x.

Plus précisément, on se donne $a < b$; on se suppose connue $x(a)$, la fonction v sur l'intervalle $[a, b]$ et on cherche à calculer $x(b)$.

Pour cela, on se donne un entier N et on découpe l'intervalle $[a, b]$ en N intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} &t_0 = a, \\ &h = \frac{b-a}{N}, \\ &\forall i \in \{0, ..., N\}, \quad t_i = hi + a. \end{aligned}$$

On a donc $t_N = b$.

Voir figure 2.1.

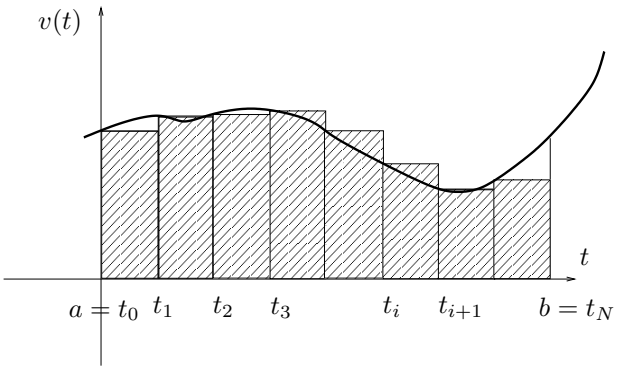


FIGURE 2.1. L'aire sous la courbe avec des rectangles

Soit i dans $\{0, ..., N-1\}$ fixé. Nous allons «tricher» et supposer que, dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la vitesse v varie peu, de façon à remplacer la vitesse *a priori* quelconque par la vitesse constante $v(t_i)$. Cette approximation

sera d'autant meilleure que h est petit (c'est-à-dire N grand). On a donc, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$v(t) \approx v(t_i)$$

La vitesse est constante et d'après (2.1), on a

$$v(t) \approx v(t_i) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_i)}{t - t_i}$$

et donc

$$x(t) \approx (t - t_i)v(t_i) + x(t_i)$$

En particulier

$$x(t_{i+1}) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) + x(t_i) = hv(t_i) + x(t_i).$$

soit encore

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) = A_i, \tag{2.7}$$

où

$$A_i = hv(t_i). \tag{2.8}$$

Notons que $A_i = hv(t_i)$ représente l'aire sous la courbe $v(t)$ où $v(t) \approx v(t_i)$ entre t_i et t_{i+1}. C'est l'aire du rectangle de largeur h et de hauteur $v(t_i)$. Voir figure 2.1 page précédente.

On en déduit successivement

$$\begin{aligned}
&x(t_1) \approx hv(t_1) + x(t_0) = hv(t_0) + x(a),\\
&x(t_2) \approx hv(t_2) + x(t_1) = h(v(t_0) + v(t_1)) + x(a),\\
&x(t_3) \approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2)) + x(a),\\
&\vdots\\
&x(t_{i+1}) \approx hv(t_i) + x(t_i) = h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + ... + v(t_i)) + x(a),\\
&\vdots\\
&x(t_N) \approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + ... + v(t_i) + ... + v(t_{N-1})) + x(a).
\end{aligned}$$

Autrement dit

$$x(b) - x(a) \approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + ... + v(t_i) + ... + v(t_{N-1})) = h\sum_{i=0}^{N-1} v(t_i). \tag{2.9}$$

Cette formule fait apparaître «l'aire des rectangles», hachurée sur la figure 2.1 page précédente. Quand le nombre N tend vers l'infini, cette aire tend vers l'aire qui est sous la courbe v entre a et b. Cette aire est notée $\int_a^b v(s)ds$. On a donc montré que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds. \tag{2.10}$$

L'équation (2.9) pourrait constituer une définition de l'intégrale, en passant à la limite. Elle constitue aussi une approximation de cette aire.

Remarque 2.4 (Méthodes des rectangles à pas variable). Dans la méthode des rectangles, on n'est pas obligé de prendre un pas h constant. On peut découper l'intervalle en sous-intervalle de taille variable et remplacer (2.7) et (2.8) par

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \tag{2.11}$$

où

$$A_i = (t_{i+1} - t_i)v(t_i). \tag{2.12}$$

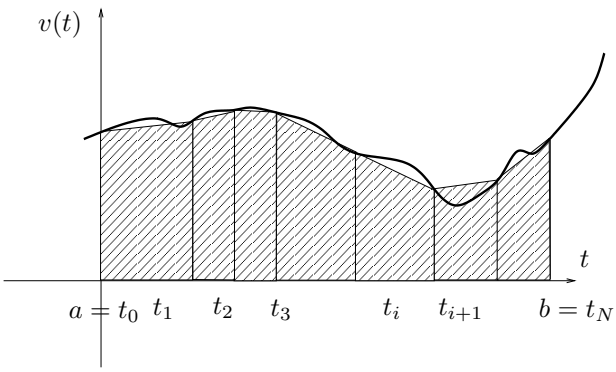


FIGURE 2.2. L'aire sous la courbe avec des trapèzes

REMARQUE 2.5 (Méthodes des trapèzes à pas variable).

On peut aussi utiliser la méthode des trapèzes à pas variable, plus précise que celle des rectangles : (Voir figure 2.2) on remplace, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $v(t)$ par une vitesse v linéaire. De sorte que l'aire approchée est remplacée par l'aire des trapèzes. On a donc

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \tag{2.13}$$

où

$$A_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \tag{2.14}$$

On a enfin

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \tag{2.15}$$

Souvent, cette formule est utilisée pour h constant.

EXEMPLE 2.6.

On se donne $a = 0$, $b = 0.05$. On suppose connue la vitesse v sur $[a, b]$. On donne $x(0) = 0$.

indice	temps	vitesses
0	0.00000	0.00000
1	0.00556	4.80498
2	0.01111	13.98215
3	0.01667	23.39208
4	0.02222	32.11241
5	0.02778	39.96245
6	0.03333	46.96467
7	0.03889	53.19819
8	0.04444	58.75250

TABLE 2.1. Quelques vitesses

On pose $N = 9$, h est défini par $h = (b - a)/N$. Conformément à ce que l'on a vu ci-dessus, on donne les valeurs de $v(t_i)$ pour $i \in \{0, ..., 8\}$; voir le tableau 2.1.

(1) En appliquant la formule (2.9), on cherche à proposer une approximation de $x(b)$.

On a $h = (b-a)/N = 0.005555555555556$. On utilise la formule (2.9) page 14 et le tableau 2.1 page précédente. On obtient

$$x(0.05) \approx 1.517607876$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.1745875566$$

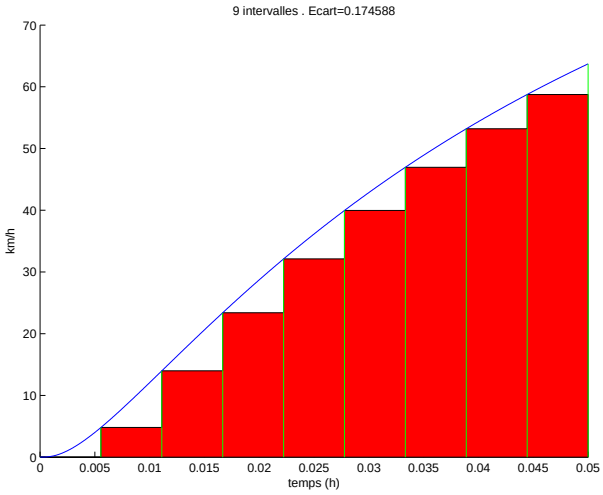


FIGURE 2.3. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

Voir la figure 2.3.

(2) Si on compare avec la valeur exacte $x(0.05) = 1.692195433$, on obtient un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.1745875566$$

(3) Pour $N = 49$, on calculerait de même

$$x(0.05) \approx 1.659764392$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.03243104007$$

Voir la figure 4(a) page suivante.

(4) Pour $N = 99$, on calculerait de même

$$x(0.05) \approx 1.676124522$$

soit un écart

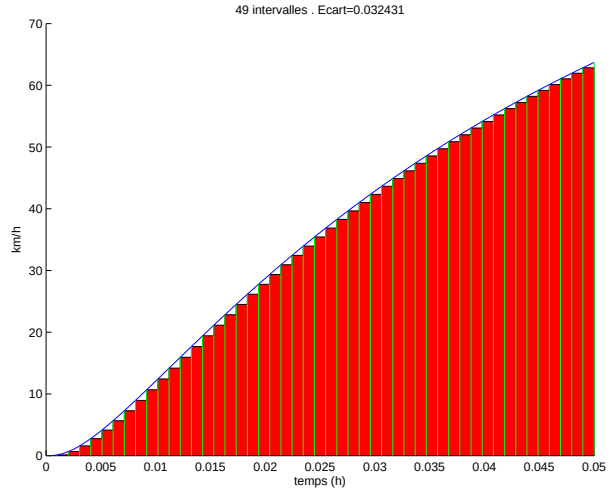
$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.01607091064$$

Voir la figure 4(b) page suivante. Les écarts diminuent bien quand N augmente !

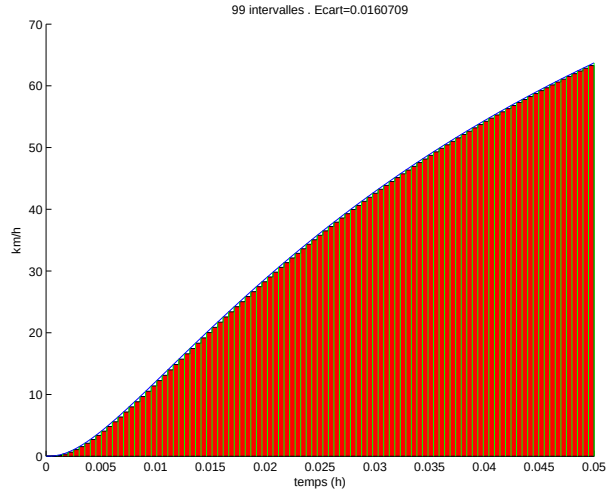
(5)

Dans le tableau 2.2 page 18, où on a pris des plus grandes valeurs de N, on constate que l'écart diminue bien.

Les exemples 2.1, 2.2, 2.3 et 2.6 nous ont donc montré une approche empirique de l'intégrale d'une fonction, comme aire sous la courbe, approchée par l'une des méthodes (2.9), (2.10) ou (2.15).



(a)



(b)

FIGURE 2.4. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

2.3. «Le» principe

Finalement, retenons que si f est une fonction continue, on cherche une primitive F de f, définie à une constante additive près, c'est-à-dire, vérifiant

$$F'(t) = f(t), \tag{2.16}$$

ce que l'on note

$$F(t) = \int f(t)dt. \tag{2.17}$$

Naturellement, on peut étendre cette définition dans le cas où f n'est plus continue et lui donner un sens théorique en terme de limite.

Calculer l'intégrale de f entre a et b revient donc à calculer

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \tag{2.18}$$

Nombre d'intervalles	valeur approchée	erreur
9	1.5176078759	0.1745875566
99	1.6761245219	0.0160709106
999	1.6906012074	0.0015942251
9999	1.6920361377	0.0001592949
99999	1.6921795043	0.0000159282
999999	1.6921938397	0.0000015928

TABLE 2.2. Déplacements approchés et erreurs

qui correspond à l'aire sous la courbe représentative de f, comprise entre les deux abcsisses a et b.

2.4. Intégrales impropres

On aura parfois à intégrer sur des intervalles finis ou infinis, des fonctions f qui ne sont pas continues partout. Par exemple, on posera

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt,$$

quantité qui existe. Ou alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{b\to +\infty}\int_1^b \frac{1}{t^2}dt,$$

quantité qui existe.

Ce calculs sortent en principe du cadre du cours où l'on intégrera que sur des intervalles finis où f est continue.

Le cadre de l'intégrale de Lebesgue, différent du contexte usuel en premier cycle de l'intégrale de Riemann, permet de s'affranchir de ce distinguo et de ne présenter qu'une seule théorie de l'intégration.

Pour plus de détail, voir l'annexe G.

2.5. Autres formules de calcul approché d'intégrales

Les formules des exemples 2.1, 2.2, 2.3 et 2.6 constituent en fait une approximation de $\int_a^b f(t)dt$ dans les cas (les plus nombreux en fait !) où la primitive de f n'est pas connue [1]. On consultera par exemple [DB21, chapitre "Intégration", Propositions 2.17, 2.21, 2.22 et 2.23] ou [BM03, chapitre 3].

1. Souvent, pour l'ingénieur, f n'est connue qu'expérimentalement, par le biai de mesures et il n'est donc pas question de déterminer sa primitive de façon explicite !

Chapitre 3

Intégration (pratique)

3.1. Références

On se pourra consulter `http://www.les-mathematiques.net/pages/deug.php`, référence issue de [CN03].

3.2. Intégration immédiate

On utilise les formules (2.16) et (2.17), ainsi que les primitives usuelles données en annexe C.
Voir les exercices de TD correspondant.

3.3. Intégration par partie

Remarquant que

$$(uv)' = u'v + uv',$$

on a donc

$$u'v = (uv)' - uv',$$

et donc en prenant la primitive, on obtient la relation classique

$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt. \tag{3.1}$$

Si on intègre entre a et b, on obtient

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt. \tag{3.2}$$

Exemple 3.1. Pour calculer

$$F(t) = \int (\cos(t))tdt,$$

on pose

$$\begin{aligned} &u'(t) = \cos t, \quad u(t) = \sin t, \\ &v(t) = t, \quad v'(t) = 1, \end{aligned}$$

et donc, d'après (3.1),

$$F(t) = \int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt = t\sin t - \int \sin t dt = t\sin t + \cos t.$$

Exemple 3.2. Pour calculer cette fois-ci :

$$I = \int_0^\pi (\cos(t))tdt,$$

On se sert du calcul précédent et on écrit

$$I = [t\sin t + \cos t]_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) = -2.$$

On peut aussi poser

$$u'(t) = \cos t, \quad u(t) = \sin t,$$
$$v(t) = t, \quad v'(t) = 1,$$

et donc, d'après (3.2),

$$F(t) = \int_0^\pi u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u(t)v'(t)dt = [t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt = 0 + [\cos(t)]_0^\pi = -2.$$

Voir les exercices de TD correspondant.

3.4. Changement de variable

On pourra consulter [Bas11a, sections 5.5 et 6.2].

3.4.1. Premier sens : "ancienne" en fonction de la "nouvelle"

On cherche à déterminer l'intégrale

$$I = \int_a^b f(u)du.$$

On pose

$$u = \phi(x), \tag{3.3}$$

où ϕ est une fonction connue. L'« ancienne variable » est u et la « nouvelle » est x. L'« ancienne variable » u disparaît au profit de la « nouvelle » variable x. Ainsi, l'ancienne variable u est connue explicitement en fonction de la nouvelle x. On procède donc aux trois substitutions suivantes :

- On remplace $f(u)$ par $f(\phi(x))$;
- Quand $u = a$ (resp. $u = b$), la nouvelle variable x vaut $\phi^{-1}(a)$ (resp. $\phi^{-1}(b)$). On remplace donc a et b par $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$; en pratique, on n'utilise pas nécessairement ϕ^{-1} : on cherche les bornes α et β de la nouvelle intégrale qui vérifient $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$.
- On a aussi
$$\frac{du}{dx} = \phi'(x)$$
et donc
$$du = \phi'(x)dx.$$
On remplace donc du par $\phi'(x)dx$.

Donc on écrit

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{3.4}$$

Remarque 3.3. Autrement dit, on remplace l'intégrale $\int_a^b f(u)du$ par l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)dx$, avec

$$\alpha = \phi^{-1}(a),$$
$$\beta = \phi^{-1}(b),$$
$$F(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

♢

Exemple 3.4.
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2}du.$$

On pose $u = R\cos x$, c'est-à-dire, on choisit $\phi(x) = R\cos x$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x.

- On remplace donc $\sqrt{R^2 - u^2}$ par
$$\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} = R\sqrt{\sin^2 x} = R\left|\sin x\right|.$$
- On a
$$\frac{du}{dx} = -R\sin x,$$
et donc
$$du = -R\sin x dx.$$
On remplace donc du par $= -R\sin x dx$.
- Quand $u = 0$, on a $x = \pi/2$ et quand $u = R$, on a $x = 0$; on remplace [1] donc 0 et R par $\pi/2$ et 0.

On a donc
$$\int_0^R \sqrt{R^2 - u^2}du = \int_{\pi/2}^0 R\left|\sin x\right|(-R\sin x)\,dx = R^2\int_0^{\pi/2}\left|\sin x\right|\sin x dx = R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx.$$
On linéarise (voir annexe H, proposition H.30 page 166) le sinus sous la forme :
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$$
Après calculs, il vient
$$I_R = \frac{\pi}{4}R^2. \tag{3.5}$$

Dans cet exemple, on a remplacé l'ancienne variable u par la nouvelle variable x, grâce à une relation explicite (u est remplacé par $R\cos x$). On peut procéder dans l'autre sens comme le montre ce qui suit. Voir l'exemple 3.7.

3.4.2. Second sens : "nouvelle" en fonction de l'"ancienne"

On cherche à déterminer l'intégrale
$$I = \int_a^b f(u)du.$$
On pose
$$x = \phi(u),$$
où ϕ est une fonction connue. L'« ancienne variable » est u et la « nouvelle » est x. L'« ancienne variable » u disparaît au profit de la « nouvelle » variable x. Ainsi, la nouvelle variable x est connue explicitement en fonction de l'ancienne u. On a donc
$$u = \phi^{-1}(x), \tag{3.6}$$
On procède donc aux trois substitutions suivantes :

- On remplace $f(u)$ par $f(\phi^{-1}(x))$;
- Quand $u = a$ (resp. $u = b$), la nouvelle variable x vaut $\phi(a)$ (resp. $\phi(b)$). On remplace donc a et b par $\phi(a)$ et $\phi(b)$;
- On a aussi
$$\frac{dx}{du} = \phi'(u)$$
et donc [2]
$$du = \frac{dx}{\phi'(u)},$$

1. attention au sens.
2. avec un abus de notation.

et donc, grâce à (3.6)

$$du = \frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{3.7}$$

On remplace donc du par $\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}$.

On peut aussi de façon équivalente, utiliser la formule (1.19g) et écrire d'après (3.6)

$$\frac{du}{dx} = (\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}, \tag{3.8}$$

dont on déduit (3.7). ♢

Donc on écrit

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{3.9}$$

Remarque 3.5. Autrement dit, on remplace l'intégrale $\int_a^b f(u)du$ par l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)dx$, avec

$$\alpha = \phi(a),$$
$$\beta = \phi(b),$$
$$F(x) = \frac{f(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))}.$$

♢

Remarque 3.6. En fait, ce second changement de variable n'est pas toujours indiqué. Il se déduit du changement de variable 3.4.1 page 20 en remplaçant ϕ par ϕ^{-1}. On laisse au lecteur, vif, le soin de vérifier que, dans ce cas, (3.3) donne $u = \phi^{-1}(x)$ et donc (3.6). On a aussi (voir (1.19g))

$$(\phi^{-1})' = \frac{1}{\phi' o \phi^{-1}},$$

et donc, en remplaçant ϕ par ϕ^{-1}, (3.4) devient

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{1}{(\phi' o \phi^{-1})(x)}dx,$$

ce qui est bien : (3.9)

♢

Exemple 3.7.

Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du.$$

On pose $x = \cos u$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x. La relation est cette fois-ci implicite : u est donné implicitement en fonction de x. On a donc $x = \phi(u)$ où $\phi = \cos$ (et donc $\phi^{-1} = \arccos$, mais qui n'est utile !).

- On a
$$\frac{dx}{du} = -\sin u$$
et donc
$$dx = -\sin u du.$$
On remplace donc $\sin u du$ par $-dx$.
- On remplace aussi $\cos^2 u$ par x^2.
- Enfin, si $u = 0$, on a $x = \cos 0 = 1$ et si $u = \pi/2$, on a $x = \cos(\pi/2) = 0$.

Bref, on a donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du = \int_1^0 x^2(-dx) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du = \frac{1}{3}. \tag{3.10}$$

3.4.3. Changement de variable pour une primitive

Les techniques de changement de variables vues précédement sont aussi valables pour un calcul de primitives ; on procèdera comme dans celui d'une intégrale, sans les bornes et on explicitera en fin de calcul, la nouvelle variable en fonction de l'ancienne. Il faudra bien vérifier les intervalles de définition des fonctions dépendant de l'ancienne ou de la nouvelle variable.

Exemple 3.8.
Reprenons l'exemple 3.4 :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, la primitive

$$I_R = \int \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose $u = R\cos x$, c'est-à-dire, on choisit $\phi(x) = R\cos x$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x.

- On remplace donc $\sqrt{R^2 - u^2}$ par

$$\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} = R\sqrt{\sin^2 x} = R\left|\sin x\right|.$$

- On a

$$\frac{du}{dx} = -R\sin x,$$

et donc

$$du = -R\sin x dx.$$

On remplace donc du par $= -R\sin x dx$.

On a donc

$$\int \sqrt{R^2 - u^2} du = -\int R\left|\sin x\right|(-R\sin x)\, dx = -R^2 \int \left|\sin x\right| \sin x dx = -R^2 \int \sin^2 x dx,$$

ce calcul étant valable sur un intervalle où $\sin x$ est positif. On linéarise (voir annexe H) le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{R^2 - u^2} du &= R^2 \int \frac{1}{2}\big(-1 + \cos(2x)\big) dx, \\
&= \frac{R^2}{2} \int -1 + \cos(2x) dx, \\
&= \frac{R^2}{2}\left(-x + \frac{\sin(2x)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Il nous faut revenir à la variable u. Pour cela, on écrit ensuite

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{R^2 - u^2} du &= \frac{R^2}{2}\left(-x + \cos(x)\sin(x)\right), \\
&= -\frac{R^2}{2}x + \frac{1}{2}R\cos(x)R\sin(x),
\end{aligned}$$

et puisqu'on se plaçe sur un intervalle où sin est positif :

$$\begin{aligned}
&= -\frac{R^2}{2}x + \frac{1}{2}R\cos(x)R\left|\sin(x)\right|, \\
&= -\frac{R^2}{2}x + \frac{1}{2}R\cos(x)R\sqrt{\sin^2(x)}, \\
&= -\frac{R^2}{2}x + \frac{1}{2}R\cos(x)R\sqrt{1 - \cos^2(x)}, \\
&= -\frac{R^2}{2}x + \frac{1}{2}R\cos(x)\sqrt{R^2 - R^2\cos^2(x)}, \\
&= -\frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{2}u\sqrt{R^2 - u^2},
\end{aligned}$$

si on est sur un intervalle où u est dans $[-R, R]$. On a donc

$$\int \sqrt{R^2 - u^2} du = -\frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{2}u\sqrt{R^2 - u^2}.$$

On a donc, puisque u décrit un intervalle où les hypothèses faites sont valables :

$$\begin{aligned}
I_R &= \int_0^R \sqrt{R^2-u^2}du, \\
&= \left[-\frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{u}{R}\right)+\frac{1}{2}u\sqrt{R^2-u^2}\right]_{u=0}^{u=R}, \\
&= \left(-\frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{R}{R}\right)+\frac{1}{2}u\sqrt{R^2-R^2}\right)-\left(-\frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{0}{R}\right)+\frac{1}{2}0\times\sqrt{R^2-0^2}\right), \\
&= \left(-\frac{R^2}{2}\times 0+\frac{1}{2}u\times 0\right)+\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}, \\
&= \frac{R^2\pi^2}{4},
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat (3.5).

Il est donc bien plus simple de calculer l'intégrale que de passer par la primitive !

Exemple 3.9.

Reprenons l'exemple 3.7.

Calculons la primitive

$$I = \int \cos^2 u \sin u du.$$

On pose $x = \cos u$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x. La relation est cette fois-ci implicite : u est donné implicitement en fonction de x. On a donc $x = \phi^{-1}(u)$ où $\phi^{-1} = \cos$ (et donc $\phi = \arccos$, mais qui n'est utile !).

- On a

$$\frac{dx}{du} = -\sin u$$

et donc

$$dx = -\sin u du.$$

On remplace donc $\sin u du$ par $-dx$.

- On remplace aussi $\cos^2 u$ par x^2.

Bref, on a donc

$$\int \cos^2 u \sin u du = \int x^2(-dx) = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3}$$

et donc en remplaçant de nouveau x par $\cos u$, ici sans aucun problème d'intervalle :

$$\int \cos^2 u \sin u du = -\frac{1}{3}\cos^3(u).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du &= -\frac{1}{3}\left[\cos^3(u)\right]_{u=0}^{u=\pi/2}, \\
&= -\frac{1}{3}(0-1) &= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

et on retrouve bien (3.10).

Exemple 3.10. On pourra consulter l'exercice 3.7 de TD.

♢

Voir les exercices de TD correspondant.

3.4.4. Simulations

Voir l'annexe E. ♢

3.5. Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières

Section non traitée en cours, autrement que par des exemples. On consultera l'annexe F.

Voir les exercices de TD correspondant.

3.6. Et matlab symbolique ?

Comme beaucoup de langage, matlab sait calculer des intégrales.

EXEMPLE 3.11. On peut traiter l'exemple 3.7 de la façon suivante : Par exemple, si on tape

```
syms u ;
f=(cos(u))^2*sin(u);
a=0;
b=sym(pi)/2;
I=int(f,u,a,b);
Is=simple(I);
```

on obtient

$$I = 1/3.$$

EXEMPLE 3.12. De même, on peut traiter l'exemple 3.4 de la façon suivante : Par exemple, si on tape

```
syms u R;
f1=sqrt(R^2-u^2);
a1=0;
b1=R;
I=int(f1,u,0,R);
Is=simple(I);
```

on obtient

$$I = 1/4\, R^2\pi.$$

Pour les fans de LaTeX(dont je suis !), on peut taper aussi

```
Ila=latex(Is);
```

ce qui nous donne directement le code LaTeX du résultat

```
1/4\,{R}^{2}\pi .
```

EXEMPLE 3.13. On peut traiter des intégrales impropres. Par exemple, si on tape

```
syms u ;
f=exp(-u^2)
a=0;
b=inf;
I=int(f,u,a,b);
Is=simple(I);
```

on obtient

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = 1/2\,\sqrt{\pi}.$$

Naturellement, matlab a été programmé par des humains et il ne sera calculer que des intégrables exprimables, ce que vous êtes censés aussi savoir [3] faire à la main !

Voir aussi section 1.12.3 du TP 1.

3. en théorie, car, en pratique, le calcul symbolique sera bien utile !

Chapitre 4

Systèmes linéaires et matrices

4.1. Rappels sur les systèmes linéaire d'ordre n

4.1.1. Cas $n = 1$

C'est le plus simple que vous connaissez ! On se donne deux réels a et b et on cherche $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax = b. \tag{4.1}$$

Vous savez que ce ce système admet une unique solution

$$x = b/a, \tag{4.2}$$

si et seulement si a est non nul. Sinon, on a soit aucune solution (si a est nul et b non nul) ou un ensemble infini de solutions qui est $\mathbb{R}$ tout entier (quand a et b sont nuls).

La suite est une généralisation de cela avec notamment le distinguo entre le cas où la solution est unique et le cas où elle ne l'est pas (avec un ensemble de solutions vide ou infini). Les calculs sont plus complexes mais l'esprit est le même.

Remarque 4.1. . Rappelons pourquoi la division par zéro est interdite. L'équation (4.2) est, par définition [1], équivalente à (4.1). Si $a \neq 0$, x est unique. Si ce calcul était valable pour $a = 0$, on aurait donc $0 = a \times x = b$. Si $b \neq 0$, cela est impossible. Si $b = 0$, tout réel x convient et $0/0$ n'est donc pas défini.

$\diamond$

4.1.2. Cas $n = 2$

On se donne $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ On cherche maintenant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} ax + by = \lambda, \\ cx + dy = \mu. \end{cases} \tag{4.3}$$

Après calculs, que l'on fait par combinaison linéaire, on montre que si le déterminant du système, défini pat

$$\Delta = ad - bc \tag{4.4}$$

est non nul, le système (4.3) admet un unique solution définie par

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta}\,(d\lambda - b\mu), \\ \\ y = \dfrac{1}{\Delta}\,(-c\lambda + a\mu). \end{cases} \tag{4.5}$$

Au contraire, si Δ est nul, on a soit aucune solution, soit un ensemble infini de solutions, selon les valeurs du second membre.

Exemple 4.2. On pourra montrer les formules (4.4) et (4.5) en exercice.

1. C'est même ainsi que l'on définit le corps de fraction à partir des entiers relatifs a et b (voir [RDO93, section 3.4.2.]).

Exemple 4.3. Résoudre

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \{(1, 1)\}.$$

Exemple 4.4. Résoudre

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 4. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \emptyset,$$

puisque ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Exemple 4.5. Résoudre

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 2. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + 2y = 1\right\},$$

puisque ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

soit encore à

$$x + 2y = 1.$$

Exemple 4.6. On étudie

$$\begin{cases} x + 2y = x', \\ 3x + 4y = y'. \end{cases} \tag{4.6}$$

On cherche à calculer x et y en fonction de x' et y'. Après calculs (par combinaisons linéaires de lignes), on constate que (4.6) est équivalent à

$$\begin{cases} x = -2x' + y', \\ y = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'. \end{cases} \tag{4.7}$$

4.1.3. Cas $n = 3$

On introduit la méthode du pivot de Gauss sur un exemple.

Exemple 4.7. On étudie le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19, \\ 5x - 2y + z = 4, \\ 3x + 4y + 2z = 17. \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss : on considère un pivot, ligne par ligne, élément non nul, et grâce à lui, on fait «disparaître» par combinaison de lignes, les coefficients qui sont «sous» lui. Il est préférable de noter,

à chaque fois les opérations que l'on fait sur les lignes. Avec cette méthode, on a successivement (en notant en gras le pivot considéré) :

$$\begin{cases} \mathbf{1}x & +3y & +4z & = 19 & \\ 5x & -2y & +z & = 4 & (\mathbf{1}L_2 - 5L_1 \to L_2) \\ 3x & +4y & +2z & = 17 & (\mathbf{1}L_3 - 3L_1 \to L_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x & +3y & +4z & = 19 & \\ 0 & -17y & -19z & = -91 & (-L_2 \to L_2) \\ 0 & -5y & -10z & = -40 & (-L_3/5 \to L_3) \end{cases}$$

puis, après simplification,

$$\begin{cases} x & +3y & +4z & = 19 \\ & 17y & +19z & = 91 \\ & y & +2z & = 8 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x & +3y & +4z & = 19 & \\ & \mathbf{17}y & +19z & = 91 & \\ & y & +2z & = 8 & (-L_2 + \mathbf{17}L_3 \to L_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x & +3y & +4z & = 19 \\ & 17y & +19z & = 91 \\ & & 15z & = 45 \end{cases}$$

Le système triangulaire obtenu se résout ensuite à l'envers. On a successivement

$$z = 3, \text{ puis } y = 2, \text{ puis } x = 1.$$

On peut vérifier *a posteriori* que ces trois valeurs vérifient bien le système initial.

PROPOSITION 4.8. *Lors de la méthode du pivot de Gauss, à chaque ligne éventuellement multipliée par un nombre non nul, on peut ajouter une autre ligne ce que l'on notera sous la forme*

$$L_i \leftarrow \alpha_i L_i + \beta_j L_j, \tag{4.8}$$

où α_i est non nul, j et différent de i et β_j est quelconque. On pourra aussi éventuellement intervertir deux lignes (à condition de permuter les éléments correspondants du second membre) ou deux colonnes (à condition de permuter les x_i correspondant).

EXEMPLE 4.9. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 3y + 5z = 3. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est infini.

EXEMPLE 4.10. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est vide.

4.1.4. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$

On introduit la notion de matrice, qui ici, permet juste [2] de réécire sous une forme condensée les différents systèmes étudiés.

On se donne n^2 nombres de $\mathbb{R}$, notés $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq n}}$ et n nombres de $\mathbb{R}$, noté $(b_j)_{1\leq j\leq n}$. Le système linéaire de n équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.9}$$

soit encore

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \tag{4.10}$$

ce qui sera noté sous la forme matricielle

$$AX = B, \tag{4.11}$$

où est le tableau (matrice carrée) suivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

et B et X sont les vecteurs colonnes (ou matrice à une colonne) suivants :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

On note aussi

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq n}} \tag{4.14}$$

et

$$B = (b_j)_{1\leq j\leq n} \tag{4.15}$$

Ici, on multiplie les deux matrices A et b selon une loi bien précise. Traditionnellement, i est appelé indice de ligne et j ceux de colonne.

Plutôt que de noter les opérations du pivot de Gauss comme dans l'exemple 4.7, on se contente de noter les différents systèmes linéaires obtenus par transformations successives par la suite des matrices A et B obtenues à chaque itération, en respectant les règles de la proposition 4.8 page précédente. On peut même être plus synthétique et considérer une matrice $\widetilde{A}$ augmentée de la colonne du second membre.

2. Bien entendu, l'utilisation des matrices a une portée mathématique beaucoup plus vaste, tant en analyse qu'en algèbre !

EXEMPLE 4.11. Reprenons l'exemple 4.7 et les matrices A et B associées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

La matrice $\widetilde{A}$ est égale à

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Réécrire les différentes étapes de l'exemple 4.7 en utilisant la matrice $\widetilde{A}$.

4.2. Programmation informatique

On pourra consulter la fonction `resoud_system.m`, disponible sur le site habituel, qui permet de résoudre les systèmes linéaires en discriminant les cas où il y a une solution unique, ou aucune solution ou un ensemble infini de solution.

EXEMPLE 4.12. Si on reprend l'exemple 4.7, on obtient l'unique solution

$$x = 1,$$
$$y = 2,$$
$$z = 3.$$

EXEMPLE 4.13. Si on reprend l'exemple 4.9, on obtient un ensemble infini de solution.

EXEMPLE 4.14. Si on reprend l'exemple 4.10, on obtient aucune solution.

4.3. Étude d'un exemple concret

4.3.1. Présentation du problème

On considère un groupe de $n \in \mathbb{N}^*$ étudiants (numérotés pour i allant de 1 à n) subissant une interrogation comportant $p \in \mathbb{N}^*$ exercices (numérotés pour j allant de 1 à p).

Chaque exercice $j \in \{1, ..., p\}$ est noté sur $\beta_j \in \mathbb{R}_+^*$ (appelés coefficients de correction, librement choisis) et est ramené à $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ (appelés coefficient réels) et qui désigne la note maximale obtenue pour l'exercice j. Cela permet au correcteur d'accorder à chaque exercice une note qu'il a définie lui même tout en ramenant à l'exercice sur β_j, sans avoir à manipuler des quarts ou des huitième de points et à calculer un barème de telle sorte que la somme des points soit exactement égale à 20. La somme

$$T = \sum_{j=1}^{q} \alpha_i, \tag{4.18}$$

peut valoir 20 (sauf si les notes sont particulièrement basses ou hautes ...). Pour chaque exercice $j \in \{1, ..., p\}$, chaque éléve $i \in \{1, ..., n\}$ reçoit une note (brute), notée $n_{ij} \in [0, \beta_i]$. Le correcteur accorde donc, à chaque étudiant $i \in \{1, ..., n\}$ la note N_i définie par

$$N_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{\beta_j} n_{ij} \tag{4.19}$$

La note réelle maximale est donc T, définie par (4.18).

Le correcteur a peur de se tromper [3] et décide, plutôt que d'utiliser la formule (4.19) pour chaque éléve, de se servir d'un tableur [4] où il crée un tableau à n lignes et p colonnes. Chaque ligne numéro $i \in \{1, ..., n\}$ comporte les p notes brutes $(m_{ij})_{1 \leq j \leq p}$ obtenues par l'étudiant j pour chacun des p exercices. Dans une colonne supplémentaire (la première), il programme la formule (4.19) ce qui lui donnera chacune des notes N_i obtenue par l'étudiant i. Le correcteur note aussi dans la première ligne du tableau, les coefficients les coefficients de correction (β_j) puis sur la deuxième ligne, les coefficients réels (α_j). Donc, dans le tableau, à partir de la troisième ligne, le tableau contient ligne par ligne, d'abord la note N_i de l'étudiant i puis ses notes partielles m_{ij}, à l'exercice j.

Le but de cet exemple est de vous faire retrouver les coefficients α_j non donnés et de vérifier d'éventuelles erreurs de saisies, jamais impossibles.

i	N_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}
1	5.20	2.00	2.00	0.00
2	12.83	1.50	5.00	2.50
3	12.17	1.50	5.00	2.00
4	13.33	4.00	5.00	1.00
5	15.50	3.50	5.00	3.00
6	16.00	4.00	5.00	3.00
7	16.00	4.00	5.00	3.00
8	9.20	4.00	2.00	1.50
9	18.67	4.00	5.00	5.00
10	17.33	4.00	5.00	4.00
11	13.33	0.00	5.00	4.00
12	3.00	3.00	0.00	0.00
13	3.20	0.00	2.00	0.00
14	1.33	0.00	0.00	1.00
15	6.80	2.00	3.00	0.00
16	4.20	1.00	2.00	0.00

TABLE 4.1. le tableau informatique des notes

Voir sur le tableau 4.1 un exemple de donnés, dont on a enlevé les coefficients α_i !

Nous avons deux options :

(1) Si les coefficients β_j sont entiers, on peut faire disparaître les fractions de la formule (4.19) en considérant δ le ppcm [5] des entiers β_j, puis en écrivant pour chaque j, $\delta = \beta_j q_j$ où q_j est un entier. On a donc

$$N_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{\beta_j q_j} n_{ij} q_j = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j q_j n_{ij},$$

et donc

$$\delta N_i = \sum_{j=1}^{p} (n_{ij} q_j) \alpha_j, \tag{4.20}$$

3. et surtout n'a pas envie d'utiliser cette formule de façon manuelle !
4. dynamique, le tableur permet aussi de modifier les coefficients en un clic !
5. plus petit commun multiple

où $n_{ij}q_j$ et δN_i sont connus et les inconnues sont α_j. Nous obtenons donc un système sous la forme (4.9) (mais rectangulaire, sur-déterminé) où on a les données connues

$$a_{ij} = n_{ij}q_j, \quad b_i = \delta N_i \tag{4.21}$$

et les inconnues

$$x_i = \alpha_j. \tag{4.22}$$

(2) Sinon, si les coefficients β_j ne sont entiers, on écrit (4.19) sous la forme

$$N_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{n_{ij}}{\beta_j}\alpha_j. \tag{4.23}$$

Là encore, n_{ij}/β_j, N_i sont connus et les inconnues sont α_j. Nous obtenons donc un système sous la forme (4.9) (mais rectangulaire, sur-déterminé) où on a les données connues

$$a_{ij} = \frac{n_{ij}}{\beta_j}, \quad b_i = N_i \tag{4.24}$$

et les inconnues

$$x_i = \alpha_j. \tag{4.25}$$

Donc, dans les cas, on a système du type

$$AX = b, \tag{4.26}$$

à n lignes et p colonnes.

La fonction `saisienote.m` ainsi que le fichier de données (avec les notes) `exammiAMFIA14.txt` sont disponibles sur internet (dans le zip `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/saisienote.zip`.

Si on tape, une fois les fichiers téléchargés

```
[A,b]=saisienote('exammiAMFIA14',1)
```

on obtient directement les matrices A et b transformées comme décrit ci-dessous (dans le cas 1).

Voir le tableau 4.2 page suivante, où on a écrit la matrice augmentée $\widetilde{A}$.

4.3.2. Calcul des coefficients α_i

Si vous prenez un groupe de plusieurs étudiants, vous pouvez résoudre des systèmes et obtenir les coefficients α.

(1) (a) Que se passe-t-il si vous prenez strictement moins d'étudiant que $p = 3$?

(b) Quels renseignements peuvent vous fournir les étudiants 12, 13 et 14 ?

(c) Si vous prenez cette fois-ci, les étudiants 15 et 16, écrire le système obtenu et montrer que l'on obtient $\alpha_1 = 4$ et $\alpha_2 = 8$. Comment obtenir alors α_3 ?

(2) En fait, les étudiants précédemment étudiés n'existent pas et ont été rajoutés. Les vraies notes correspondant à $i \leq 11$.

(a) Si vous prenez les étudiants 2, 3 et 4, quel système obtenez-vous ? Montrez que l'on obtient :

$$\alpha_1 = 3.968, \tag{4.27a}$$
$$\alpha_2 = 8.042, \tag{4.27b}$$
$$\alpha_3 = 7.920. \tag{4.27c}$$

Si on vous affirme que ces coefficients sont entiers, qu'observez-vous ?

Remarque 4.15. Sous matlab, vous pouvez taper :

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	30.0	24.0	0.0	312.0
2	22.5	60.0	25.0	769.8
3	22.5	60.0	20.0	730.2
4	60.0	60.0	10.0	799.8
5	52.5	60.0	30.0	930.0
6	60.0	60.0	30.0	960.0
7	60.0	60.0	30.0	960.0
8	60.0	24.0	15.0	552.0
9	60.0	60.0	50.0	1120.2
10	60.0	60.0	40.0	1039.8
11	0.0	60.0	40.0	799.8
12	45.0	0.0	0.0	180.0
13	0.0	24.0	0.0	192.0
14	0.0	0.0	10.0	79.8
15	30.0	36.0	0.0	408.0
16	15.0	24.0	0.0	252.0

TABLE 4.2. La matrice augmentée $\widetilde{A}$

```
[A,b]=saisienote('exammiAMFIA14',1);
indd=[2,3,4];
X=A(indd,:)\b(indd);
```

(b)

On travaille maintenant avec le fichier `exammiBMFIA14.txt`, montré dans le tableau 4.3 (à comparer au tableau 4.1). Si on fait comme dans la question 2a, on obtient

$$\alpha_1 = 3.9999999996800,$$
$$\alpha_2 = 8.0000000004200,$$
$$\alpha_3 = 7.9999999992000.$$

Qu'observez-vous ?

(3) (a) Reprenons la matrice du tableau 4.2.
Montrer que l'on ne peut obtenir les coefficients α avec les trois étudiants 6, 7 et 8. Pourquoi ? C'est parce que les trois lignes ne sont pas indépendantes !

(b) Toujours avec la matrice du tableau 4.2, montrer que l'on ne peut obtenir les coefficients α avec les trois étudiants 4, 7 et 9. Pourquoi ? C'est parce que les trois colonnes, cette fois, ne sont pas indépendantes !

(4) (a) Si vous prenez les étudiants 3, 4 et 5, montrez que vous obtenez :

$$\alpha_1 = 3.991, \tag{4.28a}$$
$$\alpha_2 = 8.004, \tag{4.28b}$$
$$\alpha_3 = 8.007. \tag{4.28c}$$

et comparez avec (4.27). Qu'observez-vous ?

i	N_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}
1	5.200000	2.000000	2.000000	0.000000
2	12.833333	1.500000	5.000000	2.500000
3	12.166667	1.500000	5.000000	2.000000
4	13.333333	4.000000	5.000000	1.000000
5	15.500000	3.500000	5.000000	3.000000
6	16.000000	4.000000	5.000000	3.000000
7	16.000000	4.000000	5.000000	3.000000
8	9.200000	4.000000	2.000000	1.500000
9	18.666667	4.000000	5.000000	5.000000
10	17.333333	4.000000	5.000000	4.000000
11	13.333333	0.000000	5.000000	4.000000
12	3.000000	3.000000	0.000000	0.000000
13	3.200000	0.000000	2.000000	0.000000
14	1.333333	0.000000	0.000000	1.000000
15	6.800000	2.000000	3.000000	0.000000
16	4.200000	1.000000	2.000000	0.000000

TABLE 4.3. le tableau informatique des notes avec le fichier `exammiBMFIA14.txt`

(b) Est-ce possible de considérer les notes de tous les étudiants à la fois ?

Naturellement, dans ce cas, contrairement au cas de la question 1a, où l'on obtenait des systèmes dit sous-déterminés, on obtient maintenant des systèmes sur-déterminés, où il y a plus d'équations que d'inconnues ! Ces systèmes n'ont pas de solutions, sauf dans le cas où toutes les équations sont vérifiées exactement pour les mêmes valeurs de α ! Ici, en comparant (4.27) et (4.28), on constate que les équations ne sont pas toutes vérifiées puisque l'on observe des valeurs différentes de α.

Cependant, on pourait pouvoir utiliser toutes les équations, afin de prendre en compte toutes les informations différentes et de ne pas rencontrer la difficulté d'obtenir différentes valeurs de α comme dans (4.27) et (4.28). On pourra consulter l'annexe J. Pour résoudre le système linéaire sur-dimensionné au sens des moindres carrés $AX = b$, il suffit de taper sous matlab :

```
[A,b]=saisienote('exammiAMFIA14',1);
disp(A\b);
```

On obtient alors

$$\alpha_1 = 4.001, \tag{4.29a}$$
$$\alpha_2 = 7.999, \tag{4.29b}$$
$$\alpha_3 = 8.000, \tag{4.29c}$$

que l'on peut enfin comparer aux vraies valeurs

$$\alpha_1 = 4.000, \tag{4.30a}$$
$$\alpha_2 = 8.000, \tag{4.30b}$$
$$\alpha_3 = 8.000, \tag{4.30c}$$

On peut dans ce cas, calculer aussi l'écart donné par (J.6) qui vaut ici

$$\varepsilon = 0.509236, \tag{4.31}$$

qui est faible.

(c) Si comme dans la question 2b, on travaille maintenant avec le fichier `exammiBMFIA14.txt`, on obtient

$$\alpha_1 = 4.00000000, \tag{4.32a}$$
$$\alpha_2 = 8.00000000, \tag{4.32b}$$
$$\alpha_3 = 8.00000000, \tag{4.32c}$$

que l'on peut enfin comparer aux valeurs (4.29). L'écart donné par (J.6) qui vaut ici

$$\varepsilon = 5.923\,10^{-9}, \tag{4.33}$$

plus faible que (4.31).

4.4. Un peu de théorie

4.4.1. Matrice, produits et inverse

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels (resp. complexes). Usuellement I, désigne la matrice identité de taille n. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices rectangle à n linge et p colonnes à coefficients réels.

Définition 4.16. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit le produit $C = AB$ comme matrice [6] de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \forall j \in \{1, ..., q\}, \quad c_{ij} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + ... + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{4.34}$$

Définition 4.17. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est dite inversible s'il existe une matrice B telle que

$$\boxed{AB = BA = I.} \tag{4.35}$$

Dans ce cas, la matrice B est unique. On l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Proposition 4.18. *Une matrice A est inversible si et seulement si il existe B telle que*

$$AB = I \text{ (ou } BA = I). \tag{4.36}$$

Une matrice non nulle n'est pas nécessairement inversible, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.19. La matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

n'est pas inversible.

Formellement, il est équivalent de résoudre le système (4.11) et d'inverser la matrice A, puisque l'on a la propriété suivante :

Proposition 4.20. *Soit une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. La matrice A est inversible si et seulement si il existe une matrice B telle que, pour tout couple (X, Y), le système $AX = Y$ est équivalent à $BY = X$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.*

6. Penser à la relation de Chasles $(n, p) \times (p, q) = (n, q)$.

On peut donc retenir que, si A est inversible, pour tout couple (X, Y),

$$AX = B \iff X = A^{-1}B. \tag{4.37}$$

REMARQUE 4.21. De façon pratique, pour déterminer l'inverse de A (s'il existe), on pose $AX = Y$. Par résolution du système, on détermine X en fonction de Y sous la forme $Y = BX$. On a donc $A^{-1} = B$ d'après (4.37).

REMARQUE 4.22. La recherche directe de la matrice B vérifiant $AB = I$ (comme dans l'exemple 4.19) est beaucoup plus lourde (elle fait intervenir n^2 équations au lieu de n équation, en utilisant la proposition 4.20) et ne s'utilise jamais.

EXEMPLE 4.23. Si on reprend l'exemple 4.6, avec étudie la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On obtient (4.7). Ainsi, pour tout X et Y, (4.6) est équivalent à (4.7). D'après la proposition 4.20, A est inversible et (4.7) nous fournit l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier *a posteriori* aussi que AA^{-1} est bien égal à I.

EXEMPLE 4.24. On étudie la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de l'exemple 4.6, on constate que $AX = Y$ est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = x', \\ x + y = y'. \end{cases} \tag{4.38}$$

Ainsi, on ne peut exprimer x et y en fonction de x' et y', pour tout (x, y, x', y') : en effet si on choisit $x' \neq y'$, on aurait $x + y \neq x + y$ ce qui est absurde. Ainsi, A n'est pas inversible.

De façon pratique, si on veut résoudre un système $AX = B$, il est équivalent d'inverser la matrice et de résoudre le système (4.9) dans le cas où B est un vecteur «symbolique». Si B est un vecteur «numérique», il est plus rapide de résoudre le système (4.9) plutôt que de calculer A^{-1} puis d'en déduire $B = A^{-1}X$.

Donnons aussi une propriété théorique :

PROPOSITION 4.25. *Soit une matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. *La matrice* A *est inversible si et seulement si,*

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad (AX = 0 \Longrightarrow X = 0)\,.} \tag{4.39}$$

Il existe d'autres moyens d'inverser des matrices (ou, ce qui est théoriquement équivalent, de résoudre des systèmes) ; citons, entre autres :

- l'expression théorique, fondée sur le déterminant ;
- la transformation simultanée de deux matrices ;
- la décomposition LU.
- l'utilisation de logiciel matriciel, type matlab (qui les inverse numériquement ou formellement).

«À la main», le moyen le plus simple [7] est de résoudre le système, en faisant des combinaisons de lignes et de colonnes afin de se ramener à un système triangulaire, plus simple à résoudre. On utilisera alors la proposition suivante qui permet de faire le lien entre l'inversibilité d'une matrice et la structure des solutions du système :

THÉORÈME 4.26. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système linéaire :*

$$AX = Y. \tag{4.40}$$

On a l'une des deux possibilités suivantes :

(1) ou bien A est inversible et (4.40) admet une unique solution égale à $A^{-1}Y$.

(2) ou bien A n'est pas inversible ; dans ce cas, on a de nouveau deux possibilités :

(a) soit le système (4.40) admet aucune solution ;

(b) soit le système (4.40) admet une infinité de solutions.

De plus, si on cherche à calculer X en fonction de Y en résolvant le système :

- *dans le cas 1, on n'aura q'une seule solution ;*
- *dans le cas 2a, on aboutira à au moins un couple de deux équations contradictoires ou une équation impossible ;*
- *dans le cas 2b, on aboutira au moins à une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible).*

Notons aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 4.27. *Si une matrice possède une ligne (ou une colonne) nulle ou une ligne (resp. une colonne) qui soit combinaison linéaires des autres lignes (resp. de colonnes), alors elle n'est pas inversible.*

Nous verrons quelques exemples et applications en TD.

Dans le cas $n = 2$, l'expression de l'inverse d'une matrice est très simple (on laisse au lecteur le soin de vérifier cette proposition) :

PROPOSITION 4.28. *Une matrice carrée d'ordre deux*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

est inversible si et seulement si son déterminant, donné par

$$\det(A) = ad - bc, \tag{4.41}$$

est non nul. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

Parfois, on modifiera le système de façon à profiter de la présence de zéro comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 4.29. On met le système suivant

$$\begin{cases} y + z = 2, \\ x + y + 4z = 6, \\ 3x - y + z = 3, \end{cases}$$

7. dans le cas général ; parfois, il faut considérer les structures particulières des systèmes étudiés.

sous la forme

$$\begin{cases} x + y + 4z = 6, \\ y + z = 2, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de finir le calcul.

Exemple 4.30. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 11, \\ -x + y + z = 2. \end{cases}$$

Après calculs, on le met sous la forme

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y + z = 3, \\ 2y + 2z = 6. \end{cases}$$

Puisque les deux dernières lignes sont proportionnelles, le système admet une infinité de solutions. Ainsi, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, ce qu'on aurait pu prévoir immédiatement, puisqu'elle possède deux colonnes identiques (d'après la proposition 4.27).

On se trouve dans le cas 2b du théorème 4.26.

Exemple 4.31. En utilisant la proposition 4.27, on peut constater sans calculs que les matrices suivantes ne sont pas inversibles :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.32. Reprenons l'exemple 4.30 où le membre de droite est modifié. On sait déjà que la matrice n'est pas inversible et le système admet soit une infinité de solution soit aucune solution. Le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 11, \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$$

se met sous la forme

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y + z = 3, \\ y + z = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Il n'admet donc aucune solution.

On se trouve dans le cas 2a du théorème 4.26.

4.4.2. Notion déterminant, rang

Voir `http://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_du_déterminant_d'une_matrice`

Définition 4.33. Il existe une application qui a toute matrice carré A associe un nombre d, dit déterminant. Ce nombre est tel que A est nul si et seulement si A est inversible.

En pratique, pour le calculer, on utiliser une méthode proche de la proposition 4.8 :

Proposition 4.34. *Pour calculer, le déterminant d'une matrice A : on procède comme la méthode du pivot de Gauss : à chaque ligne on peut ajouter une autre ligne ce que l'on notera sous la forme*

$$L_i \leftarrow L_i + \beta_j L_j, \tag{4.42}$$

où α_i est non nul, j et différent de i et β_j est quelconque. On peut aussi ajouter à chaque ligne éventuellement multipliée par un nombre non nul α_i, une autre ligne ce que l'on notera sous la forme (4.8)*. Dans, ce cas, il faudra diviser à la fin le déterminant obtenu par α_i. On pourra aussi éventuellement intervertir deux lignes (à condition de multiplier le déterminant obtenu par -1). Une fois la forme triangulaire obtenue, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.*

On peut procéder aux mêmes opérations sur les colonnes.

Si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul. Si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.

Enfin, on a la propriété fondamentale

$$\det(AB) = \det A \det B. \tag{4.43}$$

Remarque 4.35. L'usage du déterminant permet donc, par exemple, de discriminer le cas 1 et le cas 2 : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Remarque 4.36. La remarque 4.35 permet de savoir si on est dans le cas 1 ou 2 ; mais, à l'intérieur du cas 2, il faut faire des calculs supplémentaires pour savoir si l'on est dans le sous-cas 2a ou le sous-cas 2b.

Remarque 4.37.
— l'exemple 4.5 correspond au cas 1 ;
— l'exemple 4.9 correspond au cas 2a ;
— l'exemple 4.30 correspond au cas 2b.

Remarque 4.38.
— Le cas $n = 1$ est trivial :

$$\det A = a$$

— Le cas $n = 2$ est donné dans l'équation (4.4)
— Pour le cas $n = 3$ et seulement celui-là, on peut utiliser la règle de Sarrus :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + dhc - (gec + dbi + ahf). \tag{4.44}$$

Exemple 4.39. Reprenons l'exemple 4.7. On a mis la matrice sous la forme triangulaire suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 17 & 19 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

et, d'après la proposition 4.34, le déterminant est égal à 17×15 divisé par $17/5$, soit

$$\det(A) = 75.$$

On peut aussi utiliser la règle de Sarrus (4.44) qui donne

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix} = 1\times(-2)\times 2+5\times 4\times 4+3\times 1\times 3-\big(3\times(-2)\times 4+5\times 3\times 2+1\times 4\times 1\big)=75 \quad (4.45)$$

Sous matlab, on peut taper

```
A=...
[1    3    4
 5   -2    1
 3    4    2];
disp(det(A));
```

PROPOSITION 4.40 (Système de Cramer). *Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Soit X, l'unique solution de $AX = B$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la i-ième composante x_i de X est donnée par*

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A},}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A la i-ième colonne par B.

EXEMPLE 4.41. Reprenons par exemple, l'exemple 4.7. En utilisant, par exemple, la règle de Sarrus (4.45), on a

$$\det A = 75.$$

De même, on a

$$\det A_1 = \det\begin{pmatrix}19 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 1\\ 17 & 4 & 2\end{pmatrix} = 75.$$

On a donc

$$x_1 = \frac{75}{75} = 1.$$

De même, on obtient

$$x_2 = \frac{150}{75} = 2, \quad x_3 = \frac{225}{75} = 3.$$

4.5. D'autres méthodes de résolutions de systèmes linéaires

Voir par exemple [DB21, chapitre "Systèmes d'équations linéaires"].

Chapitre 5

Diagonalisation

Ce chapitre est facultatif. On renvoie à l'annexe K.

Chapitre 6

Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants

6.1. Introduction

On se donne a, b et c trois réels (a étant non nul) . On commence dans ce chapitre, par le cas le plus simple, celui des équations différentielles du type

$$ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale à l'instant t_0

$$y(t_0) = y_0,$$

qui constituent les équations différentielles du premier ordre, à coefficients constants ou du type

$$ay''(t) + by'(t) + by(t) = f(t),$$

acvec les conditions initiales à l'instant t_0

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y'_0, \end{aligned}$$

qui constituent les équations différentielles du deuxième ordre, à coefficients constants. Voir les sections 6.2 et 6.3, qui constituent le chapitre 7 de [Bas11b]. On notera souvent ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} ay' + by &= f, \\ ay'' + by' + by &= f. \end{aligned}$$

6.2. Équations différentielles d'ordre un

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, f $[t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),} \tag{6.1a}$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0.} \tag{6.1b}$$

Nous étudions d'abord en section 6.2.1 l'équation homogène associée (EHA) qui correspond à un second membre nul :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = 0. \tag{6.2}$$

Nous en déduirons ensuite en section 6.2.2 les solutions de (6.1a) et (6.1b).

6.2.1. Équation homogène associée

L'équation caractéristique associée à (6.2) est

$$ar + b = 0, \tag{6.3}$$

de solution $r = -b/a$. La solution de (6.2) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-bt/a},} \tag{6.4}$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln(y))' = \left(-\frac{b}{a}t\right)', \\ &\iff \ln(y) = c - \frac{b}{a}t, \\ &\iff y = e^c e^{-bt/a}, \\ &\iff y = Ce^{-bt/a}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

Remarque 6.1. On pourra trouver une preuve plus rigoureuse (mais moins mnémotechnique) de ce résultat dans l'exercice de TD 6.6 ou dans la section L.1 de l'annexe L.

6.2.2. Équation avec second membre

Il existe deux méthodes, présentées en section 6.2.2.1 et 6.2.2.2.

6.2.2.1. Principe général (recherche d'une solution particulière).

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (6.1a) et de la solution générale de l'EHA (6.2), donnée par (6.4). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.

Exercice 6.2. Démontrer ce principe.

Pour déterminer une solution particulière de (6.1a), il existe des techniques propres à chaque type d'équation, qui ne fonctionnent pas toujours. Si cela échoue, on utilise la méthode de la section 6.2.2.2. Elle est fastidieuse mais fonctionne toujours, si bien sûr, l'équation possède une solution calculable à la main.

6.2.2.2. Variation de la constante.

On cherche y sous la forme donnée par (6.4)

$$y(t) = C(t)e^{-bt/a}, \tag{6.5}$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a}$$

Si on réinjecte cette expression dans (6.1a), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= ay'(t) + by(t), \\ &= a\left(C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a}\right) + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} - bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} + \underbrace{\left(-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}\right)}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

REMARQUE 6.3. Cest la nullité de $-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}$ qui fait fonctionner le calcul. Si vous ne pouvez faire cette simplification, c'est probablement qu'il y a une erreur quelque part !

On a donc, par division par $ae^{-bt/a}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a}e^{bt/a}f(t),} \tag{6.6}$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (6.5). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (6.1b).

6.2.3. Équations différentielles d'ordre un linéaire avec a et b dépendant du temps.

On peut tout à fait résoudre l'équation (6.1a) où on considére les coefficents variables. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, a et b, f des fonction continues de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ a ne s'annulant pas sur $[t_0, +\infty[$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),} \tag{6.7}$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0.} \tag{6.8}$$

La technique de résolution est tout à fait identique.

Comme dans la section 6.2.1, on résoud d'abord l'équation homogène associée :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)ty'(t) + b(t)y(t) = 0. \tag{6.9}$$

La solution de (6.9) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-\alpha(t)},} \tag{6.10}$$

où

$$\boxed{\alpha \text{ est une primitive quelconque de la fonction } b/a.} \tag{6.11}$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln|y|)' = (-\alpha)', \\ &\iff \ln(y) = c - \alpha, \\ &\iff y = e^{c-\alpha}, \\ &\iff y = e^c e^{-\alpha}, \\ &\iff y = Ce^{-\alpha}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

On utilise ensuite, soit la méthode de la recherche de la solution particulière comme dans la section 6.2.2.1 soit la variation de la constante, comme dans la section 6.2.2.2.

(1) La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (6.7) et de la solution générale de l'EHA (6.9), donnée par (6.10). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.

(2) On cherche y sous la forme donnée par (6.10)

$$y(t) = C(t)e^{\alpha(t)}, \tag{6.12}$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (6.7), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t)y'(t) + b(t)y(t), \\ &= a(t)\left(C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)}\right) + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} - b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} + \underbrace{\left(-b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}\right)}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

On a donc, par division par $a(t)e^{\alpha(t)}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a(t)}e^{-\alpha(t)}f(t),} \tag{6.13}$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (6.12). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (6.8).

♢

6.2.4. Preuves théoriques

Voir la section L.1 de l'annexe L.

De cette section, on peut retenir la formule (L.9) et la formule de Duhamel (L.13), rappelée ici : les solutions de (6.1a) sont données par : il existe une constante c telle que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)}f(u)du. \tag{6.14}$$

Si on prend en compte la condition initiale (6.1b), on a

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_0e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)}f(u)du. \tag{6.15}$$

Cette méthode qui repose sur une formule est théorique et sera parfois utilisée dans ce cours, mais non exigible ! ♢

Ces formules se généralisent aussi dans le cas de la section 6.2.3. ♢

6.2.5. Exemples

Exemple 6.4. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \tag{6.16a}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 2. \tag{6.16b}$$

La solution générale de l'équation homogène associée

$$y'(t) + 2y(t) = 0,$$

est donnée par

$$y(t) = Ce^{-2t}, \tag{6.17}$$

où C est un réel.

Nous proposons trois méthodes de résolution.

(1) Cherchons une solution particulière sous la forme $\widehat{y}(t) = Ke^{-t}$ où K est un réel. D'après (6.16a), on a

$$-Ke^{-t} + 2Ke^{-t} = e^{-t},$$

et donc $K = 1$. On a donc

$$\widehat{y}(t) = e^{-t}. \tag{6.18}$$

On ajoute à cela la solution donnée par (6.17) et il vient donc

$$y(t) = Ce^{-2t} + e^{-t}, \tag{6.19}$$

où C est un réel.

(2) Si on utilise la technique de la section 6.2.2.2, compte tenu de (6.17), on fait varier C et il vient

$$y' = C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t},$$

ce qui donne, réinjecté dans (6.16a)

$$C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 2Ce^{-2t} = e^{-t},$$

et donc

$$C'e^{-2t} = e^{-t},$$

soit encore

$$C' = e^{2t}e^{-t} = e^{t}.$$

Ainsi, par intégration

$$C = e^{t} + C_0,$$

où C_0 est un réel et donc, d'après (6.17),

$$y(t) = \left(e^{t} + C_0\right)e^{-2t} = e^{-t} + C_0e^{-2t},$$

et l'on retrouve donc bien (6.19).

Finalement, que l'on utilise l'une ou l'autre des deux premières méthodes, on a donc la solution générale sous la forme

$$y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

La condition initiale (6.16b) donne donc

$$2 = e^{0} + Ce^{0} = 1 + C,$$

et donc $C = 1$ et la solution cherchée et donc donnée par

$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t}. \tag{6.20}$$

(3) Si on utilise directement la formule (6.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $f(t) = e^{-t}$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2e^{-2t} + \int_0^t e^{2(u-t)}e^{-u}du, \\
&= 2e^{-2t} + e^{-2t}\int_0^t e^{u}du, \\
&= 2e^{-2t} + e^{-2t}\left[e^{u}\right]_0^t, \\
&= 2e^{-2t} + e^{-2t}\left(e^{t} - 1\right), \\
&= 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t}, \\
&= e^{-2t} + e^{-t}.
\end{aligned}$$

ce qui est bien (6.20). ♢

Exemple 6.5. Traiter l'exercice de TD (corrigé) 6.2.

EXEMPLE 6.6. On s'intéresse à un circuit électrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = e. \tag{6.21}$$

On suppose que

$$i(0) = 0, \tag{6.22}$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 Y(t), \tag{6.23}$$

où E_0 est une constante et Y est définie par

$$Y_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{6.24}$$

Une solution particulière de (6.21) est donnée par $Ri = E_0$ (c'est-à-dire la solution correspondant au régime stationnaire). D'après la méthode de la section 6.2.2.1, on a, après calculs,

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{6.25}$$

où le temps caractéristique τ est défini par

$$\tau = \frac{L}{R}. \tag{6.26}$$

EXEMPLE 6.7. Étudions de nouveau l'équation différentielle (6.21) et (6.22) de l'exemple 6.6 où e n'est plus un échelon mais est défini par

$$e(t) = E\cos(\omega t). \tag{6.27}$$

On pose

$$F = \frac{E}{L}. \tag{6.28}$$

Proposons trois méthodes :

(1) La méthode de la variation de la constante 6.2.2.2 donne après calculs

$$i(t) = C(t)e^{-t/\tau} \tag{6.29}$$

où τ est défini par (6.26) et

$$C'(t) = Fe^{t/\tau}\cos(\omega t). \tag{6.30}$$

Pour intégrer, on a deux façons de procéder.

(a) On écrit

$$C(t) = C_0 + F\int e^{t/\tau}\cos(\omega t)dt,$$

où C_0 est la constante d'intégration et donc

$$C(t) = C_0 + FI, \tag{6.31}$$

où

$$I = \int e^{t/\tau}\cos(\omega t)dt. \tag{6.32}$$

On peut calculer cette primitive grâce à deux intégrations par partie. La première fournit

$$I = \tau\omega\int e^{t/\tau}\sin(\omega t)dt + \tau e^{t/\tau}\cos(\omega t).$$

Puis, une seconde fournit successivement :

$$\begin{aligned} I &= \tau\omega\left(-\tau\omega\int e^{t/\tau}\cos(\omega t)dt + \tau e^{t/\tau}\sin(\omega t)\right) + e^{t/\tau}\cos(\omega t), \\ &= -\tau^2\omega^2 I + \tau^2\omega e^{t/\tau}\sin(\omega t) + \tau e^{t/\tau}\cos(\omega t). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(1+\tau^2\omega^2)I = \tau e^{t/\tau}\left(\tau\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right),$$

et donc

$$I = \frac{\tau e^{t/\tau}}{1+\tau^2\omega^2}\left(\tau\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right),$$

soit

$$I = \frac{e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\left(\omega\sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau}\right). \tag{6.33}$$

On obtient donc grâce à (6.31), (6.32) et (6.33)

$$C(t) = \frac{Fe^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega\sin(\omega t)\right) + C_0. \tag{6.34}$$

(b) Un peu plus rapidement, on peut aussi passer en complexe : on écrit

$$C'(t) = F\,\mathrm{Re}\left(e^{t/\tau}e^{i\omega t}\right), \tag{6.35}$$

soit

$$C'(t) = F\,\mathrm{Re}\left(e^{\alpha t}\right), \tag{6.36}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\tau} + i\omega. \tag{6.37}$$

Si $\mathcal{C}$ vérifie

$$\mathcal{C}'(t) = Fe^{\alpha t/\tau}, \tag{6.38}$$

nous n'aurons plus qu'à calculer alors

$$C(t) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{C}(t)\right). \tag{6.39}$$

Intégrons (en complexe) (6.38) qui fournit

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0 + \frac{F}{\alpha}e^{\alpha t/\tau},$$

où $\mathcal{C}_0$ est un nombre complexe et donc

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau}-i\omega)}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}e^{t/\tau}e^{i\omega t}.$$

On a donc

$$C(t) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{C}_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau}-i\omega)}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}e^{t/\tau}e^{i\omega t}\right),$$

En reprenant la partie réelle de cette expression, on obtient

$$C(t) = C_0 + \frac{Fe^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega\sin(\omega t)\right).$$

où $C_0 = \mathrm{Re}(\mathcal{C}_0)$, est une constante, ce qui est bien (6.34).

Finalement, de (6.29) et (6.34), on tire

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right) + C_0 e^{-t/\tau}. \tag{6.40}$$

où la constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i. On écrit en effet $i(0) = 0$, ce qui donne

$$\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \right) + C_0 = 0.$$

dont on déduit la valeur de C_0 :

$$C_0 = -\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \frac{1}{\tau}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (6.40), on a

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right). \tag{6.41}$$

(2) En fait, la méthode de la section 6.2.2.1 est encore plus rapide, comme précédemment annoncé. Elle donne

$$i(t) = C_0 e^{-t/\tau} + i_p(t). \tag{6.42}$$

où τ est défini par (6.26) et i_p est une solution particulière de (6.21)-(6.27). On cherche alors une solution particulière i_p sous la forme

$$i_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

On la réinjecte dans (6.21)-(6.27) et on obtient

$$E \cos(\omega t) = L \left(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \right) + RA \cos(\omega t) + RB \sin(\omega t)$$

et donc

$$E \cos(\omega t) = (LB\omega + RA) \cos(\omega t) + (RB\omega - A\omega L) \sin(\omega t).$$

Pour cela, il suffit (et il faut en fait) que les termes en cos et sin soient identiques de chaque coté et donc que

$$\begin{aligned} RA + LB\omega &= E, \\ RB - AL\omega &= 0, \end{aligned}$$

système linéaire à deux équations, qu'on résoud très simplement ici : la seconde équation donne

$$A = \frac{RB}{L\omega}, \tag{6.43}$$

que l'on réinjecte dans la première :

$$\frac{R^2 B}{L\omega} + LB\omega = E,$$

et donc

$$\begin{aligned} B &= \frac{E}{\frac{R^2}{L\omega} + L\omega}, \\ &= \frac{\frac{E}{L}\omega}{\frac{R^2}{L} + L\omega^2}, \end{aligned}$$

encore donné, en utilisant (6.26) et (6.28), par

$$B = \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}. \tag{6.44}$$

De (6.43), on déduit alors

$$A = \frac{\frac{1}{\tau}F}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}. \tag{6.45}$$

De (6.44) et (6.45), on déduit alors

$$i_p(t) = \frac{\frac{1}{\tau}F}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\sin(\omega t).$$

et donc grâce à (6.42), on retrouve exactement (6.40). La constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i comme précédemment.

(3) Si on utilise directement la formule (6.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = L$, $b = R$ et $f(t) = E\cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}(u-t)}E\cos(\omega u)du, \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{u}{\tau}}E\cos(\omega u)du, \\ &= Fe^{-\frac{t}{\tau}}\int_0^t e^{\frac{u}{\tau}}\cos(\omega u)du, \end{aligned}$$

en utilisant le calcul déjà fait par l'un ou l'autre des deux méthodes présentées ci-dessus (voir les points 1a ou 1b), on déduit de (6.33) :

$$\begin{aligned} &= Fe^{-\frac{t}{\tau}}\left(I(t) - I(0)\right)du, \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}Fe^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{t/\tau}\left(\omega\sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau}\right), \\ &= \frac{F}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\left(\omega\sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien (6.41). ♢

Analysons l'expression de $i(t)$ donnée par (6.40). On peut remarquer que i est la somme de deux termes i_1 et i_2 (on retrouve en fait les calculs du point 2) définis par

$$i_1(t) = C_0 e^{-t/\tau}, \tag{6.46}$$

$$i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2+\omega^2}\left(\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right). \tag{6.47}$$

Le terme i_1 est en fait la solution générale de l'EHA associée à (6.21) et donc i_2 en est une solution particulière. Remarquons que i_1 tend vers zéro quand t tend vers l'infini ; les électriciens disent en fait qu'au bout d'un temps égal au temps caractéristique τ, i_1 est quasiment nul. Ainsi, pour t «grand» on a

$$i(t) \approx i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2+\omega^2}\left(\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right). \tag{6.48}$$

On retrouve le régime stationnaire du circuit électrique, fonctionnant alors en régime périodique de pulsation ω.

On pourrait mettre i dans (6.48) sous la forme

$$i_2(t) = I\cos(\omega t + \phi),$$

et retrouver ainsi I et le déphasage ϕ, que l'on aurait pu aussi retrouver par les calculs d'impédances complexes, comme le montre la remarque suivante :

Remarque 6.8. L'équation différentielle (6.21) avec (6.27) est réécrite en régime périodique

$$L\frac{d\mathcal{I}}{dt} + R\mathcal{I} = E\cos(\omega t). \tag{6.49}$$

et en posant

$$\mathcal{I} = Ie^{i\omega t} \tag{6.50}$$

où I est complexe. Puisque

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{i\omega t}\right) = Ii\omega e^{i\omega t},$$

(6.49) fournit donc

$$LIi\omega e^{i\omega t} + RIe^{i\omega t} = Ee^{i\omega t}$$

et donc

$$LIi\omega + RI = E,$$

soit

$$I = \frac{E}{R + Li\omega},$$

que l'on calcule de façon classique :

$$\begin{aligned}
\frac{E}{R + LIi\omega} &= E\frac{R - LIi\omega}{R^2 + L^2\omega^2}, \\
&= E\frac{\frac{R}{L^2} - \frac{i\omega}{L}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}, \\
&= \frac{E}{L}\frac{\frac{R}{L} - i\omega}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}, \\
&= \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (6.50)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= e^{i\omega t}\frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right), \\
&= \left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)\frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right),
\end{aligned}$$

et si on reprend la partie réelle, on a donc

$$i(t) = \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right),$$

ce qui est bien identique à (6.48).

6.3. Équations différentielles d'ordre deux

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction continue de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),} \tag{6.51a}$$

avec éventuellement les conditions initiales

$$\boxed{y(t_0) = y_0,} \tag{6.51b}$$

$$\boxed{y'(t_0) = y_0'.} \tag{6.51c}$$

Comme pour la section 6.2, nous étudions d'abord en section 6.3.1 l'équation homogène associée (EHA) qui correspond à un second membre nul :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{6.52}$$

Nous en déduirons ensuite en section 6.3.2 les solutions de (6.51).

6.3.1. Équation homogène associée

L'équation caractéristique associée à (6.51a) est

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{6.53}$$

qui admet *a priori* deux solutions complexes r_1 et r_2. De façon générale, la solution de (6.52) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},} \tag{6.54}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

En fait, on exprime que cette solution est réelle et on étudie alors les différents cas suivants selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta \neq 0$: on a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

(a) Si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont réelles données par

$$r_k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{6.55}$$

et la solution générale de (6.52) s'écrit

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},} \tag{6.56}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

(b) Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjuguées ; on considère $(\omega, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définis par

$$r_k = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega, \tag{6.57}$$

et la solution générale de (6.52) s'écrit [1]

$$\boxed{y(t) = e^{\alpha t}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big),} \tag{6.59}$$

où A et B sont deux constantes.

(2) Si $\Delta = 0$: on a deux racines réelles confondues, égales à

$$r = -\frac{b}{2a}, \tag{6.60}$$

et la solution générale de (6.52) s'écrit

$$\boxed{y(t) = e^{rt}(At + B),} \tag{6.61}$$

où A et B sont deux constantes.

6.3.2. Équation avec second membre

La méthode est la même que dans la section 6.2.2 : il existe deux méthodes, présentées en section 6.3.2.1 et 6.3.2.2.

6.3.2.1. Principe général. La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (6.51a) et de la solution générale de l'EHA (6.52). On détermine ensuite les constantes d'intégration grâce à la condition initiale.

Exercice 6.9. Démontrer ce principe.

1. On peut aussi la mettre sous une autre forme équivalente :

$$y(t) = e^{\alpha t} A\cos(\omega t + \phi), \tag{6.58}$$

où A et ϕ sont deux constantes.

6.3.2.2. (Double) variation de la constante. On cherche y sous la forme

$$\boxed{y(t) = C_1(t)z_1(t) + C_2(t)z_2(t),} \tag{6.62}$$

où «les deux constantes» C_1 et C_2 sont considérées comme deux fonctions et z_1 et z_2 sont solutions particulières indépendantes [2] de l'EHA (6.52). Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
&z_1(t) = e^{r_1 t}, \quad z_2(t) = e^{r_2 t}, \text{ dans le cas 1a,}\\
&z_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t), \quad z_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t), \text{ dans le cas 1b,}\\
&z_1(t) = te^{rt}, \quad z_2(t) = e^{rt}, \text{ dans le cas 2.}
\end{aligned}$$

On impose la condition

$$\boxed{C_1' z_1 + C_2' z_2 = 0.} \tag{6.63}$$

Ainsi, il vient successivement

$$\begin{aligned}
y' &= C_1' z_1 + C_2' z_2 + C_1 z_1' + C_2 z_2'\\
&= C_1 z_1' + C_2 z_2'
\end{aligned}$$

et

$$y'' = C_1' z_1' + C_2' z_2' + C_1 z_1'' + C_2 z_2''.$$

On réinjectant ces expressions dans (6.51a), il vient

$$\begin{aligned}
f &= a\left(C_1' z_1' + C_2' z_2'\right) + C_1\left(a z_1'' + b z_1' + c z_1\right) + C_2\left(a z_2'' + b z_2' + c z_2\right)\\
&= a\left(C_1' z_1' + C_2' z_2'\right),
\end{aligned}$$

puisque z_1 et z_2 sont solutions de l'équation homogène (6.52).

Ainsi, grâce à la condition (6.63), on a un système de deux équations à deux inconnues

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(t)z_1(t) + C_2'(t)z_2(t) = 0,\\ C_1'(t)z_1'(t) + C_2'(t)z_2'(t) = \dfrac{f(t)}{a}, \end{cases}}$$

que l'on écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix}$$

On admet que $z_1 z_2' - z_1' z_2 \neq 0$, ce qui traduit que les deux fonctions z_1 et z_2 sont indépendantes ; ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} C_1' = -\dfrac{z_2 f}{a}\dfrac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2}, \\[2ex] C_2' = \dfrac{z_1 f}{a}\dfrac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2}. \end{cases}} \tag{6.64}$$

Après intégration, on connaît donc y, modulo les conditions initiales, qui permettent de déterminer les conditions initiales.

6.3.3. Preuves théoriques

Voir la section L.2 de l'annexe L.

2. nous définirons cette notion un peu plus tard.

6.3.4. Exemples d'équations d'ordre 2

EXEMPLE 6.10. On étudie le flambement parfait d'Euler :

$$\forall x \in [0, L], \quad v''(x) + \omega_0^2 v(x) = 0, \tag{6.65}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F}{EI}}, \tag{6.66}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \tag{6.67}$$
$$v(L) = 0. \tag{6.68}$$

Attention, ici les conditions aux limites sont différentes de (6.51b) et (6.51c). On montre que

$$v(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$

et on calcule l'une des constantes A et B grâce à (6.67) et (6.68).

EXEMPLE 6.11. On étudie le flambement parfait d'Euler avec défaut initial $v_0(x) = a\sin(\pi x/L)$:

$$\forall x \in [0, L], \quad v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K\sin(\omega x), \tag{6.69}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \tag{6.70}$$
$$v(L) = 0. \tag{6.71}$$

On suppose $\omega \neq \omega_0$. Voir en TD le cas où $\omega = \omega_0$.

EXEMPLE 6.12. On étudie

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}, \tag{6.72}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme

$$\widehat{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^{-2t}.$$

Après calculs, on a

$$\widehat{y}''(t) + 4\widehat{y}'(t) + 4\widehat{y}(t) = 2ae^{-2t}.$$

Il suffit donc de prendre $2a = 1$, ce qui est vrai pour $c = b = 0$ et $a = 1/2$. On a donc

$$y(t) = \underbrace{Ate^{-2t} + Be^{-2t}}_{\text{solution générale de l'EHA}} + \underbrace{\frac{t^2}{2}e^{-2t}}_{\text{solution particulière de (6.72)}}.$$

Les conditions initiales imposent $A = 0$ et $B = 0$, et donc

$$y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-2t}.$$

6.4. Approximation numérique des équations différentielles vues dans ce chapitre

Voir par exemple [DB21, chapitre "Équations différentielles"] ou [BM03, chapitre 5].

6.5. Application en utilisation en DDRS

Quelques équations différentielles à coefficients constants seront utilisées, entre autres, dans un cours de DDRS plus tard dans l'année. Voir [Bas24a ; Bas24b ; Bas24c].

6.6. Et matlab symbolique ?

Comme beaucoup de langage, matlab sait aussi résoudre des équations différentielles, quand elles ont des solutions explicites !

On veut résoudre

$$2y'' + 5y' - 3y = 0,$$
$$2y'' + 5y' - 3y = t^3 + t^2 - 1.$$

On écrit successivement :

```
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=0'),
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1')
```

On peut aussi rajouter des conditions aux limites : par exemple, pour traiter la dernière équation différentielle avec

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -8,$$

on écrira

```
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1','y(0)=1','Dy(0)=-8'),
```

On peut aussi écrire pour que l'affichage soit plus beau :

```
pretty(dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1','y(0)=1','Dy(0)=-8')),
```

Dans un premier temps, on résout l'équation différentielle :

$$v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K \sin(\omega x),$$

en tapant sous matlab

```
pretty(dsolve('D2y+omega0^2*y=K*sin(omega*x)','x')),
```

On prend ensuite en compte les conditions initiales

$$v(0) = v(L) = 0,$$

en tapant sous matlab :

```
pretty(dsolve('D2y+omega0^2*y=K*sin(omega*x)','y(0)=0','y(L)=0','x')),
```

On pourra ensuite résoudre l'équation différentielle avec $\omega_0 = \omega$:

$$v''(x) + \omega^2 v(x) = K \sin(\omega x), \tag{6.73}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0. \tag{6.74}$$

On pourra aussi s'intéresser à la solution de l'équation différentielle (6.73)-(6.74) avec $L = \pi/\omega$ où K est quelconque puis quand $L = \pi/\omega$ et $K = 0$.

Chapitre 7

Erreurs

Une fois n'est pas coutume ; nous essayerons de clore ce cours par une présentation de petits problèmes simples de calculs. Nous verrons que les ordinateurs ne calculent pas si bien que ça ! La référence qui suit sera présentée de façon abrégée, lors de la dernière séance de CM de cours.

Voir [Bas14], disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/INSA/zetetique/erreur_ordinateur.pdf

Les sources matlab de ces transparents, issus [BM03, chapitre 1] sont disponibles sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/INSA/zetetique/zetetique_fichiersmatlab.zip` et pourront être par exemple, utilisées en TP.

Deuxième partie

Partie Spécifique

Chapitre 8

Ensembles

Ce chapitre est très fortement inspiré de [Rid17].

8.1. Définitions

Définition 8.1. Un ensemble est une "collection" d'éléments. Il peut être défini par la liste de ses éléments ou par une propriété. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Exemple 8.2.

$$F = \{1, 2, 4, 9\}.$$
$$F = \{n^2, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$
$$F = \{n \in \mathbb{Z}, \quad 7|n\} = 7\mathbb{Z}.$$

Définition 8.3. On dit que x appartient à E et on note $x \in E$ si x est un élément de E. Sinon, on note $x \notin E$.

Définition 8.4. Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B ou que A est une partie ou un sous-ensemble de B et on note $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B.

Exemple 8.5.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Définition 8.6. L'ensemble des parties de X est noté $\mathcal{P}(X)$. $\mathcal{P}(X)$ est donc un ensemble d'ensembles. On a l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \in \mathcal{P}(B).$$

Exemple 8.7.

Détermination de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 4 parties à 1 éléments (singletons) sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$;
— Les 6 parties à 2 éléments (paires) sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$;
— Les 4 parties à 3 éléments sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$;
— L'unique parties à 4 élément est S ;

ce qui nous fait un total de 16 parties.

La détermination des parties à 0, 1 et 4 éléments ne posent aucun soucis.

Pour celles à 2 éléments, on procède comme suit : le premier élément peut être 1, 2, 3 ou 4. Pour le premier d'entre eux, 1, le second peut être 2, 3 ou 4. Pour 2, le second peut être 3 ou 4. Pour 3, le second peut être 4. Pour 4, aucun ne va.

Pour les parties à 3 éléments, chacune d'elles est le complémentaire d'une partie à 1 élément.

Exemple 8.8.

On souhaite reprendre l'exemple 8.7 pour la détermination de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. Traiter l'exercice de TD 8.1.

Définition 8.9. Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est égal à B et on note $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$, soit encore si tout élément de A est un élément de B et tout élément de B est un élément de A.

Définition 8.10. Si E est un ensemble et A une partie de E, on appelle complémentaire de A dans E et on note $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ (si E est sous-entendu) l'ensemble des éléments x de E qui ne sont pas dans A.

Proposition 8.11. *Soient E un ensemble et A une partie de E. Alors*

$$\overline{E} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

8.2. Union, Intersection

Définition 8.12. Si E est un ensemble et A, B deux parties de E, on appelle union (ou réunion) de A et B et on note $A \cup B$ l'ensemble des $x \in E$ qui sont dans A ou dans B.

Définition 8.13. Si E est un ensemble et A, B deux parties de E, on appelle intersection de A et B et on note $A \cap B$ l'ensemble des $x \in E$ qui sont dans A et dans B.

Proposition 8.14. *Soient E un ensemble et A, B, deux parties de E. Alors*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Démonstration. En anticipant sur le chapitre 10, on a successivement

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\iff x \notin A \cup B, \\
&\iff \neg\left(x \in A \cup B\right), \\
&\iff \neg\left(x \in A \text{ ou } x \in B\right), \\
&\iff \neg\left(x \in A\right) \text{ et } \neg\left(x \in B\right), \\
&\iff \left(x \notin A\right) \text{ et } \left(x \notin B\right), \\
&\iff \left(x \in \overline{A}\right) \text{ et } \left(x \in \overline{B}\right), \\
&\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 8.15.

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}.$$

En effet, on procède en deux étapes, par double inclusion.

(1) Tout multiple de 6 est à la fois multiple de 2 et de 3 ; on a donc

$$6\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}.$$

(2) Réciproquement, soit $n \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. On a donc

$$n = 2q = 3p, \tag{8.1}$$

où p et q sont deux entiers relatifs. On en déduit que 3 divise $3p$ donc $2q$. Puisque 3 est premier avec 2, il divise q. On a donc $q = 3r$ où r est un entier relatif. De (8.1), on tire :

$$n = 2q = 6r,$$

et donc $n \in 6\mathbb{Z}$.

Exemple 8.16.

$$4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}.$$

8.3. Produit cartésien

Définition 8.17. Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble $A \times B$ des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b), \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

Exemple 8.18.
Détermination de $\{a, b\} \times \{1, 2, 3, 4\}$
On cherche l'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in \{a, b\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- On peut d'abord remarquer que la première composante peut être a et la seconde 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$ ou $(a, 4)$. La première composante peut être ensuite b et la seconde 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(b, 3)$ ou $(b, 4)$.
-

(x, y)	1	2	3	4
a	$(a, 1)$	$(a, 2)$	$(a, 3)$	$(a, 4)$
b	$(b, 1)$	$(b, 2)$	$(b, 3)$	$(b, 4)$

Table 8.1. Constructions des couples de $\{a, b\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

Autrement, on peut aussi utiliser un tableau comme le montre le tableau 8.1.

On définit de même le produit cartésien de 2, 3 ou d'un nombre quelconque fini d'ensembles.

Exemple 8.19.
On définit donc $\mathbb{R}^2$, ou de façon plus générale, pour tout entier n, $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 9

Applications

Ce chapitre est inspiré de [Rid17].

9.1. Définition

Définition 9.1. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ X, d'un ensemble d'arrivée Y et pour chaque élément x de X d'un unique élément y de Y, image de x par f que l'on note $f(x)$.

On note $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$.

Si $x \in X$ et $y \in Y$ vérifient $y = f(x)$, on dit alors que y est l'image de x et x un antécédent de y.

Définition 9.2. On note $\mathcal{F}(X, Y)$ ou Y^X l'ensemble des applications de X dans Y.

Définition 9.3. Une fonction f est la donnée d'un ensemble de départ X, d'un ensemble d'arrivée Y et d'une correspondance $x \mapsto f(x)$. Chaque élément x de X possède au plus une image dans Y. L'ensemble des éléments x de X qui possèdent exactement une image constitue l'ensemble de définition de f et est noté D_f.

Remarque 9.4. Un élément de Y n'a pas toujours d'antécédent et s'il en a, il peut en avoir plusieurs.

Remarque 9.5. La restriction d'une fonction f de X dans Y à son ensemble de définition définit une application.

Exemple 9.6.

(1) La fonction $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{array} \right.$ a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$.

(2) $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{array} \right.$ est une application.

(3) La fonction $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array} \right.$ a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 9.7. Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère l'application caractéristique de A définie par $\chi_A : \left| \begin{array}{l} E \to \{0, 1\} \\ x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \end{array} \right.$

Si l'ensemble E est fini, voir la figure 9.1 page suivante.

9.2. Surjection, Injection, Bijection

Soit une application $f : \left| \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$. On considère un élément y de Y et on considère le problème suivant :

$$\text{"Existe-il } x \in X \text{ tel que } f(x) = y\text{"}, \tag{9.1}$$

c'est-à-dire,

$$\text{"}y \text{ admet-il un antécédent } x \text{ dans } X \text{ ?"}. \tag{9.2}$$

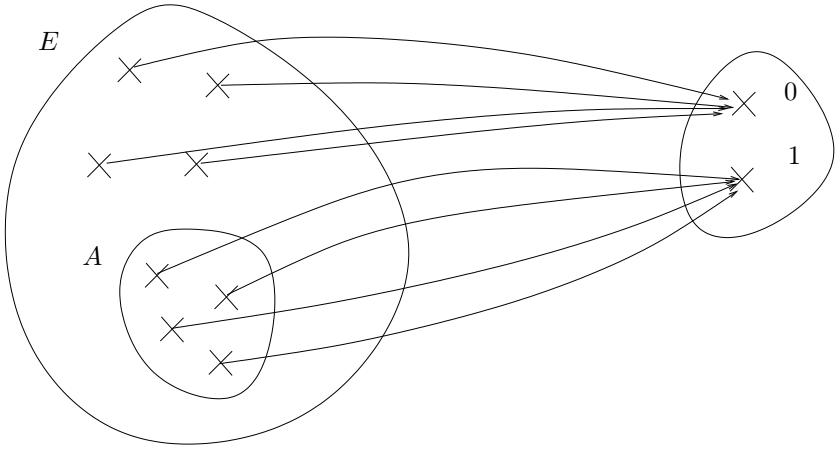


FIGURE 9.1. L'application caractéristique de A.

Si, pour tout $y \in Y$, le problème (9.1) ou (9.2) admet au moins une solution, on dit que f est surjective, ce qui est aussi équivalent à

$$\text{tout élément } y \in Y \text{ admet au moins un antécédent.} \tag{9.3}$$

On donne donc la définition suivante

DÉFINITION 9.8. On dit que $f : \left| \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est surjective ssi :

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in X, \quad y = f(x). \tag{9.4}$$

Si, pour tout $y \in Y$, le problème (9.1) ou (9.2) admet au plus une solution, on dit que f est injective, ce qui est aussi équivalent à

$$\text{tout élément } y \in Y \text{ admet au plus un antécédent.} \tag{9.5}$$

On donne donc la définition suivante

DÉFINITION 9.9. On dit que $f : \left| \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est injective ssi :

$$\forall x, x' \in X, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'. \tag{9.6}$$

Si, pour tout $y \in Y$, le problème (9.1) ou (9.2) admet exactement une solution, on dit que f est bijective, ce qui est aussi équivalent à dire que f est à la fois injective et surjective ou encore

$$\text{tout élément } y \in Y \text{ admet un seul antécédent.} \tag{9.7}$$

On donne donc la définition suivante

DÉFINITION 9.10. On dit que $f : \left| \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective ssi :

$$\forall y \in Y, \quad \exists! x \in X, \quad y = f(x). \tag{9.8}$$

Donnons la définition suivante :

DÉFINITION 9.11. Soit $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$. L'image d'une partie A de X est l'ensemble des images des éléments de A, c'est-à-dire :

$$f(A) = \{y \in Y, \quad \exists a \in A, \quad y = f(a)\}. \tag{9.9}$$

On en déduit le lemme suivant

LEMME 9.12. *Une application* $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ *est surjective ssi* $f(X) = Y$.

◇

REMARQUE 9.13.

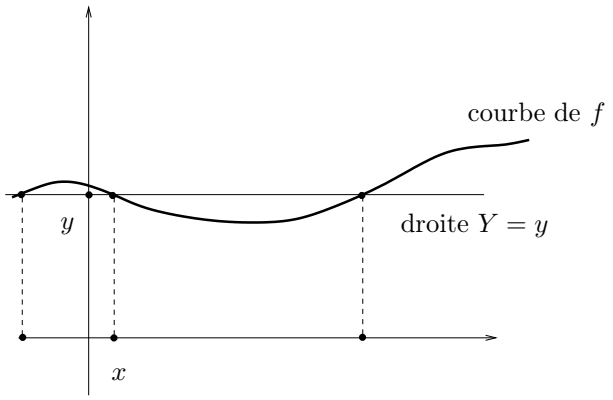


FIGURE 9.2. "Résolution" de l'équation (9.10) en x.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour visualiser la recherche de la solution de l'équation

$$y = f(x), \tag{9.10}$$

pour y fixé, on considère la droite d'équation $Y = y$ et l'éventuelle abscisse de l'intersection de cette droite avec la courbe, qui vérifie donc (9.10) Voir figure 9.2. Sur cette figure, on a l'exemple d'une fonction non injective (l'équation (9.10) a trois solutions) et si l'on considère que f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle n'est pas surjective (si y est assez grand, l'équation (9.10) n'a pas de solution).

EXEMPLE 9.14. Donner un exemple d'une application :

(1) ni injective, ni surjective ;

(2) injective, non surjective ;

(3) non injective, surjective ;

(4) bijective.

Donner le résultat sous forme de "patate". On pourra déterminer des exemples optimaux, c'est-à-dire, utilisant des ensemble de cardinaux les plus faibles.

On raisonne ainsi :

On renvoie à la figure 9.3 où chacune des situations est présentée :

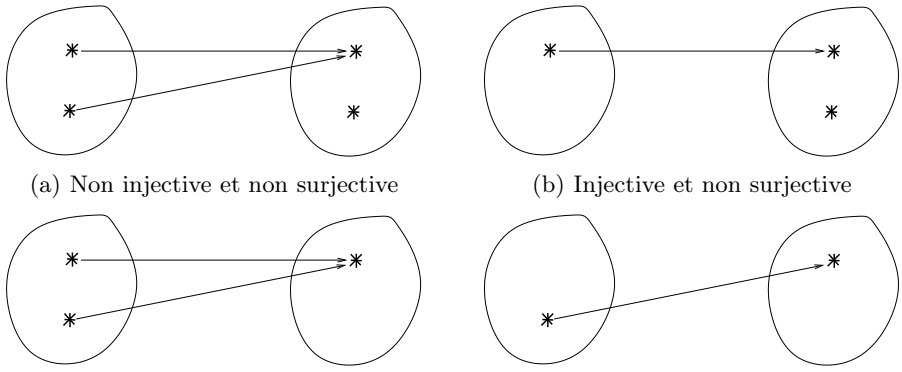
(1) Pour la figure 3(a), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a deux donc l'application est ni surjective ni injective ;

(2) Pour la figure 3(b), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a un seul donc l'application est non surjective et injective ;

(3) Pour la figure 3(c), l'unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents donc l'application est non injective et surjective ;

(4) Pour la figure 3(d), les deux ensembles ont un seul élément et donc le seul élément de l'ensemble de départ a un unique élément dans l'ensemble d'arrivée. L'application est donc bien bijective.

On peut montrer que ces quatre situations correspondent aux situations optimales, utilisant des ensemble de cardinaux les plus faibles.



(a) Non injective et non surjective (b) Injective et non surjective

(c) Non injective et surjective (d) bijective

FIGURE 9.3. Quatre exemples différents d'applications.

EXEMPLE 9.15. Donner un exemple d'une application :

(1) ni injective, ni surjective ;
(2) injective, non surjective ;
(3) non injective, surjective ;
(4) bijective.

Donner le résultat sous forme analytique
On raisonne ainsi :
Soit $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$. On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = x^2$ et on donne différents cas de figure :

(1) Pour, $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, f est ni injective, ni surjective. En effet
   - $f(1) = f(-1) = 1$ donc 1 et -1, distincts, ont la même image.
   - f n'est pas surjective, car -1 n'est pas atteint par f, puisqu'il n'existe aucun réel de carré égal à -1. On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 9.12, que
   $$f(X) = \mathbb{R}_+,$$
   et donc
   $$f(X) \neq Y.$$
(2) Pour, $X = \mathbb{R}_+$ et $Y = \mathbb{R}$, f est injective, non surjective.
   En effet
   - si $f(x) = f(y)$, alors $x^2 = y^2$ et donc
   $$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
   et donc $x = \pm y$. Puisque x et y sont tous les deux positifs, alors ils ne peuvent qu'être égaux.
   - Comme pour le cas 1, on conclut que f n'est pas surjective.
(3) Pour, $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}_+$, f est non injective, surjective.
   En effet
   - Comme pour le cas 1, on conclut que f n'est pas injective.
   - Tout nombre réel positif est le carré de sa racine carré [1]. Donc f est surjective. On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 9.12, que
   $$f(X) = \mathbb{R}_+,$$

1. Cest même la définition de la racine ! Voir (9.11).

et donc

$$f(X) = Y.$$

(4) Pour, $X = \mathbb{R}_+$ et $Y = \mathbb{R}_+$, f est injective, surjective, donc bijective.

En effet

- f est injective, comme dans le cas 2.
- f est surjective, comme dans le cas 3.

On a donc la définition de la racine carrée :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \exists! x \in \mathbb{R}_+, \quad y = x^2. \tag{9.11a}$$

On pose alors

$$\sqrt{y} = x. \tag{9.11b}$$

♢

On pourra tracer la parabole et illustrer le raisonnement en utilisant la remarque 9.13.

9.3. Ensembles finis et infinis

Supposons que E et F soient des ensembles de cardinaux finis, notés respectivement n et p.

Proposition 9.16.

(1) Il existe une surjection de E dans F ssi $p \leq n$.

(2) Il existe une injection de E dans F ssi $n \leq p$.

(3) Il existe une bijection de E dans F ssi $n = p$.

Proposition 9.17. *L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E et est de cardinal $card(F)^{card(E)}$.*

Proposition 9.18. *Un ensemble infini est un ensemble tel qu'une partie propre de cet ensemble (partie non vide et différente de l'ensemble lui-même) est en bijection avec l'ensemble lui-même. Un ensemble fini est un ensemble non infini !*

Définition 9.19. Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple 9.20. L'ensemble des entiers pairs, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Autrement dit $\mathbb{R}$ (de cardinal, dit de la puissance du continu) est un infini strictement "plus grand" que $\mathbb{N}$ (de cardinal, dit de la puissance du dénombrable).

9.4. Parties d'un ensemble

9.4.1. Application des applications à la définition des parties d'un ensemble

Exemple 9.21.

On souhaite reprendre l'exemple 8.7 pour la détermination de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. Traiter l'exercice de TD 8.3.

9.4.2. Programmation informatique de la définition des parties d'un ensemble

On pourra consulter la fonction `parties.m` et `demoparties.m`, disponibles sur le site habituel, qui permet d'énumérer les parties d'un ensemble, de trois façons différentes :

— En utilisant la fonction `nchoosek` ;

— En faisant un calcul par récurrence, présenté dans l'exercice de TD 8.1 ;

— Avec le calcul en binaire, présenté dans l'exercice de TD 8.3 ;

On renvoie aussi à la section 2.6 des TP.

9.5. Applications définies par récurrence et récursivité

EXEMPLE 9.22. Donnons l'exemple de la fonction factorielle définie par récurrence de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \begin{cases} n(n-1)! & \text{si } n \geq 2, \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases} \tag{9.12}$$

que l'on peut améliorer de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \begin{cases} n(n-1)! & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{9.13}$$

On peut aussi dans ce cas parler de récursivité : la fonction ! s'appelle elle-même. Dans le cas où récurrence et récursivité sont possibles, essayer de favoriser la récurrence, sur le plan informatique. Voir `https://www.lri.fr/~hivert/COURS/CFA-L3/02-Recursivite.pdf`.

On peut aussi consulter l'exemple 8.8 page 58 et l'exercice de TD 8.1.

EXEMPLE 9.23. Un autre exemple de récursivité est le calcul de $\binom{n}{p}$ avec n, p entiers naturels non nuls avec la formule

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} & \text{si } p \geq 2 \text{ et } p \leq n-1, \\ 1 & \text{si } p = 1 \text{ ou } p = n. \end{cases}$$

EXEMPLE 9.24. Un dernier exemple est celui du pgcd : si a et b sont deux entiers, alors

$$\operatorname{pgcd}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } b = 0, \\ \operatorname{pgcd}(b, a \bmod b), & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

Voir par exemple `https://www.labri.fr/perso/betrema/deug/poly/euclide.html`.

REMARQUE 9.25. Naturellement, toute définition récurrenre est récursive. Réciproquement, on peut montrer que toute définition récursive est aussi récurrente ! Mais cette preuve n'est pas constructive !

Chapitre 10

Un peu de logique

Ce chapitre est inspiré de [Rid17].

10.1. Proposition et tables de vérités

En logique, on manipule des propositions ou assertions que l'on notera en général par la suite P et Q. Une proposition peut être vraie (V) ou fausse (F). Une proposition peut être définie sur un ensemble E et dépendre alors d'une variable $x \in E$. On la note alors $P(x)$.

Exemple 10.1. $P =$ "toute fonction dérivable est continue". Pour x réel, $P(x) =$ "$x^2 > 2$".

Définition 10.2. La négation de la proposition P est notée $\neg$ et définie par $\neg P$ est vraie si P est fausse et $\neg P$ est fausse si P est vraie.

Définition 10.3. Une proposition dépendant de P et de Q peut être définie par les valeurs de P et de Q selon les quatre cas : P fausse et Q fausse, P fausse et Q vraie, P vraie et Q fausse, P vraie et Q vraie.

Par exemple, la table de vérité de $P \vee Q$ est donnée par le tableau 10.2.

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Table 10.1. Table de vérité de la lois $\wedge$

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Table 10.2. Table de vérité de la lois $\vee$

Définition 10.4. Si P et Q sont des propositions, on définit deux nouvelles propositions :
— P et Q, notée $P \wedge Q$ qui est vraie ssi P et Q sont toutes les deux vraies.

— P ou Q, notée $P \vee Q$ qui est vraie ssi P est vraie ou Q est vraie.
Voir les tables de vérité 10.1 et 10.2.

Remarque 10.5. Le "ou" est noté de façon proche de l'union et le et est noté de façon proche de l'intersection.

Donnons une proposition proche de la proposition 8.14.

Proposition 10.6.

$$\neg(\neg P) = P, \quad \neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q), \quad \neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Elle pourrait se montrer en établissant les différentes tables de vérités à partir des tableaux 10.1 et 10.2 et en constant qu'elles sont égales. Par exemple, voir le tableau 10.3. ♢

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
V	V	V	F	F	F	F

Table 10.3. Table de vérité des lois $\neg(. \vee .)$ et $(\neg.) \wedge (\neg.)$

Remarque 10.7. Les "calculs" faits sur les propositions de ce chapitre sont parfois dit "booléens". P et Q sont appelés booléens. Ils ne peuvent prendre que deux valeurs vrai et faux.

10.2. Implication et équivalence

Définition 10.8. Si P et Q sont deux propositions, on définit une nouvelle proposition : $P \Longrightarrow Q$ qui est égale à $\neg P \vee Q$ est que l'on appelle P implique Q. Voir la table de vérité 10.4.

P	Q	$\neg P$	$P \Longrightarrow Q$
F	F	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
V	V	F	V

Table 10.4. Table de vérité de la lois $\Longrightarrow$

Remarque 10.9. On remarque dans le tableau 10.4 que les propositions "F implique F" et "F implique V" sont vraies !

Définition 10.10. Notons que $\neg(P \Longrightarrow Q)$ est égale à $P \wedge \neg Q$.

Démonstration. En effet, d'après la définition 10.8 et que l'on a vu, on a

$$\neg(P \Longrightarrow Q) = \neg(\neg P \vee Q) = \neg(\neg P) \wedge \neg Q = P \wedge \neg Q.$$

□

Définition 10.11. La proposition $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ est appelée équivalence de P et de Q et est notée $P \Longleftrightarrow Q$. Elle est égale à $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$. Voir la table de vérité 10.5.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

Table 10.5. Table de vérité de la lois $\Longleftrightarrow$

Remarque 10.12. On remarque dans la table 10.5 que $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie ssi P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, autrement dit si elles sont "égales".

Définition 10.13. On parle aussi de "ou exclusif", noté $\oplus$ défini par : La fonction $\oplus$ prend une valeur égale à 1 quand l'une ou l'autre des variables, à l'exclusion des 2 à la fois, prennent une valeur égale à 1.

P	Q	$P \oplus Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Table 10.6. Table de vérité de la lois $\oplus$

Voir la table de vérité 10.6. On peut remarquer que c'est la négation de la loi $\Longleftrightarrow$.

$\diamondsuit$

Exemple 10.14.

Énoncé

Définir les tables de vérités de toutes les définitions vues dans ce chapitre.

Corrigé

Voir les tables de vérités dans les tableaux 10.1, 10.2, 10.4, 10.5 et 10.6.

On pourra consulter le TP 2.1 page 18 dont la fonction créée a permis de définir ces tables automatiquement.

10.3. Quantificateurs

Définition 10.15. On appelle quantificateur universel le symbole $\forall$ qui signifie "quel que soit" ou "pour tout". On appelle quantificateur existentiel le symbole $\exists$ qui signifie "il existe".

On note $\exists!$ l'expression "il existe un unique".

Chapitre 11

Suites

Ce chapitre est en partie issu et adapté de [Jan22].

11.1. Introduction

On pourra consulter
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_(mathématiques)`

Nous verrons très peu de notions sur les suites, dont les définitions et propriétés et sont très nombreuses. Les résultats essentiels seront donnés pour la plupart sans preuve. Nous étudierons surtout les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique ainsi que les séries associées (voir sections 11.5 page 74 et 12.3 page 88).

11.2. Définitions

Une suite peut se voir comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou de façon abrégée (u_n). On peut définir une suite explicitement en fonction de n ou bien par récurrence par une relation du type $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction donnée. Les notions de croissance et de limite pour les fonctions demeurent.

Par exemple, (1.6) devient :

Définition 11.1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles, est convergente et a pour limite $l \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)\,, \tag{11.1}$$

et on écrira

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l. \tag{11.2}$$

Si la suite est à valeurs complexes, la définition (11.1) reste valable à condition de remplacer les valeurs absolues $|.|$ par des modules complexes, heureusement noté de la même façon $|.|$.

On a alors

Lemme 11.2. *Une suite (z_n) à valeur complexe converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent et dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} Re(z_n) + i \lim_{n\to+\infty} Im(z_n). \tag{11.3}$$

L'équation (1.5) devient par exemple :

Définition 11.3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles, tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A \text{ (resp. } u_n \leq A))\,. \tag{11.4}$$

Remarque 11.4. Une suite à valeurs réelles qui tend vers $\pm\infty$ est dite convergente dans [1] $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Ainsi, une suite à valeurs réelles qui converge vers $l \in [-\infty, +\infty]$ sera dite convergente [2]

1. On parle de droite réelle numérique achevée, notée aussi parfois $\overline{\mathbb{R}}$.

2. De grands débats anime les hautes sphères (bornées) de l'Éducation Nationale pour tenter de dire qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente. Je préfère le point de vue de cette remarque, qui est aussi le point de vue adopté dans l'ouvrage de référence [RDO88], qui permet d'unifier tous les cas. Voir aussi la remarque 11.19 page 72 ou 12.16 page 91.

et on écrira dans tous les cas, la généralisation de (11.2)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in [-\infty, +\infty]. \tag{11.5}$$

Parfois par abus de langage, on dira néanmoins qu'une suite "diverge" vers $\pm\infty$.

Par exemple, les définitions (1.6) et (1.7) deviennent respectivement

Définition 11.5 (Monotonie au sens large). On dit que la suite (u_n) est
— croissante (ou : croissante au sens large) si pour tout entier n, on a $u_n \leq u_{n+1}$;
— décroissante (ou : décroissante au sens large) si pour tout entier n, on a $u_n \geq u_{n+1}$;
— monotone (ou : monotone au sens large) si elle est croissante ou décroissante.

Définition 11.6 (Monotonie au sens strict). On dit que la suite (u_n) est
— strictement croissante si pour tout entier n, on a $u_n < u_{n+1}$;
— strictement décroissante si pour tout entier n, on a $u_n > u_{n+1}$;
— strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Une propriété intéressante caractérise la continuité d'une fonction f en un point grâce aux limites : on peut remplacer la définition (1.2) par l'assertion suivante.

Proposition 11.7. *Une fonction est continue en un point x_0 de son ensemble (à l'intérieur) de définition I si et seulement si pour toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(x_0)$.*

Exemple 11.8. Traiter alors de nouveau l'exemple 1.1 page 2.

Définition 11.9. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles, est majorée (resp. minorée) ssi il existe une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$).

Définition 11.10. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles, est bornée si et elle majorée et minorée, ce qui revient à dire qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Définition 11.11. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs complexes, est bornée ssi il existe une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Toutes les définitions précédentes sont aussi valables "à partir d'un certain rang", ce qui ne change rien. On remplacera alors $n \in \mathbb{N}$ par $n \geq n_0$ où n_0 est un entier donné.

11.3. Propriétés élémentaires

Pour toute la suite, les suites sont supposées réelles, sauf cas contraires mentionnés.

Proposition 11.12.

(1) Si deux suites (à valeurs complexes) (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et l', alors les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n$ et (u_n/v_n) convergent respectivement vers $l + l'$, ll' et (si $l' \neq 0$) vers l/l'.

(2) Si la suite (u_n) tend $\pm\infty$, alors $(1/u_n)$ converge vers zéro, ce qu'on note

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0. \tag{11.6}$$

Si la suite (u_n) tend zero en étant strictement positive (resp. négative), alors $(1/u_n)$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce qu'on note

$$\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty. \tag{11.7}$$

(3) Si la suite (u_n) tend $\pm\infty$ et si la suite (v_n) est bornée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $\pm\infty$.

Remarque 11.13. Attention aux "formes indéterminées" $0/0$, $\infty - \infty$ et ∞/∞.

LEMME 11.14. *Une suite convergente est bornée.*

THÉORÈME 11.15 (Théorème des gendarmes). *Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \leq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si les deux suites (u_n) et (w_n) convergent vers $l \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers l.*

REMARQUE 11.16. Si (u_n) (resp. (v_n)) tend vers $+\infty$, alors l'inégalité $u_n \leq w_n$ (resp. $w_n \leq v_n$) implique que (w_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

PROPOSITION 11.17. *Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \leq n_0$, $u_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et l' alors $l \leq l'$.*

Le théorème suivant est la version correspondant aux suite de la proposition 1.9 page 6.

THÉORÈME 11.18 (Théorème de la limite monotone). *Une suite croissante (resp. décroissante) vérifie l'une des deux assertions suivantes :*

(1) Soit, elle n'est pas majorée (resp. minorée) et elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(2) Soit elle majorée (resp. minorée). Dans, ce cas, elle converge.

REMARQUE 11.19. En reprenant la remarque 11.4 page 70, on peut unifier les deux cas du théorème 11.18, en disant qu'une suite croissante (resp. décroissante) est toujours majorée (resp. minorée) dans $]-\infty, +\infty]$ (resp. $[-\infty, +\infty[$) et que dans tous les cas, on a (11.5).

PROPOSITION 11.20 (Suites adjacentes). *Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ssi (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(u_n - v_n)$ converge vers 0. Dans ce cas-là, elles convergent toutes les deux vers la même limite.*

On pourra traiter les exercices de TD 11.1 et 11.2 ainsi que 11.9.

11.4. Suites de références

DÉFINITION 11.21. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, la suite (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que

(1) la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) et on note

$$u_n = O(v_n), \tag{11.8}$$

ssi la suite (u_n/v_n) est bornée ;

(2) la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) et on note

$$u_n = o(v_n), \tag{11.9}$$

ssi la suite (u_n/v_n) converge vers 0 ;

(3) la suite (u_n) est équivalente (v_n) et on note

$$u_n \sim v_n, \tag{11.10}$$

ssi la suite (u_n/v_n) converge vers 1.

DÉFINITION 11.22. On peut également adopter des définitions équivalentes, mêmes lorsque les suites s'annulent. On suppose qu'existe une suite (ε_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \varepsilon_n v_n \tag{11.11a}$$

avec

$$(\varepsilon_n) \text{ bornée dans le cas 1 de la définition 11.21 ;} \tag{11.11b}$$
$$(\varepsilon_n) \text{ convergeant vers 0 dans le cas 2 de la définition 11.21 ;} \tag{11.11c}$$
$$(\varepsilon_n) \text{ convergeant vers 1 dans le cas 3 de la définition 11.21.} \tag{11.11d}$$

Remarque 11.23. La définition (11.9) ou (11.11c) est identique à celle introduite dans les développements limités (voir section 1.4 page 9).

Proposition 11.24.
On a

$$u_n = o(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0, \tag{11.12a}$$
$$\textit{si } a_n \sim b_n \textit{ et } c_n \sim d_n, \textit{ alors } a_n c_n \sim b_n d_n \textit{ et } a_n/c_n \sim b_n/d_n \textit{ ;} \tag{11.12b}$$
$$\textit{si } u_n \sim v_n \textit{ et si } (u_n) \textit{ converge vers } l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \textit{ alors } (u_n) \textit{ converge vers } l \textit{ ;} \tag{11.12c}$$
$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n), \tag{11.12d}$$
$$\textit{si } u_n = o(v_n) \textit{ et si } v_n = o(w_n) \textit{ alors } u_n = o(w_n) \textit{ ;} \tag{11.12e}$$
$$\textit{si } u_n = O(v_n) \textit{ et si } v_n = O(w_n) \textit{ alors } u_n = O(w_n). \tag{11.12f}$$

On dispose de cinq types de suites de références :

Définition 11.25.
— Les suites logarithmiques de la forme $\ln^\alpha n$ où α est une constante strictement positive ;
— Les suites puissance de la forme n^β où β est une constante strictement positive ;
— Les suites exponentielles de la forme γ^n où γ est une constante strictement positive ;
— La suite factorielle : la suite $n!$;
— dernier type : la suite n^n.

Proposition 11.26. *On dispose des relations de comparaison au sein de chaque type*

$$\forall 0 \le \alpha < \alpha', \quad \ln^\alpha n = o\left(\ln^{\alpha'} n\right) ; \tag{11.13a}$$
$$\forall 0 \le \beta < \beta', \quad n^\beta = o\left(n^{\beta'}\right) ; \tag{11.13b}$$
$$\forall 0 \le \gamma < \gamma', \quad \gamma^n = o\left(\gamma'^n\right). \tag{11.13c}$$

Proposition 11.27. *On dispose des relations de comparaison entre les différents types :*

$$\forall \alpha \ge 0, \quad \forall \beta > 0, \quad \ln^\alpha n = o\left(n^\beta\right) ; \tag{11.14a}$$
$$\forall \beta \ge 0, \quad \forall \gamma > 1, \quad n^\beta = o\left(\gamma^n\right) ; \tag{11.14b}$$
$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma^n = o\left(n!\right) ; \tag{11.14c}$$
$$n! = o\left(n^n\right). \tag{11.14d}$$

Voir les exercices de TD 11.3, 11.4, 11.5 11.6, 11.7, 11.8, et éventuellement 11.10 et 11.11.
On montrera tous ces résultats dans la section Q.5 page 249.

11.5. Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique

11.5.1. Suites arithmétiques

On donne la définition suivante :

Définition 11.28 (Suite arithmétique). Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r, \tag{11.15}$$

et la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$.

On a alors

Proposition 11.29 (Suite arithmétique). *On a, pour une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr. \tag{11.16}$$

Démonstration.
Donnons deux preuves.

(1) On a, d'après (11.15)

$$u_1 = u_0 + r,$$

puis

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r,$$

puis

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r,$$

et ... ainsi de suite.

(2) Plus rigoureusement, on peut aussi démontrer (11.16) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, (11.16) est immédiat. Soit n un entier ; supposons (11.16) vraie pour l'entier n. Démontrons-la au rang $n + 1$. D'après (11.16) au rang n et (11.15), on a

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r,$$

ce qui est exactement (11.16) au rang $n + 1$.

□

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 11.30 (Somme des premiers termes d'une suite arithmétique). *On a, pour une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n + 1)u_0 + \frac{rn(n + 1)}{2}. \tag{11.17}$$

Parfois, on écrit cela sous la forme plus facile à retenir

Proposition 11.31 (Somme des premiers termes d'une suite arithmétique (variante)). *On a, pour une suite arithmétique (u_n) : pour tout n*

$$\textit{Somme des premiers termes} = \frac{1}{2}\,(\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}) \times \textit{nombre de termes}. \tag{11.18}$$

Démonstration. Admettons provisoirement la proposition 11.30. On a alors, d'après (11.16) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes} &= \frac{1}{2}\,(u_0 + u_n) \times (n+1),\\ &= \frac{1}{2}\,(u_0 + u_0 + nr) \times (n+1),\\ &= \frac{1}{2}\,(2u_0 + nr)\,(n+1),\\ &= u_0(n+1) + \frac{rn(n+1)}{2},\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat, compte tenu de (11.17). □

Montrons le résultat suivant

Lemme 11.32. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la somme*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k, \tag{11.19}$$

des n premiers entiers est égale à

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{11.20}$$

Remarque 11.33. Notons que l'on aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k. \tag{11.21}$$

Nous en proposons plusieurs preuves.

Démonstration du lemme 11.32.

(1)

Donnons une première preuve, "graphique".

Sur la figure 11.1, issue du site `http://www.mathkang.org` [3], on constate que le rectangle, de cotés n et $n+1$, contient deux fois la somme S_n. Il vient donc

$$2S_n = n(n+1).$$

et donc (11.20) est "montrée".

Montrons maintenant cela rigoureusement.

(2)

On peut, démontrer cette formule par récurrence sur n, mais cela ne permet pas de retrouver la formule. Démontrons-là tout de même. Pour $n = 1$, (11.20) est immédiate car $S_1 = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Supposons (11.20) vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons-là pour $n+1$. On a successivement

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k,\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1,\end{aligned}$$

3. voir `http://www.mathkang.org/concours/pdf/Affiche_Sommes_entiers.pdf`

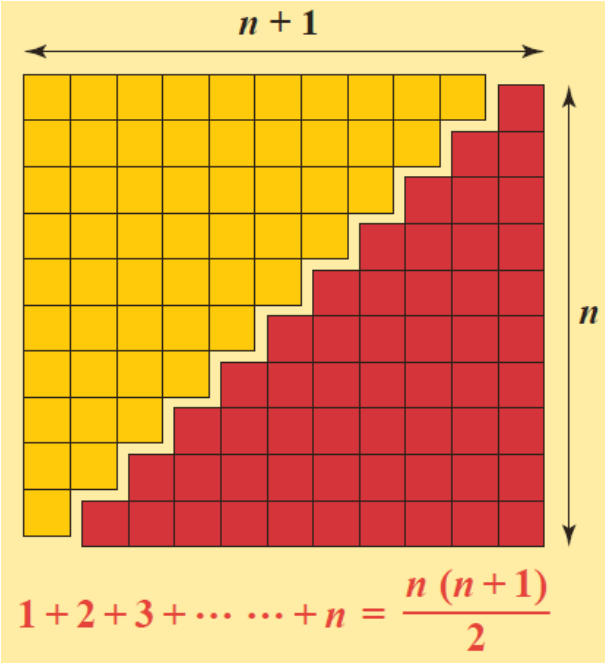


FIGURE 11.1. Somme des n premiers entiers.

et d'après l'hypothèse de récurrence ((11.20) à l'ordre n)

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1, \\ &= \frac{1}{2}\left(n(n+1) + 2(n+1)\right), \\ &= \frac{n+1}{2}\left(n+2\right)), \end{aligned}$$

ce qui est bien (11.20) à l'ordre $n+1$.

(3)

On peut écrire aussi, ce qu'a fait le petit Gauss à cinq ans (et qui est un fait fondé implicitement sur la méthode du point 1) :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n, \\ S_n &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 1, \end{aligned}$$

et en sommant terme à terme :

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1+n) + (2+n-1) + \ldots + (n-1+2) + (n+1), \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes égaux à } n+1}, \\ &= n(n+1), \end{aligned}$$

et on retrouve (11.20).

(4)

Pour être un tout petit plus rigoureux, on peut aussi écrire (ce qui n'est qu'une formalisation de la méthode du point 3) :

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k,$$

dans la seconde somme, on pose $k' = n - k + 1$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k'=n}^{1} n - k' + 1, \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n - k + 1, \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k + n - k + 1), \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n + 1), \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{n} 1, \\
&= (n+1)n.
\end{aligned}$$

(5)

Donnons, pour finir, deux autres méthodes qui ont l'avantage de pouvoir se généraliser au calcul de

$$S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p, \tag{11.22}$$

pour tout entier p.

(a) Présentons tout d'abord le principe général des deux méthodes pour le calcul de S_n^p.

(i) Soit, on cherche P un polynôme de degré $Q+1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k+1) - P(k) = k^Q. \tag{11.23}$$

On montre que cela mène à un système linéaire triangulaire donnant les tous les coefficients de P sauf le coefficient constant que l'on peut prendre nul. Sommant (11.23) pour $k = 0$ à $k = n$, il vient par somme télescopique

$$P(n+1) - P(0) = \sum_{k=0}^{n} k^Q = \sum_{k=1}^{n} k^Q,$$

ce qui permet d'expliciter, après factorisation, la somme souhaitée.

(ii) Soit, on écrit par somme téléscopique

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{Q+1} - k^{Q+1} = (n+1)^{Q+1} - 1.$$

On développe le terme de gauche [4] :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{Q+1} C_{Q+1}^{l} k^l - k^{Q+1} = (n+1)^{Q+1} - 1,$$

4. Attention, je note "à l'ancienne" C_{Q+1}^{l} au lieu de $\binom{Q+1}{l}$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l}k^{l} + k^{Q+1} - k^{Q+1} = (n+1)^{Q+1} - 1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l}k^{l} = (n+1)^{Q+1} - 1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l}\sum_{k=1}^{n} k^{l} = (n+1)^{Q+1} - 1.$$

On a donc

$$C_{Q+1}^{Q}\sum_{k=1}^{n} k^{Q} = -\sum_{l=0}^{Q-1} C_{Q+1}^{l}\sum_{k=1}^{n} k^{l} + (n+1)^{Q+1} - 1. \tag{11.24}$$

On utilise (11.24) pour $Q = 1$, ce qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{n} k$, puis (11.24) pour $Q = 2$, ce qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$, en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on calcule $\sum_{k=1}^{n} k^Q$, en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^{Q-1}$, $\sum_{k=1}^{n} k^{Q-2}$, ..., $\sum_{k=1}^{n} k$.

Remarque 11.34. La somme peut s'expliciter totalement, d'après par exemple avec la Formule de Faulhaber. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Faulhaber`. Mieux, cette somme s'explicite totalement grâce aux polynômes de Bernoulli. Voir par exemple [Bas22b, Annexe "Quelques calculs explicites de Séries"].

Remarque 11.35. On peut montrer en utilisant le calcul présenté dans le point 5a page précédente dans les cas particuliers $Q = 2$ et $Q = 3$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{11.25a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{11.25b}$$

Voir les exercices de TD 11.12 et 11.13.

(b) Détaillons maintenant les deux méthodes du point 5a page précédente, cela dans le cas où $Q = 1$.

(i) On cherche P un polynôme de degré 2 tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k+1) - P(k) = k. \tag{11.26}$$

Si on pose

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

alors, pour tout entier k :

$$\begin{aligned} P(k+1) - P(k) &= a(k+1)^2 + b(k+1) + c - ak^2 - bk - c, \\ &= ak^2 + 2ak + a + bk + b + c - ak^2 - bk - c, \\ &= 2ak + a + b, \end{aligned}$$

et donc (11.26) est équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2ak + a + b = k$$

soit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k(2a-1) + a + b = 0.$$

Le polynôme en k : $k(2a-1)+a+b$ a une infinité de racine et il est nul ce qui est donc équivalent au système linéaire triangulaire suivant

$$\begin{cases} 2a-1=0, \\ a+b=0 \end{cases}$$

ce qui donne $a = 1/2$ puis $b = -a = -1/2$. c n'étant pas déterminé, on le choisit nul et on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k) = \frac{k}{2}(k-1). \tag{11.27}$$

Sommant (11.26) pour $k = 0$ à $k = n$, il vient par somme télescopique

$$P(n+1) - P(0) = \sum_{k=0}^{n} k^Q = \sum_{k=1}^{n} k,$$

et donc, d'après (11.27) :

$$\frac{n+1}{2}(n+1-1) = \sum_{k=1}^{n} k,$$

ce qui est bien (11.20)

(ii) On écrit par somme téléscopique

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2 - 1.$$

On développe le terme de gauche :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2 = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 1 = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2S_n + n = (n+1)^2 - 1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - n\right), \\ &= \frac{n+1}{2}(n+1-1), \\ &= \frac{n+1}{2}(n), \end{aligned}$$

ce qui est bien de nouveau (11.20)

□

Venons-en maintenant à ce qui nous motive :

Démonstration de la proposition 11.30. On a d'après (11.16)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_0 + kr,\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_0\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} kr\right),\\ &= u_0\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) + r\left(\sum_{k=0}^{n} k\right),\\ &= u_0(n+1) + r\left(\sum_{k=0}^{n} k\right),\end{aligned}$$

et d'après (11.19) et (11.20)

$$= u_0(n+1) + r\frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui est bien (11.17). □

On a très facilement le résultat suivant

Proposition 11.36 (Limite d'une suite arithmétique). *Une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 ne converge que si $r = 0$, auquel cas, sa limite (et sa valeur constante) vaut u_0. Sinon, elle tend vers $+\infty \times signe(r)$.*

11.5.2. Suites géométriques

On donne la définition suivante :

Définition 11.37 (Suite géométrique). Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n \tag{11.28}$$

et la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$.

On a alors

Proposition 11.38 (Suite géométrique). *On a, pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0, \tag{11.29}$$

en prenant ici pour convention

$$0^0 = 1. \tag{11.30}$$

Démonstration.
Donnons deux preuves.

(1) On a, d'après (11.28)

$$u_1 = u_0 q,$$

puis

$$u_2 = u_1 q = u_0 qq = u_0 q^2$$

puis

$$u_3 = u_2 q = u_0 qq^2 = u_0 q^3$$

et ... ainsi de suite.

(2) Plus rigoureusement, on peut aussi démontrer (11.29) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, (11.29) est immédiat (en utilisant éventuellement la convention (11.30)). Soit n un entier ; supposons (11.29) vraie pour l'entier n. Démontrons-la au rang $n+1$. D'après (11.29) au rang n et (11.28), on a

$$u_{n+1} = u_n q = u_0 q^n q = u_0 q^{n+1}$$

ce qui est exactement (11.29) au rang $n+1$.

□

PROPOSITION 11.39 (Somme des premiers termes d'une suite géométrique). *On a, pour une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0(n+1), & \text{si } q = 1, \\ u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, & \text{si } q \neq 1. \end{cases} \tag{11.31}$$

Montrons le résultat suivant

LEMME 11.40. *Pour toute la suite, on fait la convention* (11.30)*. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, la somme*

$$S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \tag{11.32}$$

est égale à

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1, \\ n+1, & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{11.33}$$

Nous en proposons plusieurs preuves.

DÉMONSTRATION.

(1) • Si $x = 1$, il est immédiat que $S_n = n+1$ ($n+1$ termes égaux à 1).
• Sinon, on a

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + x^2 + ... + x^n, \\ xS_n &= x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1}, \end{aligned}$$

et par différence, tous les termes x, x^2, ... à x^n disparaissant :

$$xS_n - S_n = x^{n+1} - 1,$$

dont on déduit (11.33).

(2) Une autre façon de faire, presque équivalente en fait, dans le cas où $x \neq 1$, consiste à utiliser la formule

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

$$a^p - b^p = (a-b)\left(a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + ... + a^2 b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1}\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k\right). \tag{11.34}$$

Elle se montre en développant le terme de droite, qui se simplifie de nouveau, par somme télescopique :

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right) &= a\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right) - b\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right),\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^{k+1},\\ &= a^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - b^p - \sum_{k=0}^{p-2} a^{p-1-k}b^{k+1},\\ &= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=0}^{p-2} a^{p-1-k}b^{k+1},\end{aligned}$$

on pose $k' = k+1$ dans la seconde somme :

$$= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k'=1}^{p-1} a^{p-k'}b^{k'},$$

dans la seconde somme, on peut remplacer l'indice muet k' par k :

$$\begin{aligned}&= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k,\\ &= a^p - b^p.\end{aligned}$$

On applique enfin (11.34) à $p = n+1$, $a = 1$ et $b = x \neq 1$, ce qui donne

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right),$$

et ce qui permet de conclure.

(3) Enfin, dans le cas où $x \neq 1$, on peut aussi raisonner par récurrence, ce qui exige de connaître la formule à l'avance. Pour $n = 0$, on a $(x^{n+1}-1)/(x-1) = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} x^k = 1$ et (11.33) est vraie. Supposons maintenant (11.33) vraie pour un entier n. Montrons-là pour $n+1$. On a successivement

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k,\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1},\end{aligned}$$

et d'après la formule de récurrence ((11.33) pour n) :

$$\begin{aligned}&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1},\\ &= \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1} - 1 + (x-1)x^{n+1}\right),\\ &= \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}\right),\\ &= \frac{x^{n+2}-1}{x-1},\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

□

Venons-en maintenant à ce qui nous motive :

Démonstration de la proposition 11.39. On a, d'après (11.32) et (11.33)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k,\\ &= \begin{cases} u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{x-1}, & \text{si } q \neq 1,\\ u_0(n+1), & \text{si } q = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

□

On a finalement a très facilement le résultat suivant

Proposition 11.41 (Limite d'une suite géométrique). *Soit (u_n), une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

(1) Si $u_0 = 0$, tous les u_n sont nuls et la limite de (u_n) est nulle.

(2) Si $u_0 \neq 0$, on a alors :

(a) Si $q > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \times \mathit{signe}(u_0). \tag{11.35}$$

(b) Si $q \in]-1, 1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0. \tag{11.36}$$

(c) Si $q = 1$, $u_n = u_0$ et la suite (u_n) tend vers u_0.

(d) Si $q = -1$, $u_n = u_0(-1)^n$ et la suite (u_n) ne converge pas.

(e) Si $q < -1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty, \tag{11.37}$$

et

$$\mathit{signe}(u_n) = \mathit{signe}(u_0)(-1)^n, \tag{11.38}$$

et la suite (u_n) ne converge pas.

Donnons d'abord le lemme suivant

Lemme 11.42 (Limite d'une suite géométrique (cas particulier)). *Si $q > 1$ et si $u_0 \neq 0$, on a alors* (11.35).

Démonstration. On écrit en effet, d'après la formule du binôme de Newton, avec $r = 1 + \eta$ où $\eta > 0$:

$$\begin{aligned} r^n &= (1+\eta)^n,\\ &= 1 + n\eta + \binom{1}{n}\eta^2 + \binom{1}{n}\eta^3 + ... + \binom{n-1}{n}\eta^{n-1} + \eta^n,\\ &\geq 1 + n\eta \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$$

dont on déduit (11.35). □

Démonstration de la proposition 11.41.

(1) Le cas (1) est immédiat.

(2) (a) Le cas 2a n'est que le lemme 11.42.

(b) Dans le cas 2b, on écrit alors si $r = 0$, $u_n = 0$ et (11.36) est immédiat. Sinon, on écrit

$$|u_n| = |u_0||q|^n$$

et donc

$$|u_n| = \frac{|u_0|}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} \tag{11.39}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0,$$

puisque d'après le cas 2a,

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty.$$

(c) Le cas 2c est immédiat.

(d) Le cas 2d est immédiat.

(e) Dans le cas 2e, on a d'après (11.39) et le cas 2a, on a immédiatement (11.37) et (11.38) et la divergence de la suite (u_n).

□

11.5.3. Suites arithmético-géométriques

On donne :

Définition 11.43. La suite arithmético-géométrique est définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b. \tag{11.40}$$

On a alors

Lemme 11.44. *L'expression du terme général de la suite arithmético-géométrique u_n est donnée par : si $a = 1$:*

$$u_n = u_0 + nb, \tag{11.41}$$

et si $a \neq 1$

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}. \tag{11.42}$$

Démonstration. Si $a = 1$, le résultat est immédiat, car c'est une suite aritmétique, déjà connue. Sinon, $a \neq 1$ et on cherche à déterminer un nombre x tel que

$$x = ax + b, \tag{11.43}$$

et on a alors

$$x = \frac{b}{1-a}. \tag{11.44}$$

En faisant la différence entre (11.43) et (11.40), on a

$$u_{n+1} - x = a(u_n - x),$$

et donc la suite $u_n - x$ est une suite géométrique de raison a vérifiant

$$u_n - x = a^n(u_0 - x)$$

donnée donc par

$$u_n = a^n(u_0 - x) + x. \tag{11.45}$$

soit encore le résultat annoncé. □

Donnons le lemme suivant :

LEMME 11.45. *L'expression de la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmético-géométrique u_n est donnée par : (pour $a \neq 1$) :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + (n+1)\frac{b}{1-a}. \tag{11.46}$$

DÉMONSTRATION. On peut, en effet, supposer $a \neq 1$, sinon la somme est déjà connue. D'après (11.45), on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - x)\sum_{k=0}^{n} a^k + (n+1)x = (u_0 - x)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + (n+1)x.$$

et donc d'après (11.44), on a (11.46)

□

On a enfin

PROPOSITION 11.46 (Limite d'une suite arithmético-géométrique). *Soit u_n une suite arithmético-géométrique définie par* (11.40) *avec $a \neq 1$.*

(1) Si $a \in]-1, 1[$, on a

$$\lim_{n+\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

(2) Sinon :

(a) Si

$$u_0 = \frac{b}{1-a}$$

alors

$$\lim_{n+\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

(b) Si

$$u_0 \neq \frac{b}{1-a},$$

(i) Si $a > 1$,

$$\lim_{n+\to+\infty} u_n = +\infty \times \mathit{signe}\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

(ii) Si $a \leq -1$, la suite u_n ne converge pas.

DÉMONSTRATION. La preuve, fondée sur (11.42), est laissée au lecteur. □

On pourra consulter la section 11.7.3 page suivante.
Voir aussi l'exercice de TD 11.15.

11.6. Résolution d'équation non linéaire

Voir section 11.7.1.

11.7. Applications des suites

11.7.1. Résolution d'équation non linéaire

Ces suites sont du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où u_0 est donnée et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On renvoie à feu [DB21, chapitre intitulé "Équations non-linéaires", section "Méthode de point fixe"] ou par exemple [DB21, annexe intitulée "Étude et calcul de l tel que $l = \cos l$ sous la forme d'un problème corrigé"].

On pourra traiter les exercices de TD 11.1 et 11.2.

11.7.2. Approximation de π

Voir l'annexe M page 190 et les exercices de TD 11.16, 11.17 et 11.18.

11.7.3. Application des suites arithmético-géométriques : les emprunts bancaires

Voir l'annexe O page 228 et l'exercice de TD 11.19.

Chapitre 12

Séries

Ce chapitre est en partie issu et adapté (et simplifié) de [Jan22].

12.1. Introduction

Nous verrons très peu de notions sur les série, dont les définitions et propriétés et sont très nombreuses. Les résultats essentiels seront donnés pour la plupart sans preuve. Nous étudierons surtout les séries associées aux suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique (voir section 12.3 page suivante).

Exemple 12.1. Calculer les nombres suivants : 0.333..., 0.999...., 0.123123123... ou pour un réel q donné, la "somme" $1 + q + q^2 + q^3 + ...$

On pourra consulter la correction des exercices de TD 12.3 et 12.4.

Ces calculs seront justifiés dans l'exemple 12.10.

De façon informelle, pour calculer la somme $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$, on raisonne comme dans la correction des exercices de TD 12.3 et 12.4 : on écrit

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ...,$$

et donc

$$qS = q + q^2 + q^3 + q^4 + ...,$$

et par différence (toute la somme $q + q^2 + q^3 + q^4 + ...$ disparaît)

$$S - qS = 1,$$

et donc, pour $q \neq 1$,

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

$\diamondsuit$

12.2. Définition et propriétés de base

La notion de série généralise la notion de somme. D'après la définition 11.1 page 70, on peut écrire

Définition 12.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que la série de terme général u_n notée $\sum u_n$ est convergente ssi la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \tag{12.1}$$

est convergente vers un nombre S. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = S \tag{12.2}$$

et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S, \tag{12.3}$$

nombre que l'on appelle la somme de la série. Dans le cas d'une série $\sum u_n$ convergente, on appelle le reste d'ordre n de la série, la quantité définie par

$$R_n = S - S_n, \tag{12.4}$$

qui vaut aussi

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k. \tag{12.5}$$

Dire qu'une série $\sum u_n$ est convergente revient donc aussi à dire que la suite (R_n) est définie et converge vers zéro.

REMARQUE 12.3. On pourra aussi s'intéresser à des séries associées à des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ voire pour un entier n_0 donné $(u_n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}$. Les sommes associées seront alors

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ou

$$S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$$

REMARQUE 12.4. Une série n'est rien d'autre qu'une suite particulière et tout ce qu'on sait sur les suites s'applique aux série. Néanmoins, des résultats particuliers seront proposés dans l'étude des séries.

On a la proposition immédiate :

PROPOSITION 12.5. *Si une série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) tend vers zéro. Par contraposition, si la suite (u_n) ne tend pas vers zéro, alors la série $\sum u_n$ ne converge pas.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire, en utilisant les notations habituelles de la définition 12.2 : pour $n \geq 1$:

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k,$$

et donc

$$\forall n \geq 1, \quad S_n - S_{n-1} = u_n. \tag{12.6}$$

Si on passe à la limite n tendant vers l'infini, (12.2) nous montre que la suite (u_n) converge, de limite $l-l = 0$. □

DÉFINITION 12.6. Dans le cadre de la remarque 12.5, une série dont le terme général ne tend pas vers zéro est dite grossièrement divergente.

Dans quelques rares cas, on pourra étudier directement une série $\sum u_n$ en étudiant la suite des termes partielles ou en utilisant la propriété 12.5, comme dans la section 12.3. Voir aussi les exercices de TD 12.1 et 12.2.

12.3. Séries associées aux suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique

Nous allons considérer, dans cette section, la suite (u_n) définie respectivement comme étant arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique (voir section 11.5) et étudier le comportement, en terme de convergence, de la série associée $\sum u_n$.

12.3.1. Séries associées aux suites arithmétiques

Ce cas-là, mis pour mémoire, n'est en réalité que peu pertinent.
On a la proposition suivante :

PROPOSITION 12.7 (Série arithmétique).
La série associée à la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 ne converge que si r et u_0 sont nuls, auquel cas, la somme de la série est nulle.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la proposition 11.36 page 80 qui dit qu'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 ne converge vers zéro que si r et u_0 sont nuls. Dans ce cas, u_n est toujours nul. Dans ce cas, la somme de la série est nulle. Dans les autres cas, la série ne peut converger d'après la proposition 12.5. □

12.3.2. Séries associées aux suites géométriques

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 12.8 (Série géométrique).
La série associée à la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 ne converge que dans l'un des deux cas suivants :

- *soit u_0 est nul*
- *soit u_0 est non nul et q appartient à $]-1,1[$.*

La somme vaut alors

- *zéro dans le premier cas*
- *$u_0/(1-q)$ dans le second cas.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la proposition 11.39 page 81. Le cas u_0 nul étant immédiat, on suppose que u_0 est non nul. D'après (11.31), pour $q = 1$, la série diverge. Sinon, la série ne converge, d'après (11.31), que si la suite q^{n+1} converge. D'après la proposition 11.41, cela n'a lieu que si q appartient à $]-1,1[$. Dans ce cas, q^{n+1} et, d'après (11.39), la somme vaut $u_0/(1-q)$. □

Notons le cas particulier suivant (qui vient du cas $u_0 = 1$) :

PROPOSITION 12.9 (Série géométrique (cas particulier)). *Si $q \in]-1,1[$, on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \tag{12.7}$$

Voir aussi les exercices de TD 12.3, 12.4 12.5 et 12.6.

EXEMPLE 12.10. Reprendre alors l'exemple informel 12.1.

12.3.3. Séries associées aux suites arithmético-géométriques

Ce cas-là, mis pour mémoire, n'est en réalité que peu pertinent.
On a le résultat suivant :

PROPOSITION 12.11 (Série arithmético-géométrique).
La série associée à la suite arithmético-géométrique définie par (11.40) *(avec $a \neq 1$) et de premier terme u_0 (ou par* (11.42)*) ne converge que dans l'un des deux cas suivants :*

- *soit a appartient à $]-1,1|$ et $b = 0$*
- *soit u_0 et b sont nuls.*

La somme vaut alors

- *$u_0/(1-a)$ dans le premier cas*

- *zéro dans le second cas.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 11.46, la suite arithmético-géométrique (avec $a \neq 1$) ne tend vers zéro que si $a \in]-1, 1[$ et $b = 0$ ou u_0 et b sont nuls. On utilise alors la proposition 12.5. La fin est immédiate et laissée au lecteur. □

REMARQUE 12.12. Cela n'est pertinent, car la série ne converge que dans le cas $b = 0$, on a en fait une série géométrique et on retrouve les conclusions de la proposition 12.8.

Dans la plupart des cas, on pourra étudier une série sans étudier la suite des termes partielles mais en utilisant des régles plus générales comme ce qui suit.

12.4. Séries à termes positifs

PROPOSITION 12.13. *Soit une série de terme général u_n, à valeurs rélles et positives.*
On a alors l'une des deux assertions suivantes :

(1) Soit la suite de terme général (S_n) (définie par (12.1)) est majorée et dans ce cas, la série $\sum u_n$ est convergente.

(2) Soit la suite de terme général (S_n) n'est pas majorée et dans ce cas, la série $\sum u_n$ tend vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème 11.18, appliqué à la suite de terme général (S_n), qui est croissante, d'après (12.6). □

REMARQUE 12.14. En reprenant la remarque 11.4, on peut dire qu'une série à termes positifs est toujours convergente dans $[0, +\infty]$. Cela permet d'écrire, comme dans (11.5) dans tous les cas :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in [0, +\infty]. \tag{12.8}$$

Pour une série à termes négatifs, on remplace $+\infty$ par $-\infty$ et $[0, +\infty]$ par $[-\infty, 0]$.

On déduit immédiatement de la proposition 12.13 :

PROPOSITION 12.15. *Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs vérifiant pour tout*[1] *n :*

$$u_n \leq v_n. \tag{12.9}$$

(1) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k. \tag{12.10}$$

(2) Si la série $\sum u_n$ tend vers l'infini, alors la série $\sum v_n$ tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, d'après (12.9), on a

$$\forall n, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k. \tag{12.11}$$

(1) Si la série $\sum v_n$ converge, on est dans le cas 1 de la proposition 12.13 et il existe une constante K telle que

$$\forall n, \quad \sum_{k=0}^{n} v_k \leq K$$

et, d'après (12.11), on a

$$\forall n, \quad \sum_{k=0}^{n} v_k \leq K,$$

1. Que l'on peut remplacer, comme partout dans ce chapitre, par "à partir d'un certain rang".

et d'après le même cas 1 de la proposition 12.13, la série de terme général v_n converge. À la limite $n \to +\infty$ dans (12.11), on obtient, puisque chacune des limites existe, (12.10).

(2) Si, réciproquement, la série $\sum u_n$ tend vers l'infini, alors d'après le cas 2 de la proposition 12.13, la série des sommes partielles des v_n n'est pas majorée. D'après (12.11), il en est de même pour la série des sommes partielles des v_n. D'après le même cas 2 de la proposition 12.13, la série $\sum v_n$ tend vers l'infini.

□

Remarque 12.16. En reprenant la remarque 12.14, on écrira que l'inégalité (12.10) a lieu dans tous les cas avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in]-\infty, +\infty] \tag{12.12}$$

Pour une suite à termes négatifs, on remplace $+\infty$ par $-\infty$ et $]-\infty, +\infty]$ par $[-\infty, +\infty[$.

Proposition 12.17. *Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs vérifiant $u_n \sim v_n$. Alors les deux série sont de même nature (ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux tendant vers $+\infty$ ou bien toutes les deux convergentes dans $[-\infty, +\infty]$, en renvoyant à la remarque 12.16.*

Proposition 12.18. *Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs vérifiant $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$). Alors la convergence de la série de terme général v_n entraîne celle de terme général u_n.*

Exemple 12.19 (Série de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $1/n^\alpha$ (pour $n \geq 1$) est convergente (dans $\mathbb{R}$) ssi $\alpha > 1$. Cet exemple est admis.

Démonstration. Donnons-en une preuve partielle.

(1) Si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente.

(2) Si $\alpha = 1$, on parle de la série harmnonique. Montrons-en la divergence. On écrit, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2^{p-1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2^p - 1},$$

et en faisant des paquets de termes

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 + 1} + ... + \frac{1}{2^3 - 1}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{p-1}} + ... + \frac{1}{2^p - 1}\right),$$

on minore chaque terme de chaque somme par le plus petit :

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^3 - 1} + \frac{1}{2^3 - 1} + ... + \frac{1}{2^3 - 1}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^p - 1} + ... + \frac{1}{2^p - 1}\right),$$

on utilise le fait que dans chaque somme, il y a 2, puis 4 ... puis 2^p termes :

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2 \times \frac{1}{2^2 - 1} + 2^2 \times \frac{1}{2^3 - 1} + ... + (2^p - 1) \times \frac{1}{2^p - 1}, \\
&\geq 1 + 2 \times \frac{1}{2^2} + 2^2 \times \frac{1}{2^3} + ... + 2^p \times \frac{1}{2^p}, \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant qu'il y a en tout p sommes :

$$= \frac{p}{2}.$$

Si p tend vers l'infini, la somme $\sum_{k=1}^{2^{p-1}} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini ce qui permet de conclure.

(3) Pour $\alpha \in]0, 1[$, on a, pour tout n,

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n},$$

et on conclut grâce à la proposition 12.15 et le cas $\alpha = 1$.

(4) Pour $\alpha > 1$, voir preuve complète dans [RDO87, section 1.2.2.5)].

□

♢

12.5. Séries absolument convergentes

Notons que tout ce qui été vu dans la section 12.2 page 87 s'applique aussi aux série à termes complexes. Pour toute la suite, les séries sont supposées réelles, sauf cas contraires mentionnés.

Définition 12.20. Une série $\sum u_n$ à termes complexes est dite absolument convergente ssi la série à termes positif $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 12.21. *Toute série absolument convergente est convergent et*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|. \tag{12.13}$$

Remarque 12.22. La réciproque de la proposition 12.21 est fausse. Voir exemple 12.27. Une série convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente.

Remarque 12.23. On a donc le schéma d'étude suivant pour la série $\sum u_n$ à termes complexes

(1) la suite (u_n) ne tend pas vers zéro $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement

(2) la suite (u_n) tend vers zéro $\Longrightarrow$

   (a) La série $\sum u_n$ est absolument convergente $\Longrightarrow$ la série $\sum u_n$ est convergente.

   (b) La série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente $\Longrightarrow$ *Étude des différents cas particuliers.*

Proposition 12.24 (Crière de Riemann). *Soient α un réel strictement plus grand que 1 et une série $\sum u_n$ vérifiant $\lim_{n+\infty} n^\alpha u_n = 0$. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration. On a par définition $|u_n| = o(1/n^\alpha)$. D'après la proposition 12.19, la série de terme général $1/n^\alpha$ est convergente et, d'après la proposition 12.18, la série de terme général u_n est absolument convergent et donc convergente. □

♢

12.6. Séries alternées

Théorème 12.25 (Série alternée). *Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n|. \tag{12.14}$$

Une série alternée pour laquelle la suite $(|u_n|)$ tend vers zéro en décroissant est convergente. De plus, avec les notations habituelles, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq |u_{n+1}|, \tag{12.15a}$$

$$R_{2n+1} \geq 0 \text{ et } R_{2n} \leq 0. \tag{12.15b}$$

Les équations (12.15) *signifient en d'autres termes que*

Le reste de la série alternée a le signe du premier terme négligé

et une valeur absolue inférieure à celle du premier terme négligé. (12.16)

Remarque 12.26. On pourra bien sûr remplacer adapter le résultat de la proposition 12.25 dans le cas où $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$. Dans ce cas, (12.16) reste identique.

EXEMPLE 12.27 (Série de Riemann alternée). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $(-1)^{n+1}/n^\alpha$ (pour $n \geq 1$) est

(1) absolument convergente si $\alpha > 1$;

(2) semi-convergente si $\alpha \in]0, 1]$;

(3) grossièrement divergente si $\alpha \leq 0$.

DÉMONSTRATION. Notons $u_n = (-1)^{n+1}/n^\alpha$.

(1) Si $\alpha \leq 0$, on a, pour $\alpha = 0$, $|u_n| = 1$ et pour $\alpha < 0$, $|u_n| = n^{-\alpha}$ qui tendent respectivement vers 1 et $+\infty$. La suite de terme général u_n ne tend donc pas vers zéro.

(2) Si $\alpha > 1$, on a

$$|u_n| = \frac{1}{n^\alpha} \tag{12.17}$$

et d'après l'exemple 12.19, la série converge.

(3) Supposons maintenant que

$$\alpha \in]0, 1]. \tag{12.18}$$

Montrons que la série est semi-convergente .

(a) D'après (12.17), (12.18) et d'après l'exemple 12.19, la série de terme général $|u_n|$ diverge dans ce cas.

(b) Montrons que la série de terme général u_n vérifie les hypothèses de la proposition 12.25, ce qui assurera la convergene de la série.

(i) Par définition, c'est une serie alternée.

(ii) Montrons que la suite $|u_n|$ tend vers zéro en décroissant.

(A) D'après (12.17) et (12.18), la suite $|u_n|$ tend vers zéro.

(B) D'après (12.17) , on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

qui est strictement inférieur à 1 puisque $1 + \frac{1}{n} > 1$. Ainsi, la suite est décroissante.

□

EXEMPLE 12.28 (Série associée au logarithmique). On pourra consulter l'annexe R page 252, notamment la section R.4.2 page 270.

12.7. Séries de références

12.7.1. Séries de Riemann

Voir l'exemple 12.19.

12.7.2. Séries géométriques

Voir la section 12.3.2.

12.7.3. Séries exponentielles et trigonométriques

Le développement limité usuel de l'exponentielle, du sinus et du cosinus de l'annexe A ne permettent pas de passer à la limite $n \to +\infty$ mais on peut montrer les formules suivantes :

PROPOSITION 12.29. *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \tag{12.19a}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{12.19b}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{12.19c}$$

Ces série peuvent même se définir en fait dans $\mathbb{C}$. Voir par exemple [Bas22b, Chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"].

Pour démontrer cette proposition, on aura besoin du lemme suivant :

LEMME 12.30 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ *tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a. \tag{12.20}$$

(1) Si $a < 1$ *alors la série de terme général* u_n *converge.*

(2) Si $a > 1$ *alors la série de terme général* u_n *diverge.*

(3) Si $a = 1$*, on ne peut pas conclure.*

DÉMONSTRATION.

(1) Supposons par exemple que $a \in [0, 1[$. Puisque u_{n+1}/u_n tend vers a, on sait que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| \leq \varepsilon$$

et donc en particulier

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a + \varepsilon.$$

Puisque $a < 1$, on peut choisir ε tel que $l = a + \varepsilon < 1$. Il existe donc N tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l. \tag{12.21}$$

Soient N et M tel que $M \geq N + 1$. Par multiplications successives de toutes les inégalités (12.21) de $n = N$ jusqu'à $n = M - 1$, on obtient

$$\forall M \geq N+1, \quad \frac{u_M}{u_{M-1}} \frac{u_{M-1}}{u_{M-2}} \frac{u_{M-2}}{u_{M-3}} \cdots \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq l^{M-1-(N+1)+1},$$

et donc

$$\forall M \geq N+1, \quad \frac{u_M}{u_N} \leq l^{M-N+1},$$

et donc

$$\forall M \geq N+1, \quad 0 \leq u_M \leq \left(u_N l^{-N+1}\right) l^M,$$

ce qui implique par comparaison que la série de terme général u_M pour $M \geq N$ (à N fixé) converge car la série géométrique de terme général l^M converge (car $l \in [0, 1[$).

(2) Le cas $a > 1$ se traite de la même façon en minorant par une une série géométrique de terme général l^M qui diverge (car $l \in]1, +\infty[$).

(3) Dans le cas $a = 1$, on ne peut conclure comme le montre l'exemple suivant $u_n = n^\alpha$ où $\alpha > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha,$$

qui tend vers 1. Or selon α, la série de Riemman $u_n = n^\alpha$ converge ou diverge.

□

Démonstration de la proposition 12.29.

(1) Il faut utiliser non pas le développement limité de l'exponentielle mais la formule de Taylor-Lagrange, non donnée ici et on admet la formule (12.19a). Voir la preuve complète dans la section R.3.1 page 254 de l'annexe R page 252.

Démontrons seulement que la série est bien convergente. Il suffit d'utiliser le lemme 12.30 page précédente. À x fixé [2], on pose

$$a_n(x) = \frac{1}{n!}x^n.$$

Si x est nul, $a_n(x)$ est nul et la série de terme général $a_n(x)$ converge. Sinon, on a successivement :

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{n!}{(n+1)!}\right|,$$
$$= \frac{|x|}{n+1},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = 0,$$

ce qui implique, d'après le lemme 12.30 que la série de terme général $|a_n(x)|$ converge. La série de terme général $a_n(x)$ est donc absolument convergente donc convergente.

(2) On admet la formule (12.19b) et (12.19c), qui se montreraient comme dans le point 1.

□

Remarque 12.31. Sur l'utilisation de la formule (12.19a) pour approcher numériquement e^x, on pourra consulter l'annexe R page 252 et notamment la section R.3.

12.7.4. Séries télescopiques

Proposition 12.32. *Soit (u_n) une suite à valeur complexe. La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente ssi la série (u_n) converge. Dans ce cas-là, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0 \tag{12.22}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire par somme "télescopique", pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) &= \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} u_n,\\ &= u_{N+1} + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - u_0 - \sum_{n=1}^{N} u_n,\\ &= u_{N+1} - u_0 + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - \sum_{n=1}^{N} u_n,\end{aligned}$$

2. On a ici en fait une série entière $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Voir par exemple [Bas22b, Chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"].

et, en posant $n' = n + 1$ dans la première somme

$$\begin{aligned} &= u_{N+1} - u_0 + \sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n, \\ &= u_{N+1} - u_0, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

On se ramènera par comparaison à l'une de ces suites de références. Voir les exercices de TD 12.7, 12.8 et 12.9

Chapitre 13

Comparaison asymptotique

Nous reproduisons pages suivantes les pages pages 7 à 20, extraites du chapitre 1 de J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^{e} étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages, qui serviront de support de cours (avec des exemples qui seront traités en TD, voir exercices 13.1, 13.2 et 13.3) pour ce chapitre.

Par définition

$$\mathrm{ar}(x) = x(1+\alpha),$$

où

$$|\alpha| \leqslant \varepsilon.$$

Pour étudier les erreurs d'arrondi, on fait souvent l'hypothèse que les opérations machines vérifient :

$$\mathrm{ar}(x * y) = x * y(1+\varepsilon_*) \text{ et } |\varepsilon_*| \leqslant K_*\varepsilon, \tag{1.6}$$

où $*$ est une opération mathématique élémentaire (somme, différence, produit ou quotient), ε_* est une précision dépendant de l'opération $*$, K_* est un nombre proche de 1 et ε est la précision machine (voir TP 1.A).

Les exercices montreront le risque numérique qu'on prend en soustrayant des nombres voisins et en divisant par un petit nombre.

1.2.3 Différentes sources d'erreur

Nous pouvons classer en trois groupes les erreurs :

- Les erreurs sur les données, liées à l'imprécision de mesures physiques ou au résultat d'un calcul approché. Ces données ne peuvent être modifiées mais on peut étudier l'influence de ces erreurs sur le résultat final ; par exemple, le conditionnement d'une matrice (cf. exercice 1.6) permet d'analyser cette influence.
- Les erreurs de méthode : elles sont dues à l'algorithme utilisé. Par exemple, l'approximation d'une somme infinie par une somme finie, l'approximation de la limite d'une suite par un terme de « grand » indice, ou l'approximation d'une intégrale par une somme finie.
- Les erreurs de calcul en machine : elles sont liées à l'arrondi de calcul pour les nombres flottants, évoqués en section 1.2.2.

Dans cet ouvrage, nous étudierons les erreurs de méthode et nous verrons comment un choix judicieux de telle ou telle méthode permet de les réduire. Nous ne perdrons pas de vue que les erreurs de calcul machine peuvent avoir une grande influence sur la précision du résultat d'un calcul (cf. exercices correspondants). Cependant, l'étude systématique de l'erreur de calcul machine dépasse le cadre de cet ouvrage.

1.3 ÉCRITURE D'ALGORITHMES ET PROBLÉMATIQUE DE LA COMPLEXITÉ

Seuls sont fournis ci-dessous le vocabulaire de base et les éléments de réflexion fondateurs.

Se préoccuper du temps nécessaire à l'obtention d'un résultat n'est plus aujourd'hui un luxe, un complément mais une nécessité. Il n'est pas possible de découvrir

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

lors du déclenchement d'un signal d'alerte en centrale nucléaire que le temps de calcul indispensable à la mise en œuvre d'une procédure de secours est excessif. La prise en compte de cette question dans bon nombre de processus industriels faisant intervenir du temps réel est indispensable. Bien maîtrisés, ces concepts permettront de plus une communication facilitée avec les informaticiens. Plusieurs aspects mériteraient des développements : voir [BM84] et [AG92].

Dans le cadre de cet ouvrage, nous appellerons algorithme toute méthode de résolution d'un problème donné.

1.3.1 Écriture d'algorithmes

a) Généralités

Tout algorithme sera nommé et désigné par une écriture du type *nom_algorithme*$(d_1, ...d_k \rightarrow r_1, ..., r_s)$.

L'ensemble des paramètres d'entrée $(d_1, ...d_k)$ et de sortie $(r_1, ..., r_s)$, appelés aussi respectivement données et résultats, constitue l'interface de l'algorithme, sa seule partie visible de l'extérieur. Par défaut toute autre variable y intervenant est locale, c'est-à-dire perdue dès la fin de l'exécution de l'algorithme. Les fonctions matlab respectent cette convention dont la prise en compte est essentielle pour l'utilisateur, sous peine d'erreurs grossières.

Désormais l'utilisateur désignera un algorithme par son nom et écrira la liste des variables constituant l'interface. L'algorithme comprend un en-tête et un corps ; leur rédaction soignée est garante de leur portabilité, de leur compréhension par autrui.

Les commentaires (non lus par la machine) décrivent le fonctionnement de l'algorithme en langue naturelle et permettent au lecteur humain de s'y retrouver ; ils sont donc essentiels.

b) En-tête

Sobre mais précis, il est constitué de la description (type, format, signification) des divers paramètres d'entrée et de sortie. En particulier seront indiquées à la façon d'un domaine de définition pour une fonction mathématique, les restrictions éventuelles portant sur les données qui garantiront une exécution convenable sur calculateur. L'ensemble Δ des valeurs autorisées pour $(d_1, ...d_k)$ est appelé domaine de validité de l'algorithme.

c) Corps d'algorithme

Il est écrit en pseudo-code et comprend ordinairement :

- des textes formés de symboles désignant des variables, des opérations ou des affectations (par exemple $a \leftarrow b + c$ réalise l'écriture de la somme des variables b et c dans la variable a) ;

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- des schémas de choix multiples :

  selon variable
  cas valeur_1 : séquence_1
  cas valeur_2 : séquence_2
  ⋮
  cas valeur_n : séquence_n
  fin selon

  dont une variante (choix double) est le schéma alternatif :

  si booléen **alors**
  séquence_1
  sinon
  séquence_2
  fin si

- des schémas de boucle :

  pour $i = 1$ à n **faire**
  séquence
  fin pour

  ou :

  tant que booléen **faire**
  séquence
  fin tant que

- des appels de sous-algorithmes.

L'ensemble du corps d'algorithme, les schémas intermédiaires utilisés seront clairement délimités par l'indication de leur début et de leur fin pour prévenir les difficultés qui peuvent naître de l'oubli de ces précisions.

1.3.2 La problématique de la complexité

L'étude de la complexité présente deux aspects de réelle importance pour l'ingénieur, l'un spatial (volume de mémoire nécessaire), l'autre temporel seul évoqué ici.

a) Le problème posé

Considérons un algorithme *traitement_1*$(n, d \rightarrow res)$ qui à partir de la donnée d de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) produit un résultat res : *traitement_1* réalise par exemple un tri croissant sur les n composantes d'un n-uplet d de réels et retourne le n-uplet trié res. Nous souhaitons comparer les performances temporelles de l'algorithme *traitement_1*$(n, d \rightarrow res)$ à celles d'une variante mise en œuvre dans *traitement_2*$(n, d \rightarrow res)$ lorsque l'entier n devient arbitrairement grand.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Les solutions envisagées

L'idée première est d'effectuer des mesures du temps d'exécution des différents algorithmes en fonction de n. Dans cette pratique naïve mais indispensable et dont nous verrons toutefois l'intérêt en exercices, nous évaluons en fait plus le matériel sur lequel est exécutée l'application que les algorithmes eux-mêmes.

Pour mieux répondre à la question posée, nous montrerons ci-dessous à partir d'exemples précis comment analyser un corps d'algorithme en vue de prévoir ses performances. En conséquence, nous aurons la possibilité dans les cas simples d'affirmer que la solution *traitement_1* nécessite $T_1(n)$ étapes informatiques élémentaires tandis que sa variante *traitement_2* en coûte $T_2(n)$. Dans les cas plus complexes, on ne possède que des majorations de $T_1(n)$ ou $T_2(n)$ et on les choisira aussi fines que possible, afin de représenter au mieux la réalité. Dans tous les cas, des techniques mathématiques spécifiques et fort intéressantes permettront de mener à leur terme ces évaluations ; elles dépassent le cadre de cet ouvrage (voir [AG92] et [Tru91]).

c) Mesure de la complexité

De manière générale les fonctions T_1 et T_2 ou leurs majorations s'écriront, quand elles sont exprimables, sous forme de fonctions de la variable n et de paramètres liés au matériel. Pour connaître le comportement d'un algorithme traitant des données de taille n, nous déterminerons le terme dominant en n de la fonction coût, ou éventuellement du majorant trouvé, noté $T(n)$; c'est un infiniment grand principal $e(n)$, choisi parmi une famille de fonctions classiques de comparaison ; nous dirons alors que l'algorithme étudié présente une complexité temporelle d'ordre $e(n)$ ou au pire d'ordre $e(n)$. À une constante multiplicative près, les $e(n)$ intervenant seront le plus souvent éléments de

$$\mathcal{E} = \{1, \ln(n), n^{\varepsilon}, n, n\ln(n), n^{c}, c^{n}, n!\}$$

avec ε dans $]0, 1[$ et c dans $\mathbb{R}_+^*$; la famille $\mathcal{E}$ sera affinée si besoin.

> La réalité de l'étude des performances temporelles d'un algorithme est parfois plus complexe ! Il est fréquent que le traitement de données de même taille donne lieu à des écarts importants selon la nature des données et la méthode choisie. Par exemple pour ordonner un n-uplet par tri bulle, le temps d'exécution dépend fortement du nombre de « désordres » présents dans la suite des composantes du n-uplet[7] : ainsi une donnée « presque triée » nécessite un temps de calcul très court, tandis qu'une donnée « fortement désordonnée » en demande nettement plus ; d'autres méthodes seront en revanche insensibles à cet état préalable.
>
> Il est des situations où majorer le temps de calcul par la valeur du pire des cas n'a aucun intérêt ; il est alors souvent préférable d'évaluer les performances moyennes de l'algorithme étudié. Pour ce faire, on définit une partition du domaine de validité de l'algorithme en classes sur lesquelles les temps de calcul sont presque similaires et l'on pondère les performances sur chaque classe de données par la probabilité pour

7. Plus précisément de la décomposition (non unique) de la permutation initiale en transpositions.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

une donnée d'appartenir à cette classe. Par exemple, si une fois sur 1000 un algorithme coûte 100 secondes, alors que dans les autres cas il nécessite 1 seconde, on dira qu'en moyenne l'algorithme coûte

$$T = \frac{999}{1000}1 + \frac{1}{1000}100\,;$$

il serait insensé de considérer la durée de 100 secondes comme référence signifiante. Voir [Tru91].

1.4 OUTILS D'ÉTUDE DE LA COMPLEXITÉ – EXEMPLES

1.4.1 Notations asymptotiques

Le lecteur se préoccupera de l'enchaînement des idées d'abord et évitera de se perdre dans les détails techniques.

On note $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*\}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

a) Notation $\mathcal{O}$

Définition 1.4. Étant donné f de $\mathcal{F}$, on appelle ensemble des fonctions asymptotiquement dominées par f la partie de $\mathcal{F}$ définie par :

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \mathcal{F} : \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad g(n) \leqslant cf(n)\}\,. \tag{1.7}$$

Cet énoncé traduit qu'à partir d'un certain rang noté n_0, $g(n)$ est majoré par $cf(n)$, la constante c dépendant bien entendu de f, g et n_0.

Remarque 1.5. Pour l'expression de la complexité, f sera désormais confondue avec $f(n)$, comme ceci est pratiqué chez les informaticiens professionnels.

Proposition 1.6. *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$, on a la condition suffisante suivante :*

$$\textit{si } \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l > 0, \textit{ alors } \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))\,. \tag{1.8}$$

Démonstration : On traduit l'hypothèse (1.8) par la définition de limite due à Cauchy : pour $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, il existe n_0 de $\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - l\right| < \frac{l}{2}$ soit encore : $\frac{l}{2} \leqslant \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant \frac{3l}{2}$. Mais g est à valeurs positives, donc pour tout entier $n \geqslant n_0$, il vient $\frac{l}{2}g(n) \leqslant f(n) \leqslant \frac{3l}{2}g(n)$. On en déduit que

- $g \in \mathcal{O}(f)$ pour $c = \frac{2}{l} > 0$;
- $f \in \mathcal{O}(g)$ pour $c = \frac{3l}{2} > 0$;

de là, découlent simplement les égalités ensemblistes proposées, grâce à la multiplication des deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif. ❑

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice 1.7. On établira les résultats suivants :

$$2^{n+1} \in \mathcal{O}(2^n),$$
$$(n+1)! \notin \mathcal{O}(n!).$$

♦

Proposition 1.8. *Soit deux réels ε et c vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < c$ alors on a*

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\ln(n)) \subset \mathcal{O}(n^{\varepsilon}) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n\ln(n)) \subset \mathcal{O}\left(n^c\right) \subset \mathcal{O}\left(c^n\right) \subset \mathcal{O}(n!).$$

Démonstration : Elle vient des résultats classiques relatifs aux croissances comparées de fonctions bien connues hormis la dernière inclusion ; celle ci repose sur l'utilisation de la formule de Stirling qui fournit un équivalent de $n!$ au voisinage de l'infini[8]. ❑

b) Notation Ω

Définition 1.9. Étant donné f un élément de $\mathcal{F}$, on appelle ensemble des fonctions dominant asymptotiquement f la partie de $\mathcal{F}$ définie par :

$$\Omega(f) = \{g \in \mathcal{F} : \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad g(n) \geqslant cf(n)\}.$$

Le lecteur pourra exprimer la définition 1.9. donnée avec des quantificateurs au moyen d'une phrase en français.

Proposition 1.10. *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$,*

$$si \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l > 0, \text{ alors } \Omega(f(n)) = \Omega(g(n)).$$

Démonstration : Elle est du même type que celle conduisant à l'égalité de $\mathcal{O}(f(n))$ et $\mathcal{O}(g(n))$. ❑

Proposition 1.11. *Soit deux réels ε et c vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < c$ alors on a*

$$\Omega(1) \supset \Omega(\ln(n)) \supset \Omega(n^{\varepsilon}) \supset \Omega(n) \supset \Omega(n\ln(n)) \supset \Omega\left(n^c\right) \supset \Omega\left(c^n\right) \supset \Omega(n!).$$

Démonstration : Identique à la proposition 1.8.. ❑

8. On rappelle qu'au voisinage de l'infini, $n!$ est équivalent à u_n défini par

$$u_n = \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}, \tag{1.9}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{u_n} = 1 \tag{1.10}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Notation Θ

Définition 1.12. Étant donné f de $\mathcal{F}$, on appelle ensemble des fonctions asymptotiquement équivalentes à f la partie de $\mathcal{F}$ définie par :

$$\Theta(f) = \{g \in \mathcal{F} : \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists (c, c') \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$
$$\forall n \geqslant n_0, \quad cf(n) \leqslant g(n) \leqslant c' f(n)\}.$$

Proposition 1.13. *Sous les notations antérieures, on a l'équivalence suivante :*

$$[f(n) \in \Theta(g(n))] \iff f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \text{ et } g(n) \in \mathcal{O}(f(n)).$$

Démonstration : Évidente vu ce qui précède. ❑

Proposition 1.14. *Sous les notations antérieures,*

$$\text{si } \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l > 0, \text{ alors } f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ et } g(n) \in \Theta(f(n)).$$

Démonstration : Évidente vu ce qui précède. ❑

Proposition 1.15. *Sous les notations antérieures,*

$$\text{si } f \in \Theta(g) \text{ et si } \lim_{n \to +\infty} \frac{f_1(n)}{g(n)} = 0, \text{ alors } f + f_1 \in \Theta(g).$$

Démonstration : On laisse au lecteur le soin de la vérifier. ❑

1.4.2 La mesure de complexité

Soit $\mathcal{A}(n, d \to res)$ un algorithme résovant un problème (P) sur des données d de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On suppose avoir établi que l'exécution de $\mathcal{A}()$ coûte $T(n)$ étapes informatiques élémentaires ou unités de temps.

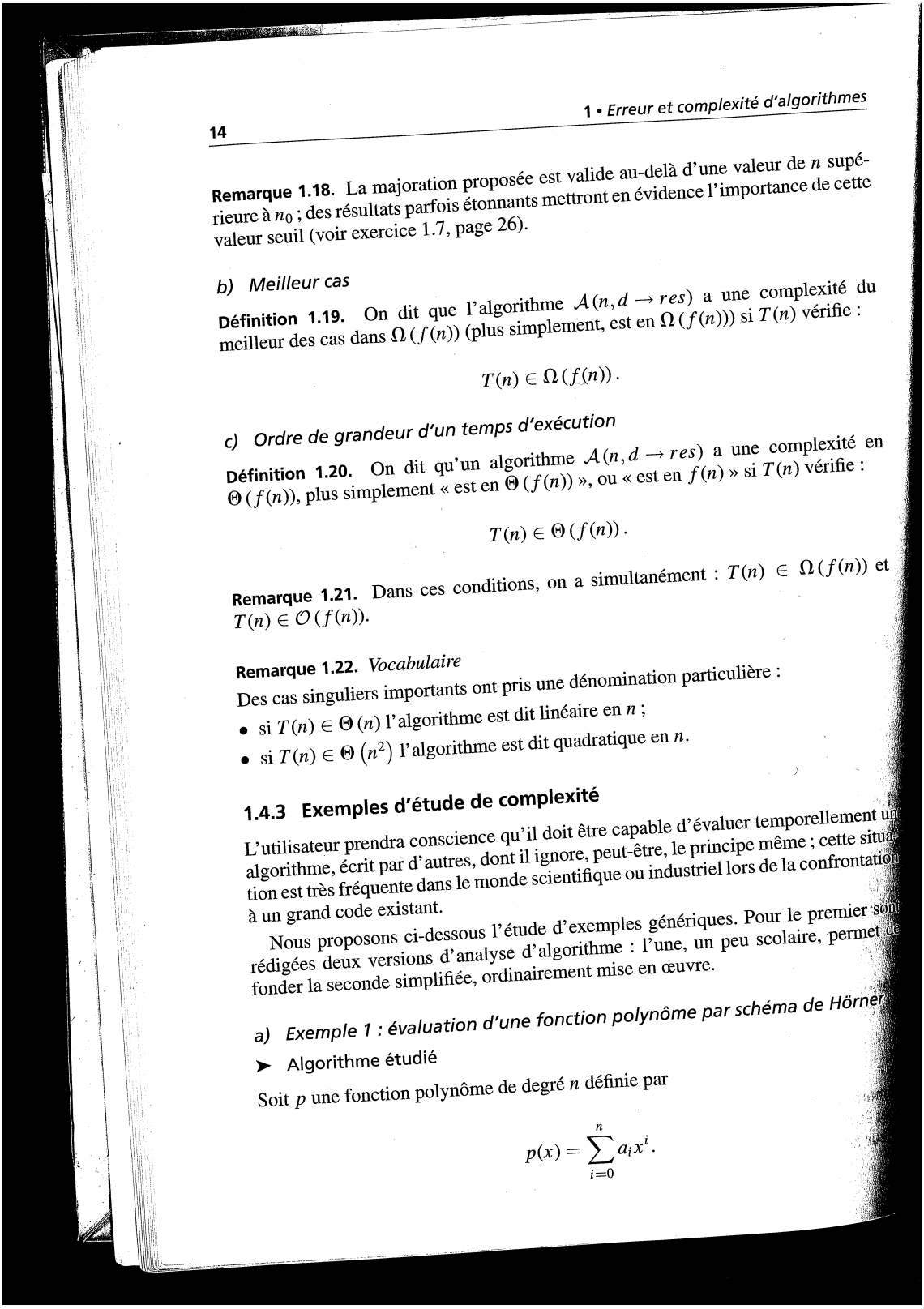
a) Pire des cas

Définition 1.16. On dit que l'algorithme $\mathcal{A}(n, d \to res)$ a une complexité du pire des cas dans $\mathcal{O}(f(n))$ (plus simplement, est en $\mathcal{O}(f(n))$) si $T(n)$ vérifie :

$$T(n) \in \mathcal{O}(f(n)).$$

Remarque 1.17. Attention, la majoration asymptotique proposée n'est pas unique et peut être extrêmement grossière, jusqu'à perdre toute signification pratique ! L'utilisateur aura toujours intérêt à rendre la majoration proposée la plus fine possible.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit



14 1 • Erreur et complexité d'algorithmes

Remarque 1.18. La majoration proposée est valide au-delà d'une valeur de n supérieure à n_0 ; des résultats parfois étonnants mettront en évidence l'importance de cette valeur seuil (voir exercice 1.7, page 26).

b) Meilleur cas

Définition 1.19. On dit que l'algorithme $\mathcal{A}(n, d \rightarrow res)$ a une complexité du meilleur des cas dans $\Omega(f(n))$ (plus simplement, est en $\Omega(f(n))$) si $T(n)$ vérifie :

$$T(n) \in \Omega(f(n)).$$

c) Ordre de grandeur d'un temps d'exécution

Définition 1.20. On dit qu'un algorithme $\mathcal{A}(n, d \rightarrow res)$ a une complexité en $\Theta(f(n))$, plus simplement « est en $\Theta(f(n))$ », ou « est en $f(n)$ » si $T(n)$ vérifie :

$$T(n) \in \Theta(f(n)).$$

Remarque 1.21. Dans ces conditions, on a simultanément : $T(n) \in \Omega(f(n))$ et $T(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.

Remarque 1.22. *Vocabulaire*

Des cas singuliers importants ont pris une dénomination particulière :

- si $T(n) \in \Theta(n)$ l'algorithme est dit linéaire en n ;
- si $T(n) \in \Theta(n^2)$ l'algorithme est dit quadratique en n.

1.4.3 Exemples d'étude de complexité

L'utilisateur prendra conscience qu'il doit être capable d'évaluer temporellement un algorithme, écrit par d'autres, dont il ignore, peut-être, le principe même ; cette situation est très fréquente dans le monde scientifique ou industriel lors de la confrontation à un grand code existant.

Nous proposons ci-dessous l'étude d'exemples génériques. Pour le premier sont rédigées deux versions d'analyse d'algorithme : l'une, un peu scolaire, permet de fonder la seconde simplifiée, ordinairement mise en œuvre.

a) Exemple 1 : évaluation d'une fonction polynôme par schéma de Hörner

➤ Algorithme étudié

Soit p une fonction polynôme de degré n définie par

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

On considère l'algorithme[9] 1.1.

Algorithme 1.1 Algorithme d'évaluation de p en t : *eval_horner*(n, a, t ⟶ val)

entrée :

n : entier naturel, degré du polynôme ;
$(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$: $n+1$ réels, coefficients définissant le polynôme ;
t : réel en lequel on évalue p ;

sortie :

val : réel défini par $val = p(t)$.

Début de corps

(1) $a' \leftarrow a_n$
(2) **pour** $i = n-1$ à 0 **faire**
(4) $a' \leftarrow a_i + t \times a'$
fin pour
(3) $val \leftarrow a'$

Fin de corps

Le corps d'algorithme a été directement découpé en sous-parties, ce qui constitue en fait la première étape de l'analyse.

➤ Analyse 1 : première version

Soient α, β, γ trois réels strictement positifs définis comme suit pour un matériel donné :

- α désigne le temps d'accès mémoire en lecture et écriture ;
- β désigne le maximum des temps d'opérations $(+, -, \times, /)$;
- γ désigne le temps d'exécution d'un test.

Le temps d'exécution $T(n)$ de l'algorithme étudié est donné par

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n),$$

où les $T_i(n)$ représentent le temps d'exécution de la portion de numéro (i) de l'algorithme.

Or $T_1(n) = 2\alpha$ et $T_3(n) = 2\alpha$ puisque dans ces deux portions on lit et on écrit une fois ; reste à évaluer $T_2(n)$.

L'écriture de la portion (4) coûte la lecture de a_i, de t, de a', l'écriture dans a' et deux opérations, c'est-à-dire $4\alpha+2\beta$. La prise en compte de détails complémentaires importe peu (calcul d'une adresse d'un élément de table, temps de test à chaque tour de boucle[10]) ; l'essentiel ici est de remarquer que le temps d'exécution de la portion

9. Cet algorithme sera repris dans le chapitre 2 : voir algorithme 2.1.
10. Ces éléments seront importants pour les professionnels, détaillés nettement plus finement !

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

(4) est une constante A de $\mathbb{R}_+^*$ indépendante de i, variable de contrôle de la boucle. Ainsi $T_2(n) = nA$. En conséquence en notant $B = T_1(n) + T_3(n)$

$$T(n) = nA + B \quad \text{avec } (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

On en déduit d'après les définitions précédentes que l'algorithme proposé est linéaire en n puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{T(n)}{n} = A > 0.$$

➤ Analyse 2 : deuxième version

On remarque directement que les portions (1) et (3) cumulées coûtent une constante B indépendante de n et que la portion (4) nécessite un temps d'exécution A qui ne varie pas avec la valeur de la variable de contrôle de boucle i ; ainsi $T_2(n) = nA$. Par suite

$$T(n) = nA + B \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

Donc l'algorithme d'évaluation d'une fonction polynôme par schéma de Hörner est linéaire en n degré du polynôme, puisque l'infiniment grand nA domine B.

Remarque 1.23. Cette deuxième version sera la seule désormais utilisée ; les détails décrits dans la première auront servi seulement à fonder la pratique ordinaire.

b) *Exemple 2 : Détermination d'un polynôme d'interpolation*

➤ Algorithme étudié

Soit f une fonction numérique définie en $n+1$ réels distincts $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ par

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad f(x_i) = y_i.$$

On considère l'algorithme[11] 1.2. Cet algorithme fournit le vecteur d de $n+1$ réels d'où on tirera facilement le polynôme d'interpolation de f en $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ (voir chapitre 2). Le corps d'algorithme a été directement découpé en sous-parties ici aussi.

➤ Analyse de complexité

L'algorithme à l'étude est constitué de deux blocs ; ainsi le temps global d'exécution est donné par $T(n) = T_1(n) + T_2(n)$, où $T_i(n)$ représente le temps d'exécution du bloc de numéro i.

- Pour (1), la durée de l'invariant de boucle (3) $d_i \leftarrow y_i$ est une constante indépendante de la valeur de i ; on la note A. Ainsi, vu qu'on décompte $n+1$ entrées en boucle

$$T_1(n) = (n+1)A.$$

11. Cet algorithme sera utilisé dans le chapitre 2 : voir algorithme 2.3.

Algorithme 1.2 Détermination des différences divisées :
***dif_div_dist*(n, x, y, ⟶ d)**

entrée :

n : entier naturel tel que $n+1$ désigne le nombre de points d'interpolation ;
$(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$: $n+1$ abscisses réelles des points d'interpolation ;
$(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$: $n+1$ valeurs réelles prises par f en $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$;

sortie :

d : vecteur de $n+1$ réels définis dans le chapitre 2.

Début de corps

(1) **pour** $i = 0$ à n **faire**
  (3) $d_i \leftarrow y_i$
fin pour

(2) **pour** $i = 1$ à n **faire**
  (4) **pour** $j = n$ à i **faire**
    (5) $d_j \leftarrow \dfrac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-i}}$
  fin pour
fin pour

Fin de corps

- Pour la boucle (2), la question cruciale est de déterminer si la durée du temps d'exécution de (4) dépend ou non de la variable i qui contrôle cette boucle. Mais (4) représente aussi une boucle dont nous devons d'abord faire l'analyse.
  - La durée d'exécution de l'invariant (5) $d_j \leftarrow \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-i}}$ de la boucle interne ne dépend pas de la valeur de j ni de i puisqu'on lit quatre variables, effectue deux différences, un quotient qui est ensuite écrit dans d_j ; notons B la durée correspondante. Par suite, comme la boucle interne donne lieu à $(n - i + 1)$ entrées, pour la valeur i, la durée d'exécution de (4) est de $B(n - i + 1)$.
  - Cette valeur n'est plus indépendante de i ; il n'est plus possible de multiplier simplement par le nombre d'entrées en boucle externe. Par suite

$$T_2(n) = \sum_{i=1}^{n} B(n - i + 1).$$

Reste à exprimer simplement $T_2(n)$. On factorise B, on commute les termes dans la somme ; il vient

$$T_2(n) = B\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = B\frac{n(n+1)}{2}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- En additionnant les deux termes $T_1(n)$ et $T_2(n)$, on a finalement

$$T(n) = (n+1)A + B\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

De manière évidente, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T(n)}{n^2} = \frac{B}{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

donc l'algorithme proposé est quadratique en n.

Remarque 1.24. La durée d'exécution du bloc (2) peut être représentée par la surface d'un triangle rectangle construit à partir de cellules élémentaires au nombre de n, puis $n-1$, $n-2$ jusqu'à 1, où chaque cellule correspond à une itération de la boucle interne. Donc la durée d'exécution de (2) est associée à l'aire d'un demi-carré de côté n ; ainsi $T_2(n)$ est certainement en $\Theta\left(n^2\right)$. Mais comme $T_1(n)$ est visiblement en $\Theta(n)$, le bloc (2) « efface » le bloc (1) pour n grand. Par suite $T(n)$ est en $\Theta\left(n^2\right)$. (cf. proposition 1.15.).

c) *Exemple 3 : un dernier cas générique !*

➤ Algorithme étudié

Considérons l'algorithme 1.3. Cet algorithme est destiné à fournir une version améliorée de l'élévation d'un réel x à la puissance n ($n \geqslant 2$).

➤ Analyse de complexité

$n = 0$ ne représente évidemment pas le cas général ; nous supposerons donc que n est non nul. L'algorithme est constitué de trois blocs ; ainsi le temps global d'exécution est donné par

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n),$$

où $T_i(n)$ représente le temps d'exécution du bloc de numéro i.

- Le temps d'exécution de (1) est évidemment une constante A indépendante de n donc

$$T_1(n) = A$$

- Pour évaluer le temps d'exécution de (2), remarquons d'abord que le bloc (4) coûte une durée B indépendante de la valeur de la variable de contrôle c de cette boucle **tant que** ; ainsi $T_2(n) = Bq_n$ où q_n désigne le nombre d'entrées en boucle (dépendant de n).
  Or on peut montrer simplement que q_n est l'unique entier naturel vérifiant

$$2^{q_n-1} \leqslant n < 2^{q_n}.$$

Vu la monotonie du logarithme, il vient

$$(q_n - 1)\ln(2) \leqslant \ln(n) < q_n \ln(2) \text{ c'est-à-dire } (q_n - 1) \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)} < q_n.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithme 1.3 Calcul de x^n : *puissance*(n, x $\longrightarrow$ y)

entrée :

n : entier naturel exposant ;

x : réel strictement positif qu'on veut élever à la puissance n ;

sortie :

y : réel résultat ($y = x^n$).

Début de corps

(1) $k \leftarrow 0; y \leftarrow 1; c \leftarrow n$

(2) **tant que** $c \neq 0$ **faire**

  (4) $k \leftarrow k + 1$

  $v(k) \leftarrow \text{mod}(c, 2)$ {reste de c modulo 2}

  $c \leftarrow \text{E}\left(\frac{c}{2}\right)$ {E fonction partie entière}

fin tant que

(3) **tant que** $k > 0$ **faire**

  (5) $y \leftarrow y^2 \times x^{v(k)}$ $\{x^{v(k)}$ est soit x soit 1 selon $v(k)\}$

  $k \leftarrow k - 1$

fin tant que

Fin de corps

Par suite

$$\frac{\ln(n)}{\ln(2)} < q_n \leqslant 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\ln(2)} < \frac{q_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(2)} \text{ pour } n > 1,$$

dont on déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q_n}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(2)},$$

par théorème d'encadrement.

- De la même façon on montre que $T_3(n) = Cq_n$ (q_n est d'ailleurs donné par la valeur de k à la sortie de boucle (2)).
- Finalement on a

$$T(n) = A + (B + C)\, q_n \quad \text{avec} \quad (A, B, C) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3,$$

d'où on déduit, grâce à l'étude antérieure de $q_n / \ln(n)$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{T(n)}{\ln(n)} = \frac{B + C}{\ln(2)} > 0.$$

Ainsi l'algorithme *puissance*$(n, x \longrightarrow y)$ est en $\Theta(\ln(n))$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) Généralisation et questions connexes

- A partir de l'étude des exemples précédents, l'étudiant devra être capable d'évaluer la complexité d'algorithmes plus élaborés composés de ces formes primitives.
- Une question très importante en pratique, dans le domaine industriel mais aussi en calcul scientifique, sera la suivante. Pour résoudre un problème (P) nous disposerons fréquemment de deux algorithmes dont nous supposerons connaître la complexité, notée respectivement $\Theta(e_1(n))$ et $\Theta(e_2(n))$. Ainsi, pour « n grand », les temps d'exécutions seront respectivement de la forme

$$T_1(n) \approx A_1 e_1(n) \text{ et } T_2(n) \approx A_2 e_2(n),$$

avec (A_1, A_2) couple de réels strictement positifs.
La taille des constantes A_1, A_2 aura des conséquences essentielles comme ceci sera montré dans l'exercice 1.7, page 26.

EXERCICES DU CHAPITRE 1

1.5 REPRÉSENTATION

Exercice 1.1 Présentation d'un faux paradoxe

1. Montrer qu'en base 10, on a[12]

$$1 = 0,999....$$

2. En généralisant, montrer que, pour toute base β, si $b = \beta - 1$, on a

$$1 = \overline{0,bbb....}$$

Exercice 1.2 Passage de la représentation décimale périodique à l'écriture fractionnaire

Dans cet exercice, on se place en base 10.

1. Quel nombre rationnel est égal à $0,123123123...$ (le développement est périodique de période 123) ?

12. Cela peut constituer un paradoxe, puisqu'un même nombre admet deux écritures différentes. On verra (en correction) que cela n'est qu'un faux paradoxe.

Chapitre 14

Exponentielle

Ce chapitre [1], déjà traité en principe par un autre collègue n'est plus au programme. Les notions qu'il présente peuvent être néanmoins parfois utilisées et sont présentées en annexe P page 234.

1. en partie issu et adapté de [Jan22].

Chapitre 15

Logarithme

Ce chapitre [1], déjà traité en principe par un autre collègue n'est plus au programme. Les notions qu'il présente peuvent être néanmoins parfois utilisées et sont présentées en annexe Q page 241.

1. en partie issu et adapté de [Jan22].

Chapitre 16

Problèmes ouverts (ou non !)

Ce chapitre est facultatif.

Ces trois problèmes seront utilisés lors des TP 2.3, 2.4 et 2.7.

16.1. Conjecture de Syracuse ou de Collatz ou Problème $3n+1$

Donnons quelques extraits adaptés de de `https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse` :

La suite de Syracuse d'un nombre entier $N > 0$ est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$u_0 = N, \tag{16.1a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair}\,; \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair}\,. \end{cases} \tag{16.1b}$$

La suite (u_n) ainsi définie est appelée la suite de Syracuse du nombre N.

L'observation graphique de la suite pour $N = 15$, pour $N = 127$ ou pour $N = 871$ (voir figure 16.1) montre que la suite peut s'élever assez haut avant de retomber. Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parlera du vol de la suite et du temps de vol, défini comme le plus petit entier n tel que $u_n = 1$. Il est de 17 pour la suite de Syracuse 15, de 46 pour la suite de Syracuse 127 et de 178 pour la suite de Syracuse 871.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres :
$14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...$

Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs $1, 4, 2, 1, 4, 2, ...$ se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

La conjecture de Syracuse ou de Collatz (on parle aussi de problème $3n + 1$) affirme que pour tout N, il existe un indice n tel que $u_n = 1$.

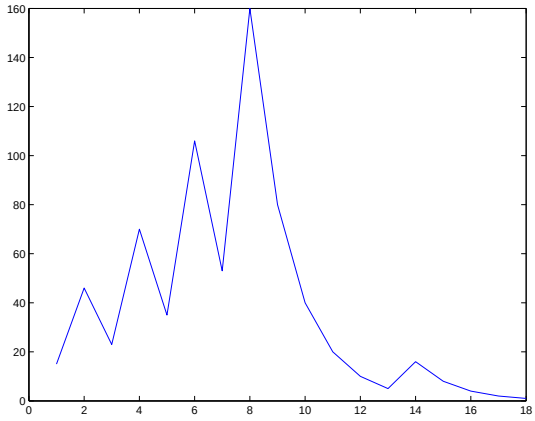
Voir par exemple la figure 16.2.

Voir par exemple la figure [1] 16.3.

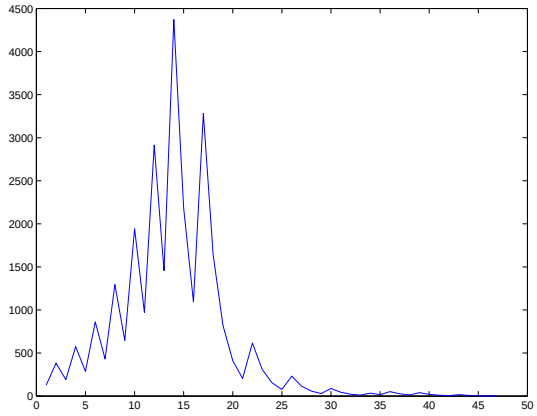
On pourra consulter la fonction `troisnplusun.m` disponible à l'adresse habituelle.

Voir TP 2.3 page 18.

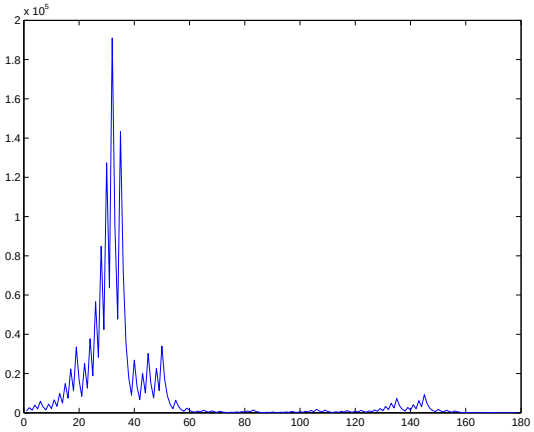
1. extraite de `https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse`, disponible sur `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Collatz-graph-20-iterations.svg` avec le source Python, permettant de la créer.



(a) $N = 15$



(b) $N = 127$



(c) $N = 871$

FIGURE 16.1. Valeurs de u_n pour différentes valeurs de N.

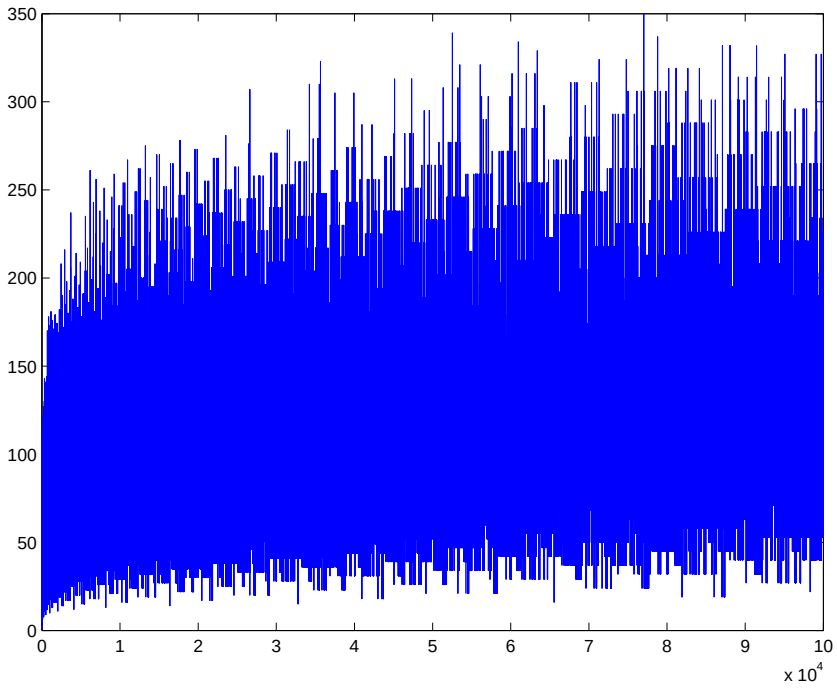


FIGURE 16.2. Les temps de vol des suites (u_n) de N pour $N \in \{1, ..., 100000\}$.

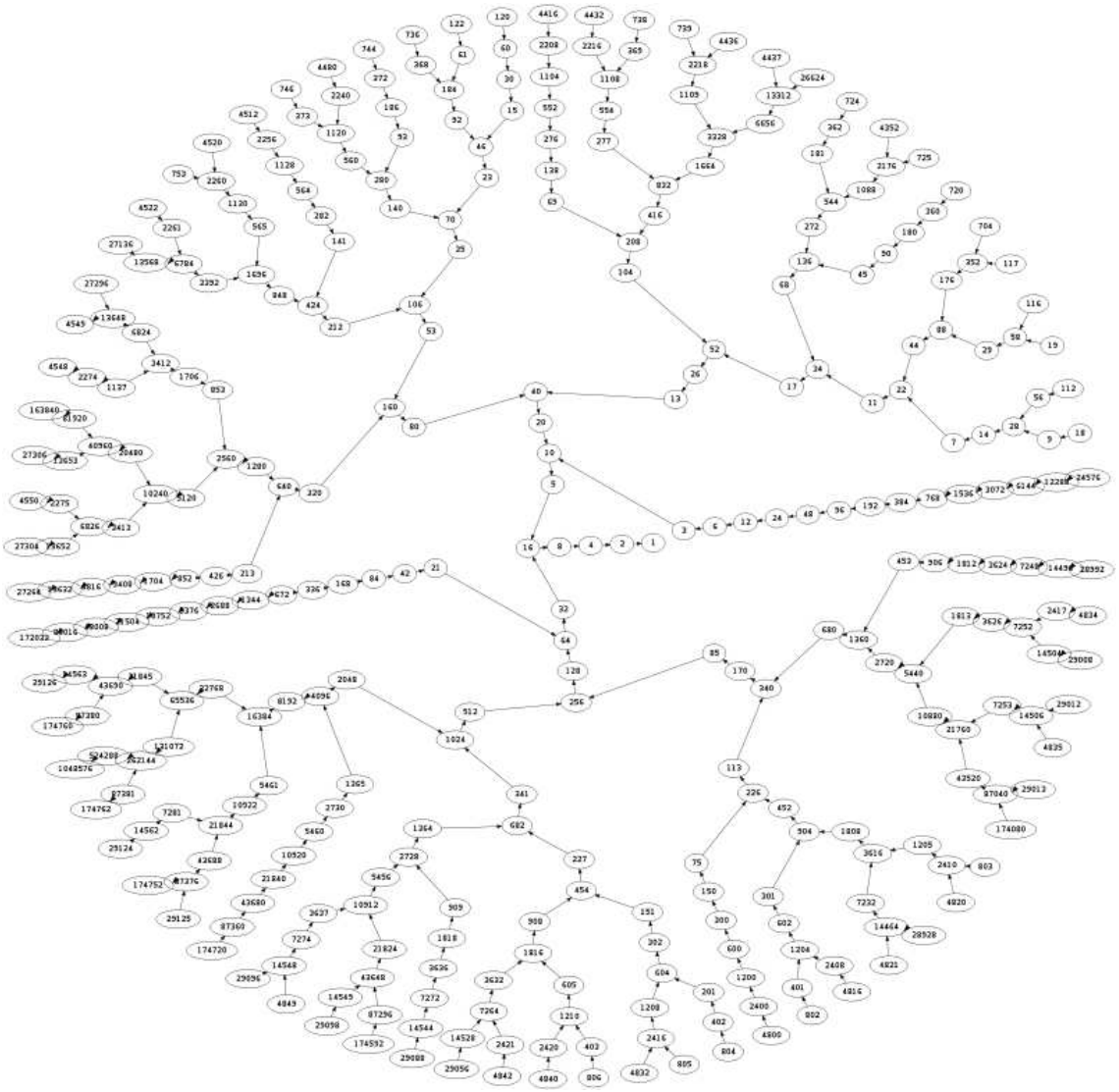


FIGURE 16.3. L'arbre reliant les nombres à durée de vol inférieure à 20

16.2. Tri de Crêpes

Donnons quelques extraits adatpés de `https://fr.wikipedia.org/wiki/Tri_de_crêpes`

Un cuisinier fait des crêpes et les pose en pile à côté de la poêle lorsqu'elles sont cuites. Toutes les crêpes sont de taille différente. On dispose donc d'une pile de crêpes, chacune de taille différente et il s'agit d'ordonner les crêpes dans la pile, par ordre décroissant de taille (diamètre) avec donc celle de plus petit diamètre en haut de la pile. Un seul type d'opération est autorisé pour manipuler la pile : insérer une spatule à un endroit de la pile et retourner d'un coup toutes les crêpes qui se trouvent au-dessus de la spatule (inversion).

Le tri de crêpes (de l'anglais pancake sorting) est un problème mathématique. Il s'agit de trier une pile de crêpes afin que les crêpes soient empilées de la plus grande à la plus petite (au sens de leur diamètre). La seule opération autorisée pour arriver à ce résultat est de retourner la partie supérieure de la pile. On peut considérer d'une part le problème algorithmique, où le but est d'arriver à la configuration finale, comme pour un algorithme de tri, et d'autre part des questions mathématiques. Une question classique est d'évaluer le nombre minimum de mouvements nécessaires, pour toute pile d'une certaine taille.

La question est : pour N crêpes, quel est le nombre minimum de manipulations (P) qui sont nécessaires pour mettre toute pile dans l'ordre décroissant ?

Le nombre minimum de manipulations est toujours 0 puisque le cuisinier peut avoir cuit les crêpes dans l'ordre décroissant de taille, auquel cas il n'y a aucune manipulation à faire. D'autre part, dès que $N > 4$, il existe des piles où aucune crêpe ne touche une crêpe qui sera sa voisine dans le tri final (paire adjacente de crêpes). Comme chaque inversion crée au plus une adjacence de ce type, le tri prend nécessairement au moins N inversions - mais peut devoir en prendre plus. De même, le nombre maximal est toujours inférieur à $2N - 3$ (on peut trier la pile séquentiellement, en commençant par la plus grande, avec deux inversions par crêpes, et le tri des deux dernières prend au plus un coup). Mais cette manière de faire n'est pas nécessairement optimale. Si une pile de trois crêpes peut demander jusqu'à trois inversions, une pile de quatre peut toujours être triée en quatre inversions (économisant un coup) et une pile de cinq en cinq inversions (économisant deux coups).

Le problème qui se pose est de trouver la loi mathématique qui donne P pour tout N, quand le tri est conduit de manière optimale. Ce problème n'a toujours pas de solution complète. Les chercheurs qui se penchent depuis plus de 30 ans sur la question ont jusqu'ici réussi à estimer P qui serait toujours inférieur à $18N/11$. Cette valeur a été révélée en 2008 par une équipe de l'Université de Dallas (Texas). Elle affine une estimation de 1997 qui avait établi une borne maximum de $15N/14$.

Voir l'algorithme très simple 16.1 (et loin d'être optimal !) et sa version numérique 16.2. Le nombre d'opérations maximal est $2N - 2$.

Pour $N = 10$, on obtient en prenant $M = 10$ échantillons aléatoires, les nombres d'inversion suivants $\{18, 14, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 14\}$. Le permier d'entre eux est bien égal à $2N - 2$.

Pour des valeurs plus grandes ($N = 300$ et $M = 10000$), on obtient un écart type et une moyenne des nombres d'inversions divisés par N égaux à 1.9580 (proche de 2) et 0.0147. Voir la figure 16.4.

On pourra consulter la fonction `tricrepes.m` disponible à l'adresse habituelle.

Voir TP 2.4 page 18.

16.3. Problème des flux d'argent et du gîte

Ce problème n'est pas ouvert mais sera traité evéntuellement en TD (voir exercice de TD 16.1 du TD 16 et en TP (voir TP 2.7 page 19).

Algorithme 16.1 Algorithme de tri de trêpes : *tri_ crepe* (pile de $N \in \mathbb{N}^*$ crêpes non triées $\longrightarrow$ pile de crêpes triées dans l'ordre décroissant de taille)

Entrée :
pile de $N \in \mathbb{N}^*$ crêpes non triées
Sortie :
pile de crêpes triées dans l'ordre décroissant de taille

$n \longleftarrow N$
tant que $n \geq 2$ **faire**
  si la n-ième crêpe en partant du haut n'est pas la plus grande des n crêpes du haut **alors**
    Placer la spatule sous la plus grande des n crêpes du haut
    Retourner la spatule et les crêpes situées au-dessus de la spatule
    Placer la spatule sous la n-ième crêpe
    Retourner la spatule et les crêpes situées au-dessus de la spatule
  fin si
  $n \longleftarrow n - 1$
fin tant que

Algorithme 16.2 Algorithme de tri de trêpes : *tri_ crepe_ numerique* ($N \in \mathbb{N}^*$ entiers x_1, x_2, ..., x_N deux à deux distincts de l'ensemble $\{1, ..., N\}$ $\longrightarrow$ nombre q d'inversions)

Entrée :
$N \in \mathbb{N}^*$ entiers x_1, x_2, ..., x_N deux à deux distincts de l'ensemble $\{1, ..., N\}$, stockés le tableau X
Sortie :
nombre q d'inversions

$q \longleftarrow 0$
pour $i = N$ à 2 (en descendant) **faire**
  $a \longleftarrow (X_k)_{1 \leq k \leq i}$
  j est l'entier dans $\{1, ...i\}$ tel que a_j est le plus grand des valeurs $(a_k)_{1 \leq k \leq i}$
  si $j \neq i$ **alors**
    $q \longleftarrow q + 2$
    $(a_k)_{1 \leq k \leq j} \longleftarrow (a_{j-k+1})_{1 \leq k \leq j}$
    $(a_k)_{1 \leq k \leq i} \longleftarrow (a_{i-k+1})_{1 \leq k \leq i}$
  fin si
  $(X_k)_{1 \leq k \leq i} \longleftarrow a$
fin pour

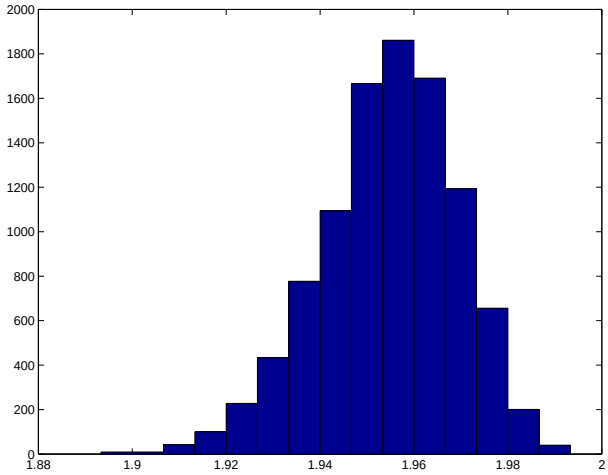


FIGURE 16.4. Histogramme des nombres d'inversions divisés par N pour $N = 300$ et $M = 10000$.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Quelques développements limités usuels

n est un entier naturel et tous ces développements limités sont en zéro.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o\left(x^{10}\right),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3....(2n-3)}{2.4....(2n)}x^n + o\left(x^n\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o\left(x^n\right).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right).$$

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Annexe B

Quelques dérivées usuelles

fonction	dérivée
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$1/x$
$\ln \lvert u \rvert$	u'/u
e^x	e^x
a^x	$\ln a a^x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Annexe C

Quelques primitives usuelles

fonction	primitive	valable sur
x^α $(\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\mathbb{R}$ si α entier, sur $\mathbb{R}_+$ sinon
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$
$1/(x-a)$	$\ln\lvert x-a\rvert$	un intervalle ne contenant pas a
$1/(bx-c)$	$\ln\lvert bx-c\rvert/b$	un intervalle ne contenant pas c/b
u'/u	$\ln\lvert u\rvert$	un intervalle où u ne s'annulle pas
$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}/\alpha$	$\mathbb{R}$
a^x	$a^x/\ln a$	$\mathbb{R}$
$\cos(\alpha x)$	$(\sin(\alpha x))/\alpha$	$\mathbb{R}$
$\sin(\alpha x)$	$-(\cos(\alpha x))/\alpha$	$\mathbb{R}$
$\cosh(\alpha x)$	$(\sinh(\alpha x))/\alpha$	$\mathbb{R}$
$\sinh(\alpha x)$	$(\cosh(\alpha x))/\alpha$	$\mathbb{R}$
$\tan(\alpha x)$	$-\ln\lvert\cos(\alpha x)\rvert/\alpha$	$\mathbb{R}$
$1/(x^2+a^2)$	$(1/a)\arctan(x/a)$	$\mathbb{R}$
$1/(x^2-a^2)$	$(1/2a)\ln(\lvert x-a\rvert/\lvert x+a\rvert)$	$(a>0)$ un intervalle ne contenant ni a ni $-a$
$1/(\sqrt{a^2-x^2})$	$\arcsin(x/a)$	$(a>0)$ $[-a,a]$
$1/(\sqrt{x^2+a^2})$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$(a>0)$ $\mathbb{R}$
$1/(\sqrt{x^2-a^2})$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$	$(a>0)$ $[a,+\infty[$

Il est important de savoir retrouver ces formules ! Une partie de ce tableau n'est autre que le tableau de l'annexe B, écrit à l'envers !

Annexe D

Rappels sur les racines d'un polynôme de degré 2

Soient trois réels a, b et c, a étant non nuls. On s'intéresse au polynôme du second degré :

$$P(x) = ax^2 + bx + c. \tag{D.1}$$

Le discriminant Δ est donné par

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{D.2}$$

— Si $\Delta > 0$, le polynôme P a deux racines réelles distinctes définies par

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{D.3}$$

— Si $\Delta = 0$, le polynôme P n'a qu'une seule racine réelle définie par

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{D.4}$$

— Si $\Delta < 0$, le polynôme P a deux racines complexes conjuguées distinctes définies par

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \tag{D.5}$$

Si le polynôme est à coefficients complexes, la formule (D.3) est valable dans tous les cas, à condition de considérer δ une "racine" de Δ, toujours donnée par (D.2), c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. Dans ce cas, les deux racines, réelles ou complexes, de P (qui sont confondues si $\Delta = 0$) sont données par

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a}. \tag{D.6}$$

Voir par exempe [Bas22b, Annexe "Nombres Complexes", notamment la section "A.1.2. Résolution d'équation du second degré"].

Dans tous les cas, on a :

$$\text{le produit des deux racines de } P \text{ vaut } c/a\,; \tag{D.7a}$$

$$\text{la somme des deux racines de } P \text{ vaut } -b/a. \tag{D.7b}$$

Enfin, si le nombre b vaut

$$b' = 2b, \tag{D.8}$$

où b est un nombre quelconque, on a les formules réduites : l'équation (D.2) est remplacée par

$$\Delta' = b'^2 - ac, \tag{D.9}$$

Δ' est appelé le discriminant réduit et on a

— Si $\Delta' > 0$, l'équation (D.3) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}. \tag{D.10}$$

— Si $\Delta' = 0$, l'équation (D.4) est remplacée par

$$x = -\frac{b'}{a}. \tag{D.11}$$

— Si $\Delta' < 0$, l'équation (D.5) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}. \tag{D.12}$$

Si δ est un nombre tel que $\delta'^2 = \Delta$, la formule (D.6) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm \delta'}{a}. \tag{D.13}$$

Annexe E

Changement de variable informatique

Les changements de variables de la section 3.4.1 et 3.4.2 ont été programmé dans la fonction `changement_variable_integrale.m`, disponible à l'adresse habituelle.

Quelques exemples du cours, du TD ou des examens sont repris ci-dessous. Dans tous les cas, on remplace l'intégrale $\int_a^b f(u)du$ par l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)dx$. On donne a, b, f, ϕ, s, le sens (égal à 1 si on fait le calcul de la section 3.4.1 et -1 si c'est celui de la section 3.4.2) α, β, F et I, la valeur commune de l'ancienne intégrale et de la nouvelle (ces 4 derniers sont déterminés par la fonction`changement_variable_integrale.m`).

- Pour l'exemple 3.4 page 20 avec $R = 1$, on a

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1,\\
&f(u) = \sqrt{1-u^2},\\
&\phi(t) = \cos(t),\\
&s = 1,\\
&\alpha = 0,\\
&\beta = 1/2\,\pi,\\
&F(x) = \sqrt{(\sin(x))^2}\sin(x),\\
&I = 1/4\,\pi.
\end{aligned}
$$

- Pour l'exemple 3.7 page 22, on a

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1/2\,\pi,\\
&f(u) = (\cos(u))^2\sin(u),\\
&\phi(t) = \cos(t),\\
&s = -1,\\
&\alpha = 0,\\
&\beta = 1,\\
&F(x) = x^2,\\
&I = 1/3.
\end{aligned}
$$

- Pour la question 2 de l'exercice de TD 3.4, on a

$$
\begin{aligned}
&a = 1,\\
&b = 4,\\
&f(u) = \frac{u}{\sqrt{2\,u+1}},\\
&\phi(t) = 1/2\,t^2 - 1/2,\\
&s = 1,\\
&\alpha = \sqrt{3},\\
&\beta = 3,\\
&F(x) = -1/2 + 1/2\,x^2,\\
&I = 3.
\end{aligned}
$$

- Pour la question 4 de l'exercice de TD 3.4, on a

$$
\begin{aligned}
&a = 1,\\
&b = 4/3,\\
&f(u) = \frac{1}{u\sqrt{-1+u^2}},\\
&\phi(t) = t^{-1},\\
&s = 1,\\
&\alpha = 3/4,\\
&\beta = 1,\\
&F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
&I = 1/2\,\pi - \arctan\left(3/7\,\sqrt{7}\right).
\end{aligned}
$$

- Pour la question 5 de l'exercice de TD 3.4, on a

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1/2\,\pi,\\
&f(u) = \frac{\cos(u)}{6 - 5\,\sin(u) + (\sin(u))^2},\\
&\phi(t) = \sin(t),\\
&s = -1,\\
&\alpha = 0,\\
&\beta = 1,\\
&F(x) = \left(6 - 5\,x + x^2\right)^{-1},\\
&I = -\ln(3/4).
\end{aligned}
$$

- Pour l'exemple issu de l'examen du 11 octobre 2016 (exercice 3), on a

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1,\\
&f(u) = \left(3 + e^{-u}\right)^{-1},\\
&\phi(t) = e^{t},\\
&s = -1,\\
&\alpha = 1,\\
&\beta = e^{1},\\
&F(x) = \left(3\,x + 1\right)^{-1},\\
&I = 1/3 - 1/3\,\ln\left(4\,\left(3 + e^{-1}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

- Pour le premier changement de variable de la question 7 l'exercice de TD 3.4.

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1,\\
&f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^{2}}},\\
&\phi(t) = \tan\left(t\right),\\
&s = 1,\\
&\alpha = 0,\\
&\beta = 1/4\,\pi,\\
&F(x) = \sqrt{1 + \left(\tan\left(x\right)\right)^{2}},\\
&I = -\ln\left(\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

- Pour le second changement de variable de la question 7 l'exercice de TD 3.4.

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&b = 1/4\,\pi,\\
&f(u) = \sqrt{1 + \left(\tan\left(u\right)\right)^{2}},\\
&\phi(t) = \sin\left(t\right),\\
&s = -1,\\
&\alpha = 0,\\
&\beta = 1/2\,\sqrt{2},\\
&F(x) = \sqrt{-\left(-1 + x^{2}\right)^{-1}}\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}},\\
&I = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

Annexe F

Quelques calculs de primitives

Cette annexe correspond à [RDO88, section 7.1].

F.1. Primitives de fractions rationnelles

On rappelle que toute fraction rationnelle P se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$P = E + \sum_k \frac{A_k}{(X-a_k)^{\alpha_k}} + \sum_k \frac{A_k X + B_k}{(X^2+b_kX+c_k)^{\beta_k}},$$

où la partie principale E appartient à $\mathbb{R}[X]$, le deuxième terme correspond aux éléments de première espèce, et le troisième terme correspond aux éléments de seconde espèce (avec $X^2+b_kX+c_k$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$).

F.1.1. Calcul des éléments de première espèce

Une primitive de $1/(X-a)^\alpha$ est

$$\frac{(X-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \text{ si } \alpha \neq 1, \quad \ln|X-a| \text{ si } \alpha = 1.$$

F.1.2. Calcul des éléments de seconde espèce

On met le dénominateur de l'élément de seconde espèce sous sa forme canonique

$$X^2+bX+c = (X-p)^2+q^2,$$

où $q>0$ et on écrit

$$\int \frac{AX+B}{(X^2+bX+c)^\beta}dX = A\int \frac{X-p\,dX}{\big((X-p)^2+q^2\big)^\beta} + (B+Ap)\int \frac{dX}{\big((X-p)^2+q^2\big)^\beta}.$$

F.1.2.1. Calcul du premier terme.
En écrivant $X-p = \big((X-p)^2+q^2\big)'/2$, il vient

$$\boxed{\int \frac{X-p}{\big((X-p)^2+q\big)^\beta}dX = \begin{cases} \dfrac{1}{2(-\beta+1)}\big((X-p)^2+q^2\big)^{-\beta+1}, & \text{si } \beta\neq 1, \\ \dfrac{1}{2}\ln\big|(X-p)^2+q^2\big|, & \text{si } \beta = 1. \end{cases}}$$

F.1.2.2. Calcul du second terme.
En posant

$$u = q^{-1}(X-p),$$

il vient $q^2u^2 = (t-p)^2$ et donc

$$\int \frac{dX}{\big((X-p)^2+q^2\big)^\beta} = q^{1-2\alpha}\int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

Pour calculer ce terme, on a deux méthodes (il ne faudra pas oublier d'exprimer, à la fin, u en fonction de X)
Première méthode (pour α inférieur ou égal à 3)

On pose

$$u = \operatorname{tg}\phi,$$

On a donc

$$\phi = \text{Arc tg}\, u \text{ et } d\,\phi = \frac{du}{1+u^2}.$$

Ainsi, compte tenu de

$$\cos^2\phi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{1}{1+u^2},$$

on a

$$\boxed{\int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha} = \int \cos^{2(\alpha-1)}\phi\, d\phi.}$$

Cette fonction se calcule comme indiqué dans la section F.2.1

Seconde méthode (pour α supérieur à 4)

On pose

$$F_\alpha(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

Par intégration par partie, il vient avec

$$U = \frac{1}{(u^2+1)^\alpha} \quad U' = -\frac{\alpha}{(u^2+1)^{\alpha+1}}$$

$$V' = 1 \qquad V = u$$

$$\boxed{2\alpha F_{\alpha+1}(u) = \frac{u}{(u^2+1)^\alpha} + (2\alpha-1)F_\alpha(u).}$$

On peut conclure en initialisant cette relation de récurrence par

$$\boxed{F_1(u) = \text{Arc tg}\, u + k,}$$

où k est une constante.

Exemple F.1. Calculons

$$H(t) = \int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2} dt.$$

On peut écrire

$$H(t) = -\frac{1}{2}\int (t^2+t+1)'(t^2+t+1)^{-2}dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}. \tag{F.1}$$

Le premier terme de (F.1) est égal à

$$\frac{1}{2}(t^2+t+1)^{-1}.$$

On écrit le dénominateur du second terme de (F.1) sous sa forme canonique :

$$\frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}.$$

On fait le changement de variable

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right). \tag{F.2}$$

D'où

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du,$$

et le second terme de (F.1) est égal à

$$G(t) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 (u^2+1)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

En posant

$$u = \operatorname{tg}\phi, \tag{F.3}$$

on a

$$du = \left(1+\operatorname{tg}^2\phi\right) d\phi,$$

et

$$G(t) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{d\phi}{1+\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \cos^2\phi d\phi.$$

Par linéarisation, il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int (1+\cos 2\phi) d\phi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\phi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\phi.$$

Il faut revenir à la variable u (avec (F.3)) puis à la variable t (avec (F.2)). On pourrait donc écrire, selon (F.3), $\phi = \text{Arc tg}\, u$, d'où

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\, u + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\text{Arc tg}\, u\right).$$

Cependant, il est plus simple de remarquer que

$$\sin 2\phi = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{1+\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\, u + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{u}{1+u^2}.$$

D'après (F.2), on a

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

et donc

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)\right) + \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1}.$$

Bref, on a

$$\boxed{H(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)\right) + k.}$$

F.2. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux variables (c'est-à-dire, le rapport de deux polynômes à deux variables). On cherche des primitives de $f(t) = R(\cos t, \sin t)$.

Par exemple, si

$$R(X,Y) = \frac{3XY + 3X^2 + Y^4}{X + X^5Y^7},$$

alors

$$f(t) = \frac{3\cos t \sin t + 3\cos^2 t + \sin^4 t}{\cos t + \cos^5 t\, \sin^7 t}.$$

F.2.1. $R(X,Y)$ est un polynôme

Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \sin^p t \, \cos^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$.
Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \cos t \text{ (resp. } x = \sin t),$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.
Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en passant par les complexes.

Exemple F.2. Calculons

$$F(t) = \int \sin^3 t \, \cos^4 t \, dt.$$

Si on pose $x = \cos t$, on a $dx = -\sin t \, dt$; ainsi

$$F(t) = \int \cos^4 t \, \sin^2 t \, \sin t \, dt = \int \cos^4 t \, \left(1 - \cos^2 t\right) \, \sin t \, dt == -\int x^4 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + k.$$

Donc, en revenant à la variable t

$$\boxed{F(t) = \frac{\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^5 t}{5} + k.}$$

Exemple F.3. Calculons

$$F(t) = \int \sin^2 t \, \cos^4 t \, dt.$$

On linéarise simultanément $\sin^2 t$ et $\cos^4 t$ en utilisant les formules d'Euler :

$$\sin^2 t = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right)^2 = -\frac{1}{2^2}\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right).$$

et

$$\cos^4 t = \left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}\right).$$

En multipliant ces deux expressions, il vient

$$\sin^2 t \, \cos^4 t = -\frac{1}{2^6}\left(e^{6it} + e^{-6it} + 2e^{4it} + 2e^{-4it} - e^{2it} - e^{-2it} - 4\right),$$

et donc, en réutilisant les formules d'Euler,

$$\sin^2 t \, \cos^4 t = -\frac{1}{2^5}\left(\cos 6t + 2\cos 4t - \cos 2t - 2\right).$$

Par intégration, il vient donc

$$\boxed{F(t) = -\frac{\sin 6t}{192} - \frac{\sin 4t}{64} + \frac{\sin 2t}{64} + \frac{t}{16} + k.}$$

F.2.2. $R(X,Y)$ n'est pas un polynôme

F.2.2.1. Méthode générale.
On considère la nouvelle variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention, cette formule est valable sur tout intervalle $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$ où $m \in \mathbb{Z}$ et ce calcul fournira des primitives définies *a priori* sur $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$. On utilise les formules de trigonométrie qui permettent d'exprimer le sinus et le cosinus d'un angle en fonction de la tangente de l'arc moitié (voir proposition H.29 page 165)

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{F.4}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}. \tag{F.5}$$

En exprimant u en fonction de t, il vient

$$2\arctan u = t - 2m\pi \tag{F.6}$$

et

$$dt = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{F.7}$$

Ainsi, d'après (F.4), (F.5) et (F.7), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R(\cos t, \sin t)\,dt = \int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}.}$$

Nous donnons un exemple juste après.

F.2.2.2. Changement de variable simplificateurs (règles de Bioche).

si f est impaire, on pose $u = \cos t$.
si $f(\pi - t) = -f(t)$, on pose $u = \sin t$.
si $f(\pi + t) = f(t)$, on pose $u = \tan t$.

Avant d'appliquer la méthode générale, il faut toujours regarder si l'on peut d'abord appliquer l'une des trois règles de Bioche.

Exemple F.4. On calcule

$$F(t) = \int \frac{dt}{2+\sin t}.$$

Aucune des règles de Bioche n'est applicable et, d'après la méthode générale, on pose $u = \tan t/2$; ainsi,

$$F(t) = \int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u^2+u+1}.$$

Conformément à la méthode de calcul de primitives de fractions rationnelles, on écrit le dénominateur sous sa forme canonique

$$u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

et on pose

$$v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(u+\frac{1}{2}\right).$$

On a donc

$$du = \frac{\sqrt{3}}{2} dv$$

et

$$F(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dv}{\frac{3}{4}(v^2+1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan v + k.$$

En revenant à la variable u, on a

$$F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(u + \frac{1}{2}\right)\right) + k,$$

et, en revenant à la variable t, on a

$$\boxed{F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\right) + k.}$$

Exemple F.5. On calcule

$$F(t) = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^5 t} dt.$$

D'après la deuxième règle de Bioche ($f(\pi - t) = -f(t)$), on pose $u = \sin t$. On a donc

$$F(t) = \int \frac{1-u^2}{u^5} du = \int \frac{du}{u^5} - \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{4u^4} + \frac{1}{2u^2} + k' = -\frac{1}{4\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^2 t} + k'.$$

On peut simplifier cette expression :

$$F(t) = -\frac{1 - 2\sin^2 t}{4\sin^4 t} + k' = -\frac{1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t}{4\sin^4 t} + k,$$

où k est une autre constante réelle. Ainsi,

$$F(t) = -\frac{\left(1 - \sin^2 t\right)^2}{4\sin^4 t} + k$$

Et donc

$$\boxed{F(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{cotan}^4 t + k.}$$

F.3. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus hyperboliques

F.3.1. $R(X,Y)$ est un polynôme

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux variables. On cherche des primitives de $f(t) = R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \operatorname{sh}^p t \operatorname{ch}^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$. La méthode est identique au cas de la trigonométrie circulaire (cf. section F.2.1) :
Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \operatorname{ch} t \text{ (resp. } x = \operatorname{sh} t),$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.
Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en remplaçant sh et ch par leurs expressions en fonction de l'exponentielle.

F.3.2. $R(X,Y)$ n'est pas un polynôme

Les règles de Bioche ne fonctionnent pas ; mais la méthode de la section F.2.2.1 demeure valable :
On considère la nouvelle variable

$$u = \text{th}\ \left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention, cette formule est maintenant valable sur $\mathbb{R}$. On utilise les formules de trigonométrie hyperbolique qui permettent d'exprimer le sinushyperbolique et le cosinus hyperbolique d'un angle en fonction de la tangente hyperbolique de l'arc moitié

$$\text{ch}\ t = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \tag{F.8}$$

$$\text{sh}\ t = \frac{2u}{1-u^2}. \tag{F.9}$$

$$dt = \frac{2du}{1-u^2}. \tag{F.10}$$

Ainsi, d'après (F.8), (F.9) et (F.10), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R\left(\text{ch}\ t, \text{sh}\ t\right)\ dt = \int R\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right)\ \frac{2du}{1-u^2}}.$$

On peut aussi se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en considérant la nouvelle variable

$$x = e^t.$$

Ainsi

$$dx = e^t dt,$$

et

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R_1(e^t)\,dt = \int R_1(x)\,\frac{dx}{x},}$$

où R_1 est une fraction rationnelle.

Exemple F.6. Calculons

$$F(t) = \int \frac{dt}{\text{sh}\ t},$$

en posant $u = \text{th}\ (t/2)$:

$$F(t) = \int \frac{1-u^2}{2u}\,\frac{2du}{1-u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + k.$$

Ainsi

$$F(t) = \ln|\text{th}\ (t/2)| + k.$$

Exemple F.7. Calculons

$$F(t) = \int \frac{dt}{\text{sh}^3\, t + \text{ch}^3\, t - 1}.$$

On exprime les lignes trigonométriques en fonction de l'exponentielle :

$$F(t) = \int \frac{dt}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3 - 1} = 4\int \frac{dt}{e^{3t} + 3e^{-t} - 4} = 4\int \frac{e^t\,dt}{e^{4t} - 4e^t + 3}.$$

On pose $x = e^t$. Ainsi,

$$F(t) = \int \frac{dx}{x^4 - 4x + 3}.$$

On factorise le dénominateur sous la forme irréductible

$$x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2\left(x^2 + 2x + 3\right)$$

et on décompose en éléments simples. Tous calculs faits, on obtient :

$$\boxed{F(t) = -\frac{2}{3}\frac{1}{e^t-1} + \frac{2}{9}\ln\left(\frac{e^{2t}+2e^t+3}{(e^t-1)^2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{e^t+1}{\sqrt{2}}\right) + k.}$$

F.4. Intégrales abéliennes

Soit une fraction rationnelle $R \in \mathbb{R}(X,Y)$. Nous montrons dans cette section deux types de calculs de primitives ; dans la section F.4.1, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine n-ième d'une fonction homographique et dans la section F.4.2, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine d'un trinôme du second degré.

F.4.1. Fonction en racine n-ième d'une fonction homographique

Nous cherchons à déterminer

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

où n est un entier naturel non nul et a, b, c, et d sont des réels tels que $ad-bc \neq 0$ (si $ad-bc=0$, alors la fonction $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ est constante).

On pose

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Ainsi

$$y^n cx + y^n d = ax + b,$$

et

$$x = \frac{-y^n d + b}{y^n c - a}.$$

On a alors

$$dx = \frac{ny^{n-1}}{(cy^n-a)^2}(ad-bc)dy.$$

On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{F(x) = (ad-bc)\int R\left(\frac{-y^n d+b}{y^n c-a}, y\right)\frac{ny^{n-1}}{(cy^n-a)^2}\,dy.}$$

Exemple F.8. Soit à calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 + \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2},$$

on pose

$$y = \sqrt[6]{x}.$$

Ainsi

$$x = y^6 \text{ et } dx = 6y^5 dy.$$

D'où

$$F(x) = \int \frac{6y^5 dy}{y^3+y^2} = 6\int \frac{y^3 dy}{y+1}.$$

Après réduction en éléments simples, il vient

$$\boxed{F(x) = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\right) + k.}$$

F.4.2. Fonction en racine carré d'un trinôme du second degré

Nous cherchons à déterminer

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ (sinon, on se ramène au cas précédent avec $n = 2$). On considère le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Premier cas : $a < 0$.

Dans ce cas $\Delta > 0$ (sinon, ax^2+bx+c n'est positif que sur un singleton ou l'ensemble vide et, dans ce cas, F n'est pas définie). Ainsi, ilexiste $\alpha < \beta$ tels que

$$ax^2+bx+c = (-a)(x-\alpha)(\beta-x).$$

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha).$$

Si $x \in]\alpha, \beta[$, alors $t \in \mathbb{R}_+$. On a

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a},$$

et, après calculs,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = a\frac{(\alpha-\beta)t}{t^2-a} \text{ et } dx = -2a\frac{\alpha-\beta}{(t^2-a)^2}dt.$$

On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{F(x) = -2a(\alpha-\beta)\int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}, a\frac{(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\frac{1}{(t^2-a)^2}dt.}$$

Exemple F.9. Calculons

$$F(x) = \int \frac{x}{(-2x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

On a

$$-2x^2+x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(1-x).$$

On travaille donc sur l'intervalle $]-1/2, 1[$. On pose

$$\sqrt{-2x^2+x+1} = t\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, après calculs,

$$x = \frac{2-\frac{t^2}{2}}{t^2+2}.$$

et

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{9}\frac{x+2}{\sqrt{-2x^2+x+1}} + k.}$$

Deuxième cas : $a > 0$ et $\Delta < 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } -x\sqrt{a} + t.$$

On se ramène alors au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple F.10. Calculons

$$F(x) = \int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}.$$

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{x^2+x+1} = -x + t.$$

On a alors

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1} \text{ et } dx = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt.$$

Il vient donc

$$F(x) = 2\int \frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2}\,dt.$$

La fraction rationnelle à intégrer se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{2t+1} + \frac{\delta}{(2t+1)^2}.$$

Après calculs, il vient

$$\frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2} = -\frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{6}{2t+1} + \frac{3}{(2t+1)^2}.$$

Par intégration,

$$\begin{aligned} F(x) &= -3\ln|t| - \frac{1}{t} + 3\ln|2t+1| - \frac{3}{2}\frac{1}{2t+1}, \\ &= 3\ln\left|2+\frac{1}{t}\right| - \frac{1}{2}\frac{3t+2}{t(2t+1)}. \end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x selon

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x,$$

il vient

$$\boxed{F(x) = 3\ln\left|2+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\right| - \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{x^2+x+1}+3x+2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)}.}$$

Troisième cas : $a > 0$ et $\Delta > 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } -x\sqrt{a} + t.$$

Exemple F.11.

$$\boxed{\int \left(x^2+6x+5\right)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{4}(x+3)\left(x^2+6x-1\right)\sqrt{x^2+6x+5} + 6\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right| + k.}$$

Annexe G

Intégrales impropres

Dans le cadre de l'intégrale [1], on a défini des intégrales du type

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{G.1}$$

où f est une fonction continue sur $[a,b]$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

Il est possible d'étendre cette définition dans les cas où

- f n'est continue que sur $]a,b[$ ou $[a,b[$ ou $]a,b]$ et n'admet pas de limite (ou une limite infinie) et a et/ou en b ;
- a et/ou b sont infinis.

De façon plus générale, on considère deux réels (finis ou infinis) $a \in \mathbb{R} \cup -\infty$ et $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ on définira l'intégrale dite "impropre" suivantes :

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{G.2}$$

de la façon suivante :
Si f continue sur $[a,b[$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx, \tag{G.3a}$$

si f continue sur $]a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx, \tag{G.3b}$$

si f continue sur $]a,b[$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c \to a \\ d \to b}} \int_c^d f(x)dx. \tag{G.3c}$$

en supposant que les limites évoquées existent.

Par exemple, on aura l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$
$$\int_0^1 \ln(x)dx,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

1. dite de Riemann qui est le cas de ce cours

Il existe en outre des techniques spécifiques pour montrer que ces différentes intégrales existent sans en connaître nécessairement des primitives. Voir par exemple [RDO88, section 7.2]. Voir aussi les exercices de TD 3.2 (questions 3b), et 3.7.

Annexe H

Trigonométrie

H.1. Rappels et définitions de base

Section issue et adaptée de [Bas18, Chapitre 3].

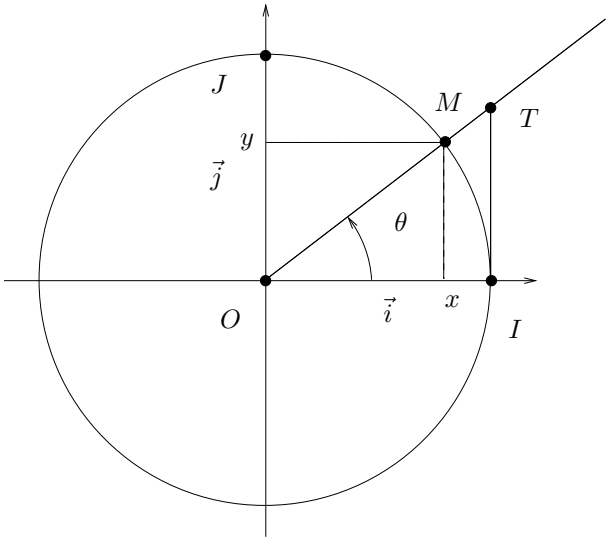


FIGURE H.1. Le cercle trigonométrique.

Dans tout ce chapitre, les angles sont orientés dans le sens trigonométrique (antihoraire).
On rappelle la définition des lignes trigonométriques (voir figure H.1) :
On se donne $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct.
Soit θ un angle (en radians ou en degrés). On considère le point M, de coordonnées x et y telles que

$$\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right) = \theta.$$

Le triangle[1] OxM est rectangle en x ; ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{H.1}$$

Le radian est récent dans les mathématiques ; pourquoi l'utilise-t-on ? Voir par exemple la section H.3.2 ou `http://fr.wikipedia.org/wiki/Radian` ♢

Par définition, on a

$$x = \cos\theta, \tag{H.2a}$$

$$y = \sin\theta. \tag{H.2b}$$

1. Par abus de notation, on confond x et le point $(x, 0)$

Autrement dit $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont définis comme étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M.

Cette équation fournit donc x et y en fonction de θ. D'après (H.1), on obtient la première formule de trigonométrie [2] :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{H.3}$$

Ici, on note $\cos^2\theta$ à la place de $(\cos\theta)^2$.

Réciproquement, si deux réels x et y de $[-1, 1]$ vérifient (H.1), il existe un unique θ vérifiant (H.2). Cet angle est défini modulo 2π radians ou 360 degrés. Grâce à la calculatrice, il faudrait utiliser les fonction réciproques des fonctions cos et sin, en faisant attention au quart de plan où se trouve le point M (voir la remarque H.7) ! On rappelle que l'on passe des degrés aux radians en utilisant la mesure d'un angle plat : 180 ° ou π radians. On a donc, d'après la règle de trois, si θ_{r} désigne la mesure d'un angle en radians et $\theta_\circ$ en degrés, on a

$$\theta_\circ = \theta_{\mathrm{r}} \times \frac{180}{\pi},$$
$$\theta_{\mathrm{r}} = \theta_\circ \times \frac{\pi}{180}.$$

Remarquons aussi, que si θ n'est pas un multiple impair d'un angle droit $\pi/2$, la droite (OM) coupe la droite perpendiculaire à (OI) passant par I au point T (voir figure H.1). Notons t l'ordonnée de T. D'après le théorème de Thalès, il vient

$$\frac{xM}{IT} = \frac{Ox}{OI},$$

soit

$$\frac{\sin\theta}{t} = \frac{\cos\theta}{1}, \tag{H.4}$$

et donc

$$t = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{H.5}$$

On a donc une lecture graphique de la tangente, définie comme

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{H.6}$$

Cette relation est vraie tant que θ n'est pas un multiple impair d'un angle droit. Le domaine de définition D de la tangent est donc donné (si on exprime les angles en radians) par

$$D = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\,\frac{\pi}{2}. \tag{H.7}$$

2. Et elles sont légions !

PROPOSITION H.1. *On a (pour des angles exprimés en radians) :*

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad & \cos(x) \in [-1,1], && \text{(H.8a)}\\
& \sin(x) \in [-1,1], && \text{(H.8b)}\\
& \cos(-x) = \cos x, && \text{(H.8c)}\\
& \sin(-x) = -\sin x, && \text{(H.8d)}\\
& \cos(x+\pi) = -\cos x, && \text{(H.8e)}\\
& \sin(x+\pi) = -\sin x, && \text{(H.8f)}\\
& \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, && \text{(H.8g)}\\
& \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, && \text{(H.8h)}\\
& \cos(x+2\pi) = \cos x, && \text{(H.8i)}\\
& \sin(x+2\pi) = \sin x, && \text{(H.8j)}\\
\forall x \in D, \quad & \tan(-x) = -\tan x, && \text{(H.8k)}\\
& \tan(x+\pi) = \tan x, && \text{(H.8l)}\\
& \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. && \text{(H.8m)}
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Démonstrations simples, laissées au lecteur et qui peuvent se faire de façon géométrique. Démontrons la dernière formule (H.8m) qui provient de

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

□

PROPOSITION H.2.

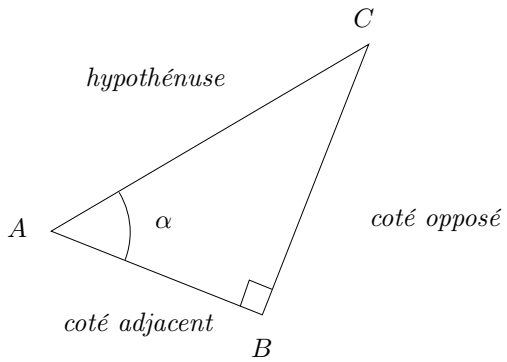


FIGURE H.2. L'angle α dans la triangle rectangle ABC.

On considère un triangle rectangle ABC et α l'un des deux angles non droits (voir figure H.2 page précédente). On a, par rapport à cet angle :

$$\cos\alpha = \frac{\textit{coté adjacent}}{\textit{hypothénuse}}, \tag{H.9a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\textit{coté opposé}}{\textit{hypothénuse}}, \tag{H.9b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\textit{coté opposé}}{\textit{coté adjacent}}. \tag{H.9c}$$

Démonstration. En effet, les triangles OxM de la figure H.1 et ABC de la figure H.2 sont semblables (ils ont les mêmes angles) et le théorème de Thalès permet de conclure sur les égalités respectives de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ avec $\frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$ et $\frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}}$. De même le triangles OIT de la figure H.1 et ABC de la figure H.2 sont semblables (ils ont les mêmes angles) et le théorème de Thalès permet de conclure sur l'égalité $\tan\alpha$ et avec $\frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$. □

Remarque H.3. On peut aussi introduire des angles de vecteurs, définis modulo 2π ou 360.

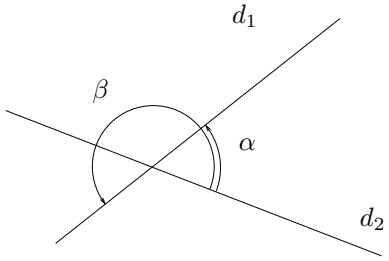


Figure H.3. Angle de droites.

De même, on parle d'angle de droites, définis cette fois-ci modulo π ou 180. Sur la figure H.3, on a représenté les deux mesures identiques α et β de l'angle entre les droites d_1 et d_2.

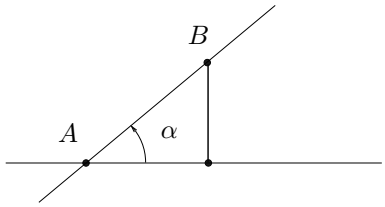


Figure H.4. Angle de droite et l'horizontale.

Grâce à la proposition H.2, on peut montrer (voir figure H.4) que si α désigne l'angle entre la droite (AB) et l'horizontale (portée par $\vec{i}$), alors

$$\tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \tag{H.10}$$

Remarque H.4. Grâce à (H.10) et la notion de pente d'une droite vue on peut maintenant comprendre le rapport entre entre la pente d'une droite et celle d'une route, donnée en pourcentage et qui coïncident. En effet, la notion de pente a d'une droite, signifie que si on se déplace d'un pas vers la droite, on monte de a sur la droite (si a est positif) ou on descend de $|a|$ (si a est négatif). Pour une route, c'est identique : la pente de la route (si elle est droite) est la pente de la droite. Puisque'elle est exprimée en pourcentage, un pente de $p\%$ signifie que si on se déplace de 100 m., à l'horizontal (et non en suivant la route !), alors on monte de p m.

Pentes (%)	Angles (degrés)	Angles (radians)	Pentes
100	45	0.78539816	1
15	8.53076561	0.14888995	0.15
5	2.86240522	0.04995839	0.05
1	0.57293870	0.00999967	0.01
0.2	0.11459141	0.00200000	0.0020
0	0	0	0

TABLE H.1. Le rapport entre pente et angle, en degré ou en radian

Ainsi, d'après ou (H.10) appliqués avec $y_B - y_A = p$ et $x_B - x_A = 100$, on a alors le lien entre la pente p (en pourcentage) et l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{p}{100}. \tag{H.11}$$

soit encore

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p}{100}\right). \tag{H.12}$$

Par exemple une pente de valeur $p = 5\%$ correspond à un angle donné par

$$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{100}\right) = 2.8624°. \tag{H.13}$$

Voir aussi le tableau H.1, qui montre l'avantage du radian par rapport au degré ! En effet, les données de la dernière colonne (p exprimé de façon absolue, sans pourcentage) sont de plus en plus proches de celle de la troisième colonne (angles en radians) quand la pente est faible.

REMARQUE H.5. En effet, si p est exprimé de façon absolue, l'égalité (H.11) devient

$$\tan\alpha = p. \tag{H.14}$$

Si α est "petit", on a

$$\tan\alpha \approx \alpha \tag{H.15}$$

et donc, (H.14) fournit

$$\alpha \approx p.$$

Cela n'est valable que quand *l'angle est en radian* ! L'égalité (H.15) sera justifiée dans la section H.3.2. Cela nous montre que *le radian est l'unité légale des lignes trigonométriques.* Dès que l'on utilisera le résultats de dérivée de la section H.3.2, *les angles doivent être absolument exprimés en radians !*

DÉFINITION H.6. On évoque aussi les coordonnées polaire (r, θ) de la façon suivante (voir figure H.5 page suivante) : un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) a pour coordonnées polaires (r, θ) où r est la distance OM et θ l'angle $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$. On a donc

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{H.16a}$$

$$x = r\cos\theta, \tag{H.16b}$$

$$y = r\sin\theta \tag{H.16c}$$

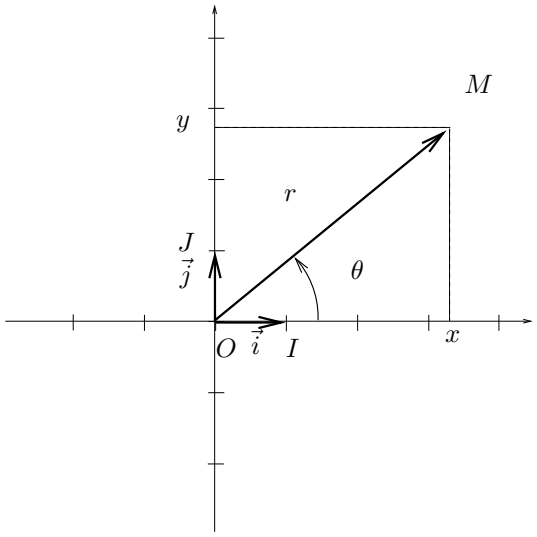


FIGURE H.5. Les coordonnées cartésiennes et polaires

Si x et y sont connus, on détermine d'abord r. On cherche ensuite l'unique angle θ vérifiant

$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \tag{H.17a}$$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta \tag{H.17b}$$

ce qui est possible puisque les deux nombres $X = x/r$ et $Y = y/r$ vérifient $X^2 + Y^2 = 1$.

Remarquons que les équations (H.2a) et (H.2b) sont un cas particulier de (H.16b) et (H.16c).

REMARQUE H.7. La fonction atan_2, utilisée par Matlab (de nom `atan2`) est souvent utilisée pour définir l'angle polaire θ en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y), vérifiant

$$x = r\cos\theta, \tag{H.18a}$$

$$y = r\sin\theta, \tag{H.18b}$$

grâce à l'égalité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \quad \theta = \text{atan}_2(y,x), \tag{H.19}$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \text{atan}_2(y,x). \tag{H.20}$$

Voir par exemple l'annexe I.

♢

La trigonométrie, associée à une calculatrice, constitue en fait « un rapporteur numérique ». En effet, elle nous donne les liens qui existent entre les cotés et les angles dans un triangle. Avec une calculatrice, elle permet de tracer ou de mesurer des angles, sans rapporteur !

(1)

En effet, si un angle $\theta = (\widehat{Ox, Oy})$ (aigu) est donné sur une figure (voir figure H.6 page suivante), on trace un triangle OAB rectangle et on cherche à déterminer θ vérifiant

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB},$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB}$$

grâce aux fonctions réciproques.

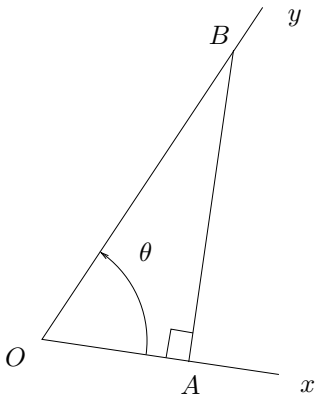


FIGURE H.6. Mesurer un angle avec la trigonométrie

EXERCICE H.8.
Mesurer de cette façon l'angle θ de la figure H.6.

(2)

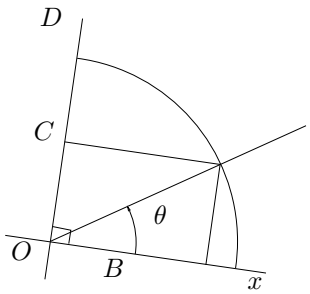


FIGURE H.7. Tracer un angle avec la trigonométrie

Réciproquement, si on veut tracer un angle θ donné, à partir d'une demi-droite $[Ox)$ (voir figure H.7), on calcule son cosinus (resp. sinus) ; on trace ensuite un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R quelconque, puis on trace le point $B \in [Ox)$ (resp. le point C sur D, la droite perpendiculaire $[Ox)$, passant par O) tel que $OB = R\cos\theta$ (resp. $OC = R\sin\theta$). Enfin, on trace M l'intersection de la droite passant par B (resp. C) perpendiculaire à $[Ox)$ (resp. D) et du cercle $\mathcal{C}$. On a alors

$$\theta = \widehat{[Ox, \overrightarrow{OM}}.$$

Sans compas on peut aussi utiliser simultanément le sinus et le cosinus, ou alors la tangente seule.

EXERCICE H.9.
Tracer de même un angle égal à $27,3°$

Rappelons pour finir une règle empirique pour se rappeler les lignes trigonométriques de quelques angles remarquables : on remplit successivement un tableau de la manière suivante (voir calcul de ces lignes trigonométriques particulières dans l'exercices H.14) :

(1) On remplit la ligne des sinus avec les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et celles de cosinus avec les mêmes valeurs, dans l'ordre inverse :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	4	3	2	1	0
$\sin\theta$	0	1	2	3	4

(2) On prend la racine carrés de ces nombres :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$
$\sin\theta$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

(3) On divise les nombres obtenus par 2 :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\sin\theta$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$

(4) On simplifie les nombres obtenus et on obtient les différentes valeurs exactes des sinus et des cosinus :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

H.2. Quelques exercices

H.2.1. Énoncés

Exercice H.10.

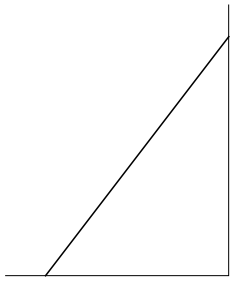


Figure H.8. Une échelle.

Une échelle, qui mesure 5 m., est adosée à un mur. La distance du pied de l'échelle au pied du mur est de 2,5 m. Donner l'angle entre l'échelle et le sol.

Voir éléments de correction page 151.

Exercice H.11.

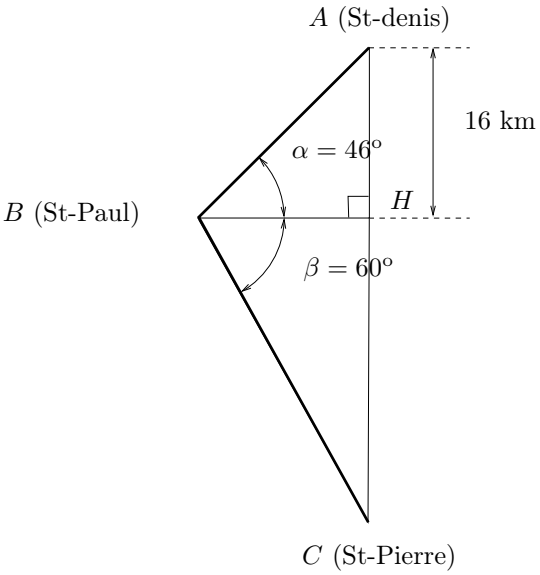


Figure H.9. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

Un oiseau veut aller de St-Denis à St-Pierre en passant par St-Paul (distance en gras sur la figure H.9).

(1) Tracer sur une feuille la figure H.9, avec une échelle appropriée, pour vérifier que le problème est bien posé.

(2) Calculer la distance totale parcourue par l'oiseau.

Voir éléments de correction page 152.

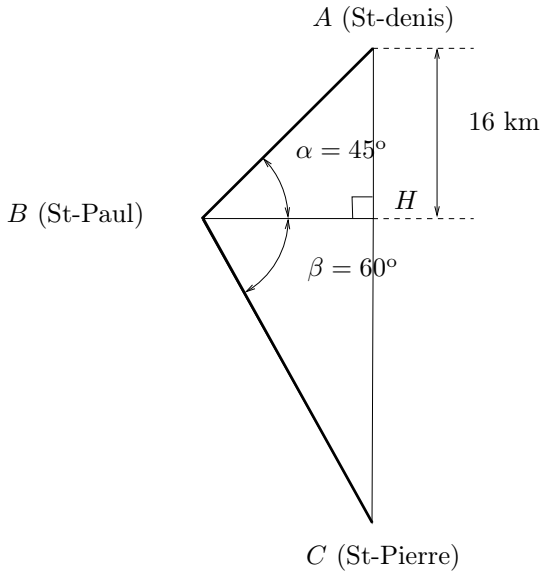


FIGURE H.10. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

EXERCICE H.12.

Refaire la même chose pour la figure H.10, sans aucun calcul de trigonométrie ! Seule la valeur de α a changé !

Voir éléments de correction page 153.

EXERCICE H.13.

Donnons une application directe de la trigonométrie. On se donne une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $v_0 = 10$ ms^{-1} et qui fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.

(1) Faire une figure et y tracer v_{0x} et v_{0y}, les composantes horizontales et verticales de la vitesse, c'est-à-dire, l'abscisse et l'ordonnée du vecteur $\vec{v}_0$.

(2) Calculer v_{0x} et v_{0y}.

Voir éléments de correction page 153.

EXERCICE H.14.

(1) (a) Tracer, à la règle est au compas, un triangle équilatéral de coté 1.

(b) En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\pi/3$ (ou 60°).

(2) Faire de même pour le tracer et le calcul des lignes trigonométriques de $\pi/6$.

(3) Faire de même pour le tracer et le calcul des lignes trigonométriques de $\pi/4$.

Voir éléments de correction page 153.

EXERCICE H.15.

Sauriez-vous tracer à la règle et au compas la construction du pentagone et en déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $2\pi/5$?

Voir éléments de correction page 156.

H.2.2. Corrections

CORRECTION DE L'EXERCICE H.10

D'après la propriété H.2 page 144, on a

$$\cos\alpha = \frac{2.5}{5} = 0,5.$$

En calculant le rapport de droite et en utilisant la fonction réciproque de la fonction sinus, on trouve (attention aux unités)

$$\alpha = 60^{\text{o}}$$

Correction de l'exercice H.11

(1) En utilisant le fait que dans le triangle ABH, la somme des deux angles non droits est égale à $\pi/2$, on peut tracer la figure : on trace successivement et dans cet ordre : H, A, B, puis C.

(2) Dans le triangle rectangle AHB, on a

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB},$$

et donc

$$AB = \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{16}{\sin(46)} = 22.242$$

On en déduit ensuite de même

$$BH = \frac{AH}{\tan\alpha} = \frac{16}{\tan(46)} = 15,451$$

De même, dans le triangle rectangle BHC, on a

$$\cos\beta = \frac{BH}{BC},$$

et donc

$$BC = \frac{BH}{\cos\beta} = \frac{15,451}{\cos(60)} = 30,902$$

et donc, on a (en km), $L = AB + BC$, soit encore

$$L = 53,144. \tag{H.21}$$

Remarque H.16. On vous demandera de faire un calcul littéral en gardant les symboles « le plus longtemps possible » et de ne faire l'application numérique à la fin. Il serait donc préférable pour cet exercice d'écrire plutôt pour le corrigé de la question 2 :

$$AB = \frac{AH}{\sin\alpha},$$

puis

$$BH = \frac{AH}{\tan\alpha},$$

et enfin

$$BC = \frac{BH}{\cos\beta},$$

qui devient donc

$$BC = \frac{AH}{\tan\alpha\cos\beta}.$$

Ainsi, $L = AB + BC$ et donc

$$L = \frac{AH}{\sin\alpha} + \frac{AH}{\tan\alpha\cos\beta}. \tag{H.22}$$

soit encore

$$L = AH\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha\cos\beta}\right). \tag{H.23}$$

L'application numérique fournit alors

$$L = 16 \times \left(\frac{1}{\sin(46)} + \frac{1}{\tan(46)\cos(60)} \right), \tag{H.24}$$

ce qui donne naturellement la même valeur que (H.21).

Correction de l'exercice H.12

L'angle $\widehat{HAB}$ est égal à $\alpha = 45$; ainsi, HAB est isocèle et

$$BH = 16 \tag{H.25}$$

Grâce au théorème de Pythagore, on en déduit que

$$AB = 16 \times \sqrt{2} = 22,627.$$

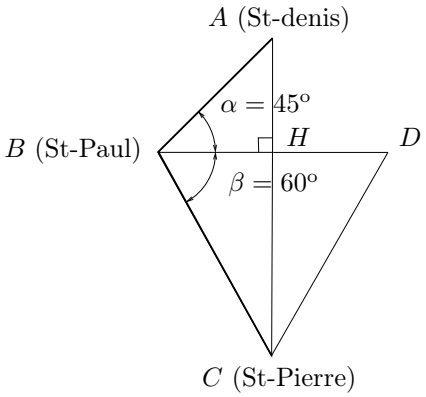


Figure H.11. la triangle BDC équilatéral.

Par ailleurs, si l'on trace le point D symétrique de B par rapport à (AC) (voir figure H.11), on constate que, par symétrie, $\widehat{HDC} = \beta = 60^{\text{o}}$, donc BDC est équilatéral et donc, grâce à (H.25),

$$BC = BD = 2BH = 32$$

et donc

$$L = AB + BC = 22,62753 + 32 = 54,627. \tag{H.26}$$

ce qui est légèrement différent de (H.21).

Correction de l'exercice H.13

Le « triangle » v_{0x}, $\vec{v}_0$ et v_{0y} est rectangle. On en tire

$$\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0},$$
$$\sin\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0},$$

et donc

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 10\cos 30 = 8,6602,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 10\sin 30 = 5.$$

Correction de l'exercice H.14

(1)

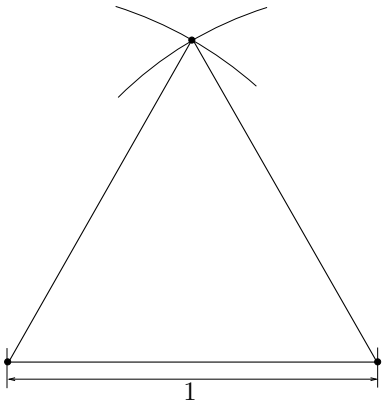


FIGURE H.12. Tracé d'un triangle équilatéral.

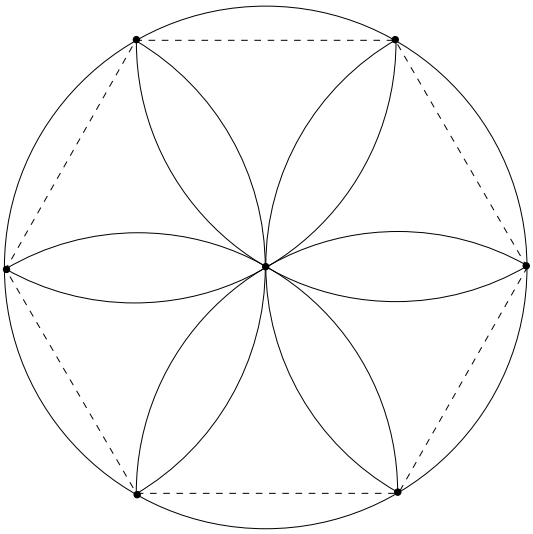


FIGURE H.13. La rosace (et l'héxagone qui la soutent, en pointillé).

(a)

On renvoie à la figure H.12.

Si on répète cette figure, on obtient la célèbre rosace que tracent tous les écoliers (figure H.13). Voir par exemple `https://blogdemaths.wordpress.com/2013/08/18/comment-tracer-un-hexagone-regulier/`.

(b)

On peut prolonger les cercles de l'autre cotés de la base du triangle équilatéral construit, comme le montre la figure H.14, et en déduire la construction de la médiatrice (IC) du segment $[AB]$, le point I étant le milieu de $[AB]$. La droite (IC) est donc aussi perpendiculaire à (AB). Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Par définition, on a aussi

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = AI.$$

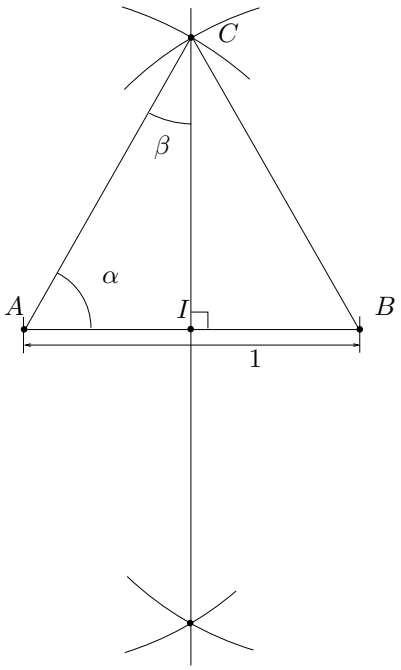


FIGURE H.14. Valeurs du sinus et du cosinus de $\pi/3$.

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a donc $AI = 1/2$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \tag{H.27}$$

Par définition, on a aussi

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = IC,$$

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle AIC, on a

$$IC = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{H.28}$$

(2)

(a)

Il suffit de faire la figure H.14 et de remarquer que si on pose

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}\right) = \beta,$$

alors, puisque $\alpha + \beta = \pi/2$, on a

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

(b) On déduit donc finalement de (H.8g), (H.8h), (H.27) et (H.28) que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{H.29a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \tag{H.29b}$$

(3)

(a)

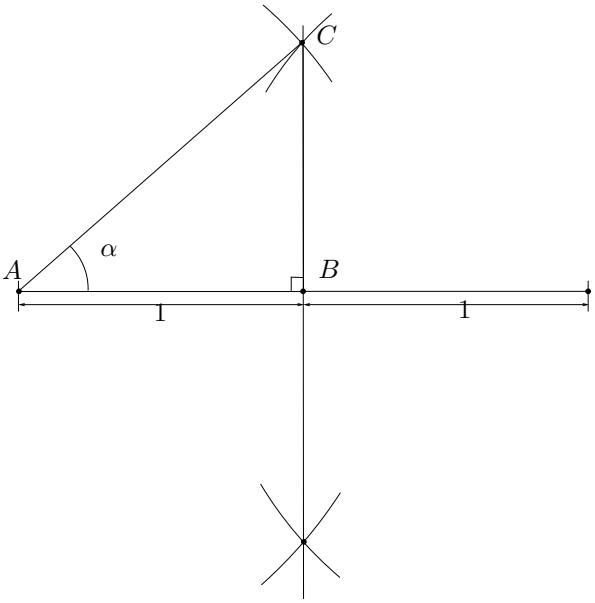


FIGURE H.15. Un triangle rectangle isocèle de coté 1.

Il suffit de tracer facilement à la règle et au compas, un triangle rectangle isocèle de coté 1, comme le montre la figure H.15, ce qui fait apparaître l'angle α défini par

$$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Le théorème de Pythagore donne donc

$$AB = \sqrt{2}$$

et, par exemple, en utilisant (H.9), on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{H.30a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{H.30b}$$

REMARQUE H.17. Si on sait construire à la règle et au compas, une certaine longueur, on sait qu'il est possible de calculer cette longueur en fonction d'un certain nombre de symbole $\sqrt{\ }$. Plus de détails dans [Car84] où sont proposées d'autres constructions, notamment de polygones réguliers.

♢

CORRECTION DE L'EXERCICE H.15

Voir [Bas22b, section "Plusieurs problèmes de géométrie" de l'annexe "Nombres complexes"].

H.3. Autres rappels

La plupart des résultats présentés dans cette sections peuvent être facilement obtenus en passant dans le corps des complexes et en utilisant l'exponentielle complexe (voir par exemple [Bas22b, "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$" et annexe "Nombres complexes"]), qui sont parfois présentés ici. Ici le parti pris consiste aussi à présenter des preuves purement géométriques et d'en déduire éventuellement d'autres résultats par des calculs algébriques simples.

H.3.1. Sommes d'angles et angles doubles

PROPOSITION H.18. *On a*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \tag{H.31a}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a. \tag{H.31b}$$

DÉMONSTRATION. Montrons que (H.31) est vraie.

Proposons plusieurs preuves du résultat (H.31), en finissant par une preuve géométrique pure.

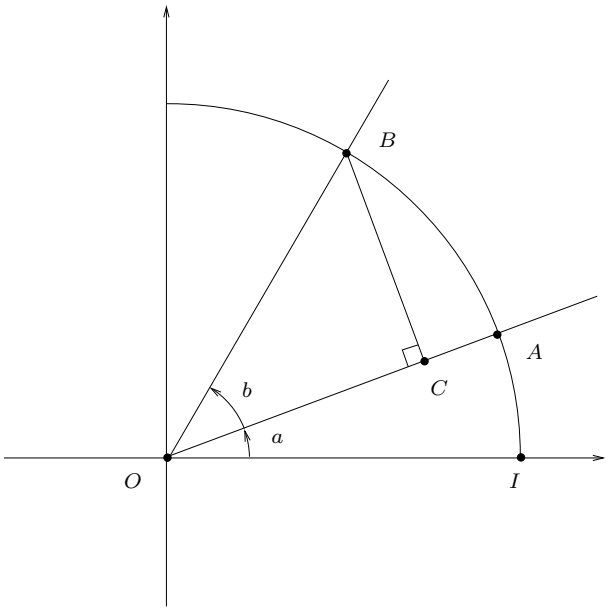


FIGURE H.16. les angles a et b.

On considère (voir figure H.16) le cercle trigonométrique de centre O, A et B, deux points de ce cercle qui définissent les angles a et b, ainsi que C, le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), de sorte que

$$OC = \cos b, \tag{H.32a}$$

$$CB = \sin b. \tag{H.32b}$$

(1) De façon vectorielle, on a (dans la base vectorielle habituelle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$)

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \tag{H.33}$$

et si on fait tourner ce vecteur par une rotation d'angle $\pi/2$, on obtient

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix} \tag{H.34}$$

Ainsi, on écrit, d'après (H.32), (H.33) et (H.34) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB},\\ &= OC\,\overrightarrow{OA} + CB\,\overrightarrow{u},\\ &= \cos b \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} + \sin b \begin{pmatrix}-\sin a\\ \cos a\end{pmatrix},\\ &= \begin{pmatrix}\cos a\cos b - \sin a \sin b\\ \sin a \cos b + \sin b \cos a\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On conclue en identifiant avec la définition

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos(a+b)\\ \sin(a+b)\end{pmatrix}.$$

(2) Faisons ce calcul plus rapidement en utilisant l'exponentielle complexe, qui ne fait que traduire tout cela de façon (voir par exemple [Bas22b, Annexe "Nombres complexes"]). On écrit

$$z_B = z_A e^{ib} = e^{ia}e^{ib},$$

et donc

$$\begin{aligned}e^{(a+b)i} &= e^{ia}e^{ib},\\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b),\\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b),\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure en remplaçant $e^{(a+b)i}$ par sa valeur et en prenant partie réelle et imaginaire :

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b).$$

Remarque H.19. Cette preuve, très simple, peut constituer un moyen mnémotechnique pour retrouver ce résultat !

(3) Faisons ce calcul de façon maintenant purement géométrique.
Nous nous restreignons ici, pour cela, au cas où a et b sont dans $]0, \pi/2[$ et tels que $a+b \in]0\pi/2[$. On laisse au lecteur le soin d'en déduire de façon algébrique que le résultat montré est encore vrai pour tout a et b dans $\mathbb{R}$.

(a)

Aux points déjà introduits dans la figure H.16, on rajoute (voir figure H.17) :

- D, le projeté orthogonal de A sur l'axe des x ;
- E, le projeté orthogonal de C sur l'axe des x ;
- F, le projeté orthogonal de B sur l'axe des x ;
- G, l'intersection de (BF) avec (OA) ;
- H, le projeté orthogonal de C sur la droite (BF).
- J, le projeté orthogonal de G sur la droite (CE).

Ainsi, on

$$\left(\widehat{\overrightarrow{GJ}, \overrightarrow{GC}}\right) = a,$$

et donc, puisque le triangle CHB est rectangle,

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{GH}}\right) = \frac{\pi}{2} - a,$$

et puisque le triangle GCB est rectangle, on a

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{GH}}\right) = a,$$

et donc

$$HC = BC \sin a,$$

et donc, d'après (H.32b)

$$HC = \sin a \sin b. \tag{H.35}$$

Par ailleurs, dans le triangle rectangle OFG, on a

$$\frac{OF}{OG} = \cos a,$$

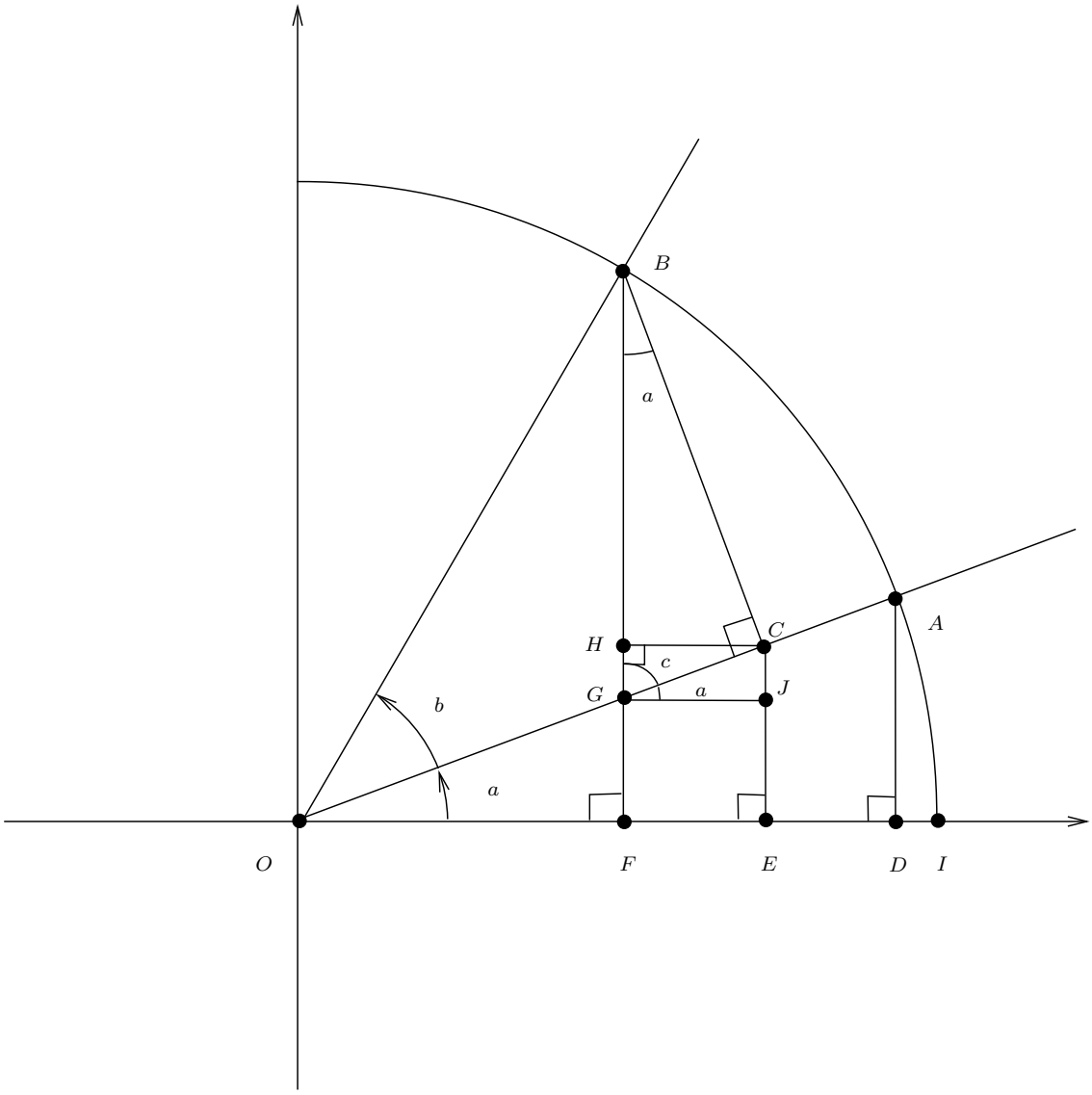


FIGURE H.17. les angles a, b et $c = \pi/2 - a$ et les points A à J.

et on a successivement

$$\begin{aligned} OF &= OG\cos a, \\ &= (OC - CG)\cos a, \end{aligned}$$

et, d'après (H.32a)

$$OF = \cos a \cos b - CG\cos a. \tag{H.36}$$

On a aussi, dans le triangle rectangle CGJ :

$$\frac{GJ}{CG} = \cos a.$$

et donc, d'après (H.36),

$$OF = \cos a \cos b - GJ,$$

et donc

$$OF = \cos a \cos b - HC. \tag{H.37}$$

Enfin, d'après (H.35) et (H.37), il vient donc

$$OF = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

ce qui nous montre que

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \tag{H.38}$$

(b) On peut faire une autre preuve géométrique mais il est plus rapide d'appliquer (H.38) à $\pi/2 - a$ et b de sorte que l'on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$

et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

et donc

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

et en remplaçant b par $-b$:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \tag{H.39}$$

□

♢

PROPOSITION H.20. *On a*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}, \quad \cos(P) - \cos(Q) = -2\sin\left(\frac{P+Q}{2}\right)\sin\left(\frac{P-Q}{2}\right), \tag{H.40a}$$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}, \quad \sin(P) - \sin(Q) = 2\sin\left(\frac{P-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{P+Q}{2}\right). \tag{H.40b}$$

DÉMONSTRATION. En effet, on écrit (H.31a) et la même égalité appliquée à $-b$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

et par différence

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b. \tag{H.41}$$

On cherche P et Q tels que

$$a + b = P, \tag{H.42a}$$
$$a - b = Q, \tag{H.42b}$$

ce qui donne, par demi-somme et demi-différence :

$$a = \frac{P+Q}{2}, \tag{H.43a}$$
$$b = \frac{P-Q}{2}. \tag{H.43b}$$

Si on remplace (H.42) et (H.43) dans (H.41), il vient

$$\cos P - \cos Q = -2\sin\left(\frac{P+Q}{2}\right)\sin\left(\frac{P-Q}{2}\right),$$

ce qui est (H.40a).

On écrit aussi (H.31b) et la même égalité appliquée à $-b$:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

et par différence

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b. \tag{H.44}$$

Si on remplace (H.42) et (H.43) dans (H.44), il vient

$$\sin P - \sin Q = 2\cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\sin\left(\frac{P-Q}{2}\right),$$

ce qui est (H.40b).

□

♢

PROPOSITION H.21. *Pour tout x réel*

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \tag{H.45a}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \tag{H.45b}$$

DÉMONSTRATION. Elles viennent de (H.31b) où $x = a = b$, ce qui donne immédiatement (H.45a) puis de (H.31a) où $x = a = b$, ce qui donne

$$\cos(2x) = \cos^2 - \sin^2 x$$

Si on utilise (H.3) en remplaçant θ par x, puis $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x.$$

Si on utilise (H.3) en remplaçant θ par x, puis $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on obtient

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

□

PROPOSITION H.22. *On a pour tous réels a et b appartenant à D (défini par* (H.7)*) tels que $a+b$ appartienne à D, on a*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \tag{H.46}$$

DÉMONSTRATION. Sous les hypothèses faites, on peut écrire successivement, d'après (H.31)

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)},\\ &= \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b},\end{aligned}$$

et comme $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$, en divisant par $\cos a \cos b$:

$$\begin{aligned}&= \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a}\dfrac{\sin b}{\cos b}},\\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\end{aligned}$$

□

PROPOSITION H.23. *Pour tout x réel appartenant à D (défini par* (H.7)*) tel que $2x$ appartienne à D, on a*

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}, \tag{H.47}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition H.22 à $x = a = b$. □

H.3.2. Dérivées des fonctions trigonométriques

Reprenons la remarque H.5 fondée sur le fait que pour θ proche de zéro et exprimé en radian, on a

$$\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta, \tag{H.48}$$

ce que nous allons montrer maintenant. Ainsi, *pour toute la suite, θ est exprimé en radians !*

PROPOSITION H.24. *On a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{H.49a}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{H.49b}$$

$$\forall x \in D, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \tag{H.49c}$$

On procède en plusieurs étapes.

(1) Commençons par montrer le résultat suivant :

LEMME H.25.

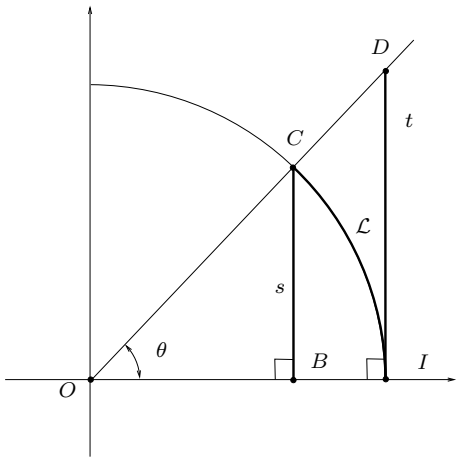


FIGURE H.18. La longueur de l'arc de cercle $\mathcal{L}$, s et t.

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et le cercle de centre O et de rayon r (voir figure H.18.) On considère C le point du cercle définissant l'angle θ, B son projeté orthogonal sur l'axe de x, I le point de l'axe des x d'abscisse 1 et D le point de la droite (OC) d'abscisse 1. On note $s = BC$, $\mathcal{L}$, la longueur de l'arc engendré par l'arc de cercle de centre O et défini par l'angle θ et $t = IB$. On a alors

$$s < \mathcal{L} < t, \tag{H.50}$$

et

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta. \tag{H.51}$$

DÉMONSTRATION. Dans le (vrai) triangle rectangle CBI, l'hypoténuse CI est strictement plus grande que le coté BC. La longueur $\mathcal{L}$ est strictement plus grande que la corde CI et on a donc

$$s < \mathcal{L}. \tag{H.52}$$

L'angle θ étant dans $]0, \pi/2[$, le segment le segment $[ID]$ est à l'extérieur du cercle. On en déduit que l'aire de la portion de disque délimitée par θ est strictement plus petite que l'aire du triangle ODI. Ces aires sont respectivement égales à $\theta r^2/2$ et $rt/2$. Puisque

$$\mathcal{L} = r\theta,$$

ces aires valent donc respectivement $\mathcal{L}r/2$ et $tr/2$ et on a donc

$$\frac{\mathcal{L}r}{2} < \frac{tr}{2},$$

et donc

$$\mathcal{L} < t. \tag{H.53}$$

L'inégalité (H.50) provient donc (H.52) et de (H.53). En remplaçant dans (H.50) respectivement s, $\mathcal{L}$ et t par $r\sin\theta$, $r\theta$ et $r\tan\theta$, on déduit (H.51).

Remarque H.26. Une preuve "moderne" pour démontrer analytiquement directement (H.51) (et donc en déduire (H.50) qui est équivalente) consiste à utiliser la convexité et la concavité des fonctions tan et sin. En effet, on a

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Donc la dérivée de tan est strictement croissante (car cos est décroissante) et donc tan est strictement convexe sur $[0, \pi/2[$. On a aussi

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sin''(x) = -\cos(x) < 0,$$

Donc sin est strictement convexe sur $[0, \pi/2[$. Ainsi, le graphe de la fonction tan est toujours strictement au-dessus de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, tandis que le graphe de la fonction sin est toujours strictement en-dessous de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. Les deux tangentes des deux fonctions tan et sin en zéro sont la droite d'équation $y = x$. On a donc

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan(x) > x > \sin(x).$$

Mais ce raisonnement nous pousse à tourner à rond [3] car cette preuve est fondée sur la dérivée du sinus, elle même fondée sur l'inégalité que nous sommes en train de montrer !

□

(2) Montrons maintenant (ce qui justifie en fait (H.48))

Lemme H.27. *On a*

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0,$$
$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1,$$
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$$

Démonstration.

Ainsi, on déduit tout d'abord de la première inégalité de (H.51) que, par encadrement,

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0, \tag{H.54}$$

et donc (car la somme des carrés vaut 1)

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1. \tag{H.55}$$

On a aussi d'après la première inégalité de (H.51)

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1. \tag{H.56}$$

On a aussi

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\tan\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta},$$

et donc, d'après la seconde inégalité de (H.51),

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\sin\theta}{\theta} > \frac{1}{\cos\theta}. \tag{H.57}$$

D'après (H.55), (H.56) et (H.57), on a donc par encadrement

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \tag{H.58}$$

On fait de même pour la seconde inégalité à montrer. D'après la seconde inégalité de (H.51), on a

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\tan\theta}{\theta} > 1 \tag{H.59}$$

On a aussi

$$\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta},$$

et donc, d'après la première inégalité de (H.51),

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\tan\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}. \tag{H.60}$$

3. dans le sens trigonométrique ...

D'après (H.55), (H.59) et (H.60), on a donc par encadrement

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1.$$

□

(3) Montrons maintenant le résultat suivant :

Lemme H.28. *On a*

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}=\cos\alpha,$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}=-\sin\alpha.$$

Démonstration.

(a) Soient α et h deux réels. On applique (H.40a) à $P=\alpha+h$ et $Q=\alpha$:

$$\cos(\alpha+h)-\cos\alpha=-2\sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

et donc, pour h non nul :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}&=-2\sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h},\\&=-\sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}},\end{aligned}$$

et donc, en utilisant de nouveau (H.31b) :

$$\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}=-\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{h}{2}\right)+\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\alpha\right),$$

et (H.54), (H.55) et (H.58), cela implique à la limite $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}=-\sin\alpha.$$

(b) Soient α et h deux réels. On applique (H.40b) à $P=\alpha+h$ et $Q=\alpha$:

$$\sin(\alpha+h)-\sin\alpha=2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)$$

et donc, pour h non nul :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}&=2\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h},\\&=\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}},\end{aligned}$$

et donc, en utilisant (H.31a) :

$$\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\left(\cos\alpha\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\alpha\right),$$

et d'après (H.54), (H.55) et (H.58), cela implique à la limite $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}=\cos\alpha.$$

□

(4) Les égalités (H.49a) et (H.49b) proviennent donc du résultat du lemme H.28, par définition de la dérivée. Montrons enfin (H.49c). On écrit successivement

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)', \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant (H.8m).

♢

H.3.3. Autres formules

En cours de rédaction.

PROPOSITION H.29 (Utilisation de l'arc moitié). *Si t est un réel appartenant à D (défini par* (H.7)*), alors en posant*

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

on a

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{H.61}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}. \tag{H.62}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser (H.45a) qui donne successivement

$$\begin{aligned}\sin t &= \sin\left(2\frac{t}{2}\right), \\ &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}, \\ &= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}+1}, \\ &= \frac{2u}{u^2+1}.\end{aligned}$$

De même, (H.45b) donne successivement

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right),\\ &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right),\\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)},\\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} + 1},\\ &= \frac{1-u}{u^2+1}.\end{aligned}$$

□

Proposition H.30 (Linéarisation). *On a tout x réel*

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right), \tag{H.63a}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right). \tag{H.63b}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser (H.45b) à l'envers. Par exemple la troisième égalité donne :

$$1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$$

dont on déduit (H.63b). La preuve de (H.63a) repose sur la deuxième égalité de (H.45b)

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

□

H.4. Les angles sont, en fait, inutiles !

J'ai une pensée émue pour toutes ces générations de collégiens (dont j'ai fait forcément partie !) à qui on a demandé de tracer des centaines d'angles ou de faire autant de mesures avec un rapporteur ! Les angles sont en fait tout à fait inutiles.

Les exemples de l'exercice H.14 et de son corrigé page 153 nous montre que l'on peut tracer un angle de $\pi/3$ et de $\pi/4$. On peut les additionner à la règle et au compas (pour retrouver l'angle $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$) sans évoquer la valeur de la somme de l'angle comme le montre la figure H.19, elle-même fondée sur les deux constructions géométriques des deux angles précédents.

Si on reprend la définition du sinus et du cosinus ou les deux cas traités 1 page 147 et 2 page 148, il suffit en fait de donner le cosinus ou le sinus d'un angle, pour pouvoir le tracer de façon géométrique, sans en connaître sa mesure. Plus précisément, si l'angle appartient à $[0, \pi/2]$, il suffit d'en donner le sinus ou le cosinus. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, il suffit d'en fournir le cosinus, puisque pour tout $c \in [-1, 1]$, il existe un unique angle $\theta \in [0, \pi]$, tel que $\cos\theta = c$. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, il suffit d'en fournir le sinus et de préciser si l'angle est dans $[0, \pi/2]$ ou $[\pi/2, \pi]$ puisque pour tout $s \in [0, 1]$, il existe deux angles θ_0 et $\theta_1 = \pi - \theta_0$ tels que tel que $\sin\theta_0 = \sin\theta_1 = s$. L'un des angles appartient à $[0, \pi/2]$ et l'autre à $[\pi/2, \pi]$. Si l'angle est dans $[-\pi, 0]$, on peut se ramener au cas où l'angle appartient à $[0, \pi]$, en le traçant dans l'autre sens. Toutes ces constructions peuvent se faire à la règle et au compas. De plus, si on connaît le sinus ou le cosinus d'un angle, on peut déterminer la ligne qui manque en utilisant (H.3), si on connait l'intervalle $[0, \pi/2]$ ou $[\pi/2, \pi]$ auquel appartient à cet angle. Ainsi, connaissant le sinus et le cosinus d'un angle a et le sinus etle cosinus d'un angle

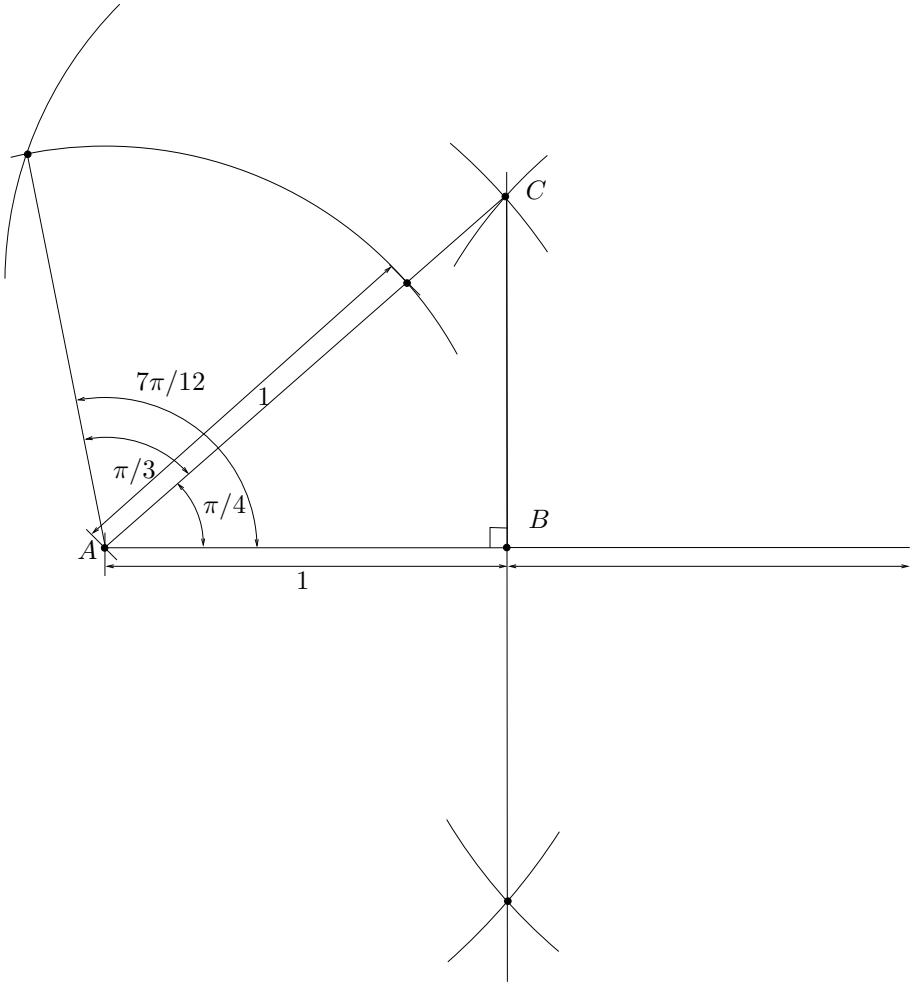


FIGURE H.19. Tracé géométrique de l'angle $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$.

b, on peut, grâce à (H.31), déterminer le sinus et le cosinus de la somme $a + b$, tracer cet angle, sans donc en connaître sa mesure. Notons aussi que l'on peut se contenter de la tangente d'un angle, en utilisant (H.8m) pour en retrouver le cosinus et donc le sinus.

On peut aussi, pour des angles appartenant à $[0, \pi/2]$, remplacer la donnée de la mesure de l'angle, par la donnée de deux des trois longueurs correspondant aux mesures d'un triangle rectangle dont l'un des angles non droit correspond à cet angle, comme dans le cas de la proposition H.2. On d'une part, tracer, à la règle et au compas, le triangle rectangle donné, et donc obtenir l'angle, sans en connaître sa mesure, d'autre part, grâce au théorème de Pythagore, déterminer la mesure du coté non connu du triangle rectangle. Grâce, de nouveau, à la proposition H.2, il est possible d'en déduire le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle et utiliser le paragraphe précédent pour déterminer les lignes trigonométriques de sommes d'angles. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, on peut aussi considérer des longueurs algébrisées, c'est-à-dire, avec un signe, afin de prendre en compte l'aspect obtus d'un angle.

Les mésopotamiens, très en avance sur les Romains par exemples [4] ne notaient pas les angles mais utilisaient déjà des tables trigonométriques et raisonnaient sur des triangles et leurs longueurs. On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_mésopotamiennes`. Je me demande maintenant maintenant si les petits scribes mésopotamiens ont tracé des centaines [5] de triangles rectangles !

H.5. Propriétés des fonctions trigonométriques

Outre les propriétés de la proposition H.1, on a les propriétés suivantes des fonctions trigonométriques.
En cours de rédaction.

H.6. Les fonctions trigonométriques réciproques

En cours de rédaction.

4. Les mésopotamiens utilisaient un système de numérotation pour l'écriture et le calcul, mais en base 60, dans lequel le zéro (noté par la suite pour la première fois sous sa forme actuelle en Inde, puis transmis aux Arabes) existait déjà, symbolisé par un espace.

5. plutôt des soixantaines !

Annexe I

L'argument d'un nombre complexe et la fonction atan$_2$

I.1. L'argument d'un nombre complexe

Montrons que l'on a les quatre formules (I.2) (qui correspondent aux quatre cas de la figure I.2 page 171) : Si $z = x + iy$ appartient à $\mathbb{C}$ et que l'on considère θ son argument [1], ou, ce qui revient au même, si on considère les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du point et ses coordonnées polaires (r, θ) liées [2] par

$$x = r\cos\theta, \tag{I.1a}$$

$$y = r\sin\theta, \tag{I.1b}$$

alors

$$\text{Si } x, y > 0 \text{ (cas 1)}, \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]0, \pi/2[, \tag{I.2a}$$

$$\text{Si } x < 0 \text{ et } y > 0 \text{ (cas 2)}, \quad \theta = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]\pi/2, \pi[, \tag{I.2b}$$

$$\text{Si } x, y < 0 \text{ (cas 3)}, \quad \theta = -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]-\pi/2, -\pi[, \tag{I.2c}$$

$$\text{Si } x > 0 \text{ et } y < 0 \text{ (cas 4)}, \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]-\pi/2, 0[. \tag{I.2d}$$

Attention à ne pas écrire que pour tout (x, y),

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

ce qui n'est pas toujours vrai puisque θ appartient à $]-\pi, \pi]$ alors que $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$.

- Le cas 1 est immédiat.
- Dans le cas 2 (voir figure 2(b)), on a

$$\phi + \theta = \pi, \tag{I.3}$$

où $\phi \in]0, \pi/2[$ et $\theta \in]\pi/2, \pi[$. Dans le triangle rectangle de la figure I.1, on a, de façon géométrique

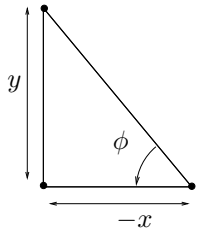


FIGURE I.1. Le triangle rectangle.

$$\tan(\phi) = \frac{|y|}{|x|},$$

1. En faisant l'hypothèse habituelle qu'il appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
2. En faisant l'hypothèse habituelle que θ appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

et donc puisque $y > 0$ et $x < 0$:

$$\tan(\phi) = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = \frac{y}{-x} = \operatorname{atan}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et de (I.3), on déduit

$$\theta = \pi - \phi = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (I.2b).

- Dans le cas 3 (voir figure 2(c)), on a

$$\phi + \theta = -\pi, \tag{I.4}$$

où $\phi \in]-\pi/2, 0[$ et $\theta \in]-\pi, -\pi/2[$. Comme précédemment, on a

$$\tan(\phi) = -\frac{-y}{-x} = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = -\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et donc, d'après (I.4),

$$\theta = -\pi - \phi = -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (I.2c).

- Dans le cas 4 (voir figure 2(d)), on est dans le même cas que le cas 1.

Si on fait la convention habituelle suivante :

$$\operatorname{atan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{I.5}$$

les équations (I.2) sont encore valables si x ou y peuvent s'annuler, sans être simultanément nuls et deviennent : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\text{Si } x, y \geq 0 \text{ (cas 1)}, \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, \pi/2[, \tag{I.6a}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ (cas 2)}, \quad \theta = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [\pi/2, \pi], \tag{I.6b}$$

$$\text{Si } x, y \leq 0 \text{ (cas 3)}, \quad \theta = -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, -\pi[, \tag{I.6c}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \text{ (cas 4)}, \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, 0]. \tag{I.6d}$$

Vérifions par exemple (I.6a). Si $x > 0$ et $y = 0$, on a $\phi = 0$ et $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{atan}(0) = 0$. Si $x = 0$ et $y > 0$, on a $\phi = \pi/2$ et $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{atan}(+\infty) = \pi/2$.

I.2. La fonction atan$_2$

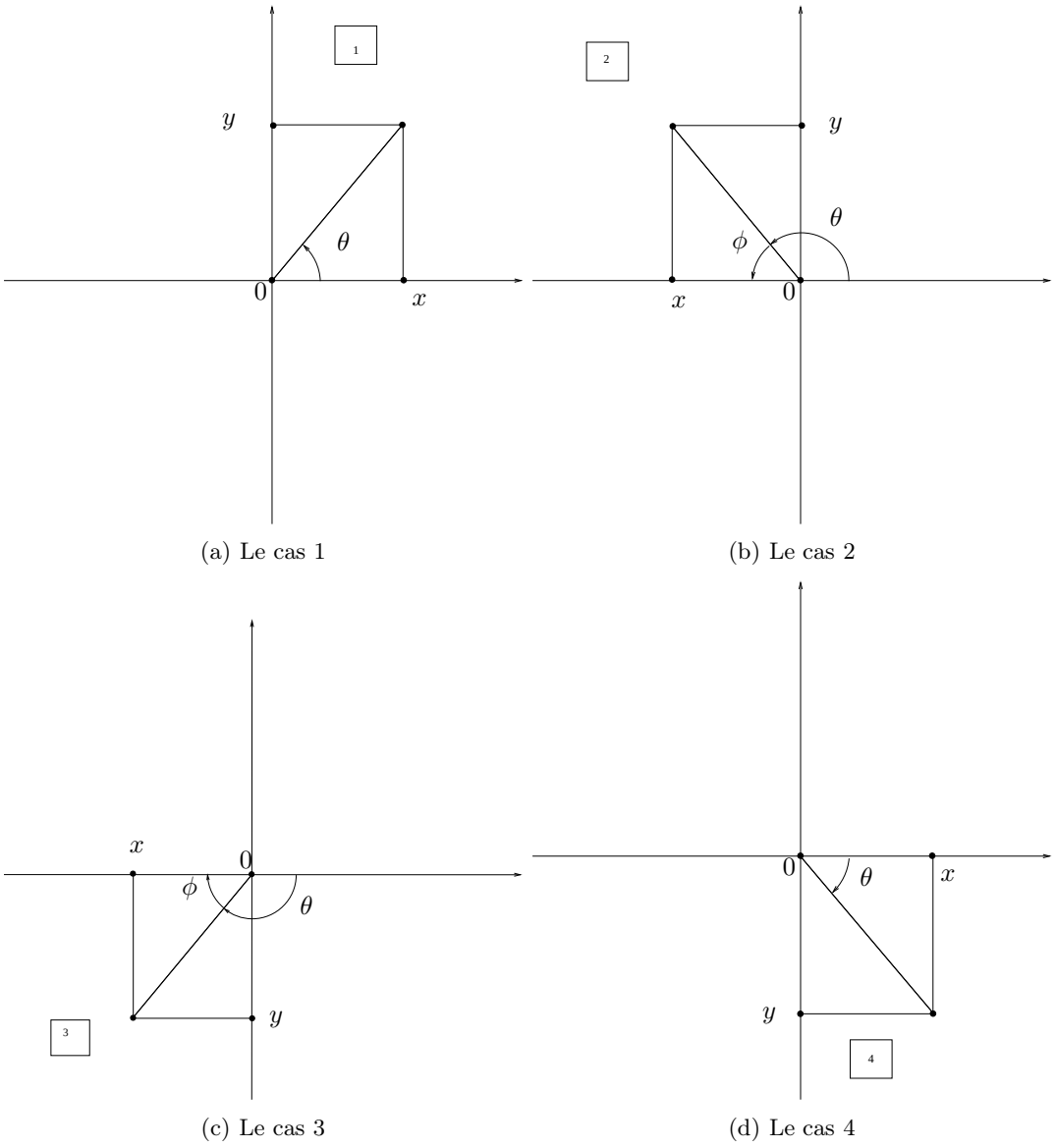
On définit alors la fonction bien connue des informaticiens atan$_2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- Si $y \neq 0$, on pose

$$\phi = \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|, \tag{I.7}$$

puis

$$\operatorname{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \phi \operatorname{signe}(y) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{signe}(y) & \text{si } x = 0, \\ (\pi - \phi) \operatorname{signe}(y) & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{I.8}$$



(a) Le cas 1 (b) Le cas 2

(c) Le cas 3 (d) Le cas 4

FIGURE I.2. Les quatre cas possibles.

- Si $y = 0$,

$$\text{atan}_2(y,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0, \\ \pi & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{I.9}$$

- On peut aussi rajouter, pour être cohérent avec les conventions de Matlab :

$$\text{atan}_2(0,0) = 0. \tag{I.10}$$

On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Atan2`.
Cette définition correspond à la définition de la fonction `atan2` de Matlab.

Avec ce qui précède, il est aisé de constater que l'argument θ d'un nombre complexe $z = x + i$ est donné par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \theta = \operatorname{atan}_2(y, x), \tag{I.11}$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \operatorname{atan}_2(y, x). \tag{I.12}$$

(1) En effet, supposons que x et y sont tous les deux non nuls. Étudions chacun des quatre cas de la section I.1.
- Le cas 1 est immédiat.
- Dans le cas 2, on a d'après (I.2b),

$$\begin{aligned}\theta &= \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{y}{-x}\right),\\ &= \pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{-x}\right|,\\ &= \pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|,\\ &= \left(\pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right)\operatorname{signe}(y),\\ &= (\pi - \phi)\operatorname{signe}(y).\end{aligned}$$

- Dans le cas 3, on a d'après (I.2c),

$$\begin{aligned}\theta &= -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{-y}{-x}\right),\\ &= -\pi + \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|,\\ &= \left(\pi - \operatorname{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right)\operatorname{signe}(y),\\ &= (\pi - \phi)\operatorname{signe}(y).\end{aligned}$$

- Dans le cas 4, on conclut de la même façon.

(2) Si x et y peuvent s'annuler, sans l'être simultanément, on utilise alors la convention (I.5) et le calcul est immédiat.

(3) Si x et y sont tous les deux nuls, on peut adopter la convention (I.10).

I.3. Exemples

Donnons huit calculs différents.
- Pour $z = 1$, on a $x = 1$ et $y = 0$ et, d'après (I.6a),
$$\theta = \operatorname{atan}(0) = 0\,;$$
- Pour $z = 1 + i$, on a $x = 1$ et $y = 1$ et, d'après (I.6b),
$$\theta = \operatorname{atan}(1) = \frac{pi}{4}\,;$$
- Pour $z = i$, on a $x = 0$ et $y = 1$ et, d'après (I.6b),
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}\,;$$
- Pour $z = -1 + i$, on a $x = -1$ et $y = 1$ et, d'après (I.6b),
$$\theta = \pi + \operatorname{atan}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,;$$

- Pour $z = -1$, on a $x = -1$ et $y = 0$ et, d'après (I.6b),
$$\theta = \pi + \operatorname{atan}(0) = \pi\,;$$
- Pour $z = -1 - i$, on a $x = -1$ et $y = -1$ et, d'après (I.6c),
$$\theta = -\pi - \operatorname{atan}(-1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\,;$$
- Pour $z = -i$, on a $x = 0$ et $y = -1$ et, d'après (I.6d),
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}\,;$$
- Pour $z = -i + 1$, on a $x = 1$ et $y = -1$ et, d'après (I.6d),
$$\theta = \operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Annexe J

Étude théorique d'un problème de moindres carrés

J.1. Rappels sur la régression linéaire

Les coordonnées $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ étant connues (de façon expérimentale ou par mesure), on cherche donc à résoudre le problème suivant :

$$\text{trouver } (a,b) \text{ qui minimise } S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{J.1}$$

La quantité S est appelé l'écart entre les données et la droite d'équation $Y = aX + b$. Ce problème s'écrit aussi : trouver le couple (a_0, b_0) tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{i=1}^{n} (a_0 x_i + b_0 - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \tag{J.2}$$

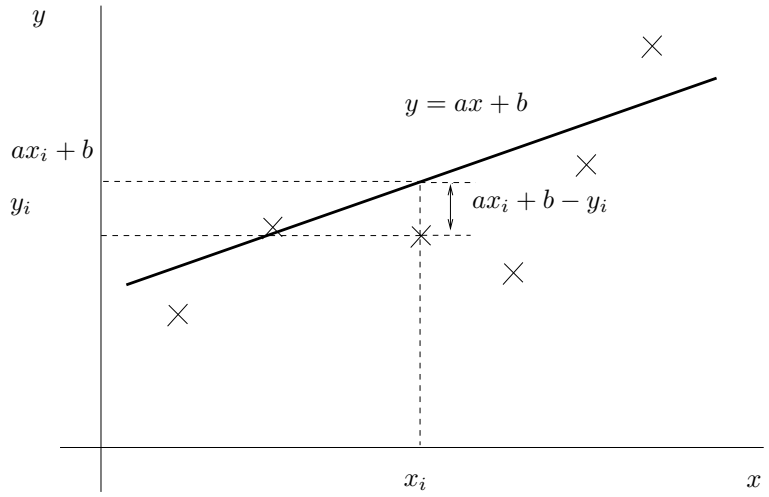


FIGURE J.1. le principe de la droite de régression linéaire

Voir la figure J.1.

On peut expliciter les coefficients a_0 et b_0 en fonction de $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$; voir par exemple les rubriques "régression linéaire" et "Ajustement affine" de Wikipédia (`https://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_linéaire` et `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ajustement_affine`).

Voir par exemple la figure J.2 page suivante, où sont tracés les points expérimentaux $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$, deux droites différentes correspondant à deux couples (a, b) avec les écart associés et la "meilleure droite". Sur cette figure,

— les points de coordonnées $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont représentés par des carrés noirs ;
— les points de coordonnées $(x_i, ax_i + b)_{1\leq i\leq n}$ sont représentés par des ronds bleu ;
— deux droites sont tracées en noir et la "meilleure" en rouge. Cette droite a une pente a positive.

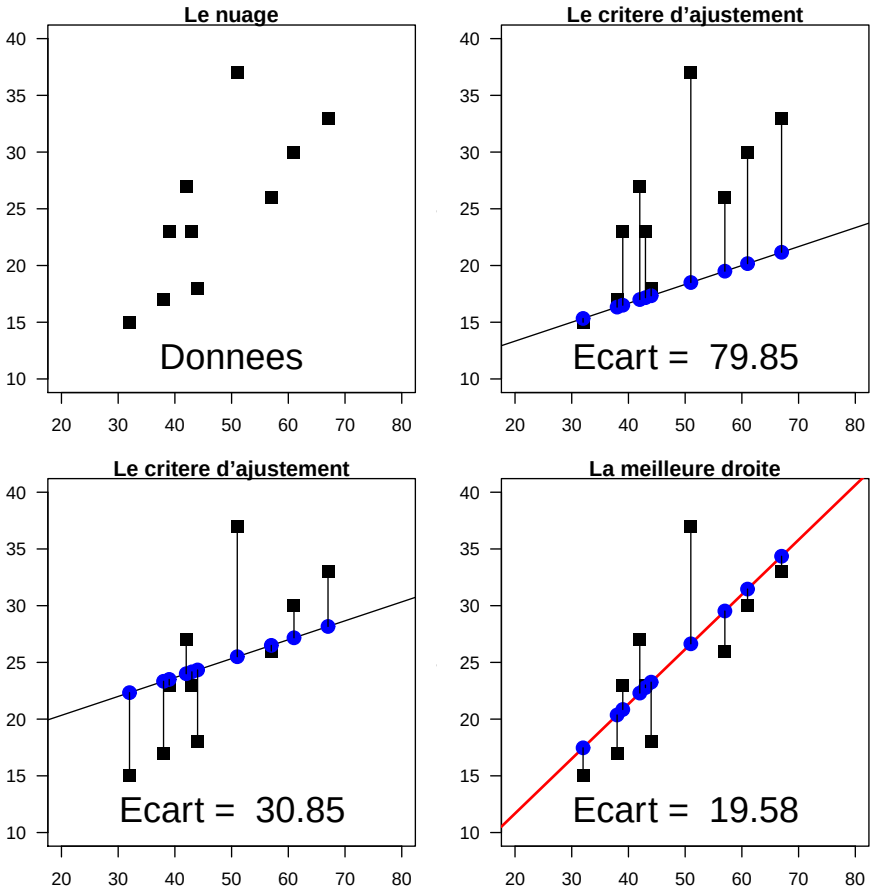


FIGURE J.2. la droite de régression linéaire

Cette figure, faite sous R, est extraite de [Bas12, chapitre 4].

J.2. Rappels sur la norme Euclidienne et le produit scalaire associé

On rappelle que $\|\|_2$ définit la norme Euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^p$:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2} = \sqrt{{}^t x x}, \tag{J.3}$$

où ${}^tC$ désigne la matrice transposée de la matrice C. Cette norme est associée au produit scalaire $< ., . >$ défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, \quad < x, y >= {}^t x y. \tag{J.4}$$

Pour un rappel sur les normes, on pourra consulter l'annexe A de [BM03] ou [Sch01].

J.3. Théorie

Pour plus d'information sur les systèmes au sens des moindres carrés, on pourra consulter [Cia82].

De façon plus générale, en reprenant les notations de la section 4.3 page 30, on se donne $n \geq p$ deux entiers non nuls, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on cherche à trouver le vecteur X qui vérifie le système sur-déterminé $AX = b$, c'est-à-dire l'analogue de (4.10) :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = b_i, \tag{J.5}$$

mais au sens des moindres carrés : on veut trouver X tel que la quantité

$$\sum_{j=i}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j - b_j \right)^2 \tag{J.6}$$

soit minimale. Par exemple, le cas de la section J.1, correspond à

$$p = 2, \tag{J.7a}$$

et

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad a_{i,1} = 1, \quad , a_{i,2} = x_i. \tag{J.7b}$$

La section J.1 traite le cas particulier de la de régression linéaire (c'est-à-dire, trouver la droite qui passe le plus proche d'un nuage de points donnés), avec (J.7).

De façon plus générale, on cherche donc à résoudre

$$\|Ax_0 - b\|_2^2 = \inf_{x\in\mathbb{R}^p} \|Ax - b\|_2^2 , \tag{J.8}$$

où $n \geq p$ sont deux entiers non nuls, A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x_0 est l'inconnue dans $\mathbb{R}^p$. Voir la section J.2 pour les rappels sur la norme $\|.\|_2$. On écrit parfois que l'on résout le système «rectangulaire»

$$Ax = b, \tag{J.9}$$

au sens des moindres carrés. En effet, on a

$$Ax \approx b, \tag{J.10}$$

et c'est l'éccart entre Ax et b que l'on cherche à minimiser.

Lemme J.1. *Si la matrice A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p, alors ${}^tAA$ est inversible.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$,

$${}^tAAx = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Si le vecteur de $\mathbb{R}^p$, ${}^tAAx$ est nul alors ${}^tx{}^tAAx$ est nul et donc, par définition

$$\|Ax\|_2 = {}^t(Ax)(Ax) = {}^tx{}^tAAx = 0,$$

et donc $Ax = 0$. Ainsi x appartient au noyau de A. D'après la relation rang-noyau, on a $\dim(\mathrm{Ker}A) = p - \mathrm{rg}(A) = 0$, par hypothèse. Ainsi, le noyau de A est réduit à $\{0\}$ et x est donc nul. □

Remarque J.2. Si les x_i ont au moins deux valeurs différentes, alors la matrice A donnée par (J.7), c'est-à-dire le cas de la section J.1, est de rang 2. En effet, on peut extraire de A, une sous-matrice de type

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{pmatrix}$$

avec $x_i \neq x_j$ et l'on sait que cette matrice est inversible (voir par exemple [DB22, Chapitre "Interpolation", section "Calcul direct (Matrice de Vandermonde)"]).

On peut donc déduire du lemme J.1 le résultat suivant :

PROPOSITION J.3. *On suppose que la matrice A est de rang p. On note x_0 défini par*

$$x_0 = \left({}^tAA\right)^{-1}\left({}^tAb\right). \tag{J.11}$$

La solution de (J.8) *est unique et est égale à x_0.*

DÉMONSTRATION. Voir [Cia82].

□

Annexe K

Diagonalisation

Cette annexe, issue de [Bas22a], constitue une petite introduction à la diagonalisation de matrices.

K.1. Étude d'un exemple

K.1.1. Introduction

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{K.1}$$

On cherche à la diagonaliser, c'est-à-dire, on cherche une base de vecteurs (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et trois réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad Ae_3 = \lambda_3 e_3. \tag{K.2}$$

K.1.2. Valeurs propres

On s'intéresse donc à la résolution de

$$AX = \lambda X, \tag{K.3}$$

où λ est un réel et X un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Pour simplifier le calcul, on cherche tout d'abord à déterminer les valeurs possibles de λ. Remarquons que le vecteur nul est toujours solution de (K.3). On cherche donc X non nul solution de (K.3), qui se met sous la forme

$$BX = 0, \tag{K.4}$$

où $B = A - \lambda I$. Dire qu'il existe X non nul vérifiant (K.4) revient à dire que B est non inversible et donc que $\det B = 0$, soit encore

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{K.5}$$

On cherche donc les solutions λ de (K.5), qui sont appelées valeurs propres de A. On a successivement :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \\ &= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(-1-\lambda)+2\big), \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda\right), \\ &= -\lambda(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

La fonction qui à λ associe $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme. On l'appelle le polynôme caractéristique de A. On cherche donc à résoudre

$$\lambda(\lambda-1)^2 = 0, \tag{K.6}$$

dont l'ensemble des solutions est $S = \{0, 1\}$.

K.1.3. Vecteurs propres

Pour chaque solutions λ de S, on cherche donc X non nul solution de (K.3). On sait que l'ensemble des solutions est infini, car la matrice associée au système est non inversible.

Pour λ fixé, chaque solution X de (K.3) est appelée vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ. L'ensemble de ces vecteurs propres est appelés sous-espace propre de A, associé à la valeur propre λ ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Premier cas : $\lambda = 0$.

  $X = (x, y, z)$ est solution de (K.3) si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ -2x - z = 0, \end{cases}$$

  ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = -\frac{z}{2}, \\ y = -\frac{z}{2}, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{K.7}$$

  Pour $z = -2$, on a $e_1 = (1, 1, -2)$.

  Autrement dit, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est une droite vectorielle, portée par le vecteur e_1. C'est un sous-espace de dimension 1. En effet, un seul paramètre permet de décrire l'ensemble des solutions de (K.7).

- Second cas : $\lambda = 1$.

  Dans ce cas, on vérifie que (K.3) est équivalent à

$$\begin{cases} x = -z, \\ y \in \mathbb{R}. \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{K.8}$$

  Si $y = 0$, $z = 1$, on a $x = -1$. On pose $e_2 = (-1, 0, 1)$. Si $y = 1$, $z = 1$, on a $x = -1$. On pose $e_3 = (-1, 1, 1)$. On vérifie que e_2 et e_3 sont indépendants. Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est un plan vectoriel, porté par les vecteurs e_2 et e_3. C'est un sous-espace de dimension 2. En effet, deux paramètres indépendants permettent de décrire l'ensemble des solutions de (K.8).

On vérifie (sans aucun calcul ...) que

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_2 = e_2, \quad Ae_3 = e_3. \tag{K.9}$$

On a donc résolu le problème (K.2). Il reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de vecteur, ce qui est admis.

De façon matricielle, on écrit la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3) sous la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{K.10}$$

Dans cette base, la matrice D associée à A est diagonale et vaut

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{K.11}$$

On a alors

$$D = Q^{-1}AQ, \tag{K.12}$$

ou

$$A = QDQ^{-1}, \tag{K.13}$$

ce qui caractérise le fait que A est diagonalisable.

Remarque K.1. On peut remarquer que

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = -(\lambda - 0)^1(\lambda - 1)^2. \tag{K.14}$$

L'espace propre associé à 0 est de dimension 1 et l'espace propre associé à 1 est de dimension 2. Cela assure que A est diagonalisable.

K.2. Généralisation

Dans toute cette section, n est un entier naturel non nul et A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition K.2 (Polynôme caractéristique). La fonction qui à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ associe $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n. On l'appelle le polynôme caractéristique de A et on le note χ_A.

Définition K.3 (Valeur propre). On appelle valeur propre de A tout réel λ tel qu'il existe un vecteur non nul X de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\boxed{AX = \lambda X.} \tag{K.15}$$

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A.

Proposition K.4. *Le spectre de A est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique.*

Définition K.5 (Vecteur et sous-espace propres). Si λ est une valeur propre de A, tout vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (K.15) est appelé vecteur propre (associé à la valeur propre λ). L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension supérieure ou égale à un.

Remarque K.6. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est noté E_λ ou Ker $(A - \lambda I)$.

Définition K.7. La matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telle que

$$\boxed{D = Q^{-1}AQ,} \tag{K.16}$$

ou

$$\boxed{A = QDQ^{-1}.} \tag{K.17}$$

Définition K.8. Un polynôme P est dit scindé si c'est un produit de polynôme du premier degré. Dans ce cas, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad P(x) = a\prod_{i=1}^{p}(x - a_i)^{\alpha_i},$$

où a est un réel, pour tout i, a_i est une racine de P et α_i est un entier non nul. L'entier α_i est appelé multiplicité de la racine a_i.

Exemple K.9. Si A est défini par (K.1), d'après (K.13), le polynôme caractéristique de A est scindé et les multiplicités de ses racines 0 et 1 sont respectivement 1 et 2.

Si le polynôme caractéristique de A est scindé, à toute valeur propre λ de A, on peut associer la multiplicité de λ et la dimension du sous espace-propre E_λ. On peut montrer que la dimension du sous espace-propre E_λ est inférieure à la multiplicité de λ.

PROPOSITION K.10. *Une matrice A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et, pour toute valeur propre, la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.*

Si A est diagonalisable, la matrice D de la définition K.7 est obtenue en écrivant sur la diagonale, les différentes valeurs propres ; la matrice Q est obtenue en écrivant les différents vecteurs propres en colonne, choisis dans le même ordre que celui des valeurs propres.

Un cas particulier de la proposition K.10 est important :

PROPOSITION K.11. *Toute matrice qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

EXEMPLE K.12. D'après la remarque K.1, pour la matrice A étudiée en section K.1, on a

valeur propre	multiplicité	dimension sous-espace propre
0	1	1
1	2	2

et la matrice est donc diagonalisable.

EXEMPLE K.13. Pour la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix},$$

on peut montrer que l'on a les résultats suivant

valeur propre	multiplicité	dimension sous-espace propre
1	1	1
2	2	1

ce qui assure que la matrice étudiée n'est donc pas diagonalisable.

Donnons une propostion souvent utilisée en mécanique, par exemple :

PROPOSITION K.14. *Toute matrice symétrique (réelle) est diagonalisable. De plus, les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux.*

EXEMPLE K.15. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{K.18}$$

On peut vérifier que $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE K.16. Ici, nous n'avons évoqué que les notions de diagonalisation et d'éléments propres relatives aux matrices ; ces notions existent aussi pour les endomorphismes.

K.3. Une application : résolution d'un système différentiel

Les applications de la diagonalisation sont très nombreuses. Nous en étudierons une succinctement dans cette section.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, une application B de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$, et X_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On cherche à résoudre le système différentiel :

$$\forall t \in [0,T], \quad \dot{X}(t) + AX(t) = B(t), \tag{K.19a}$$

$$X(0) = X_0. \tag{K.19b}$$

On peut donc écrire d'après (K.17),

$$\dot{X} + QDQ^{-1}X = B,$$

et donc

$$Q^{-1}\dot{X} + DQ^{-1}X = Q^{-1}B.$$

On fait le changement de fonction

$$Y = Q^{-1}X, \tag{K.20}$$

et on obtient donc

$$\forall t \in [0,T], \quad \dot{Y}(t) + DY(t) = Q^{-1}B(t), \tag{K.21}$$

ce qui est plus facile à résoudre de (K.19a) ; en effet, si

$$D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n),$$

si

$$Q^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

et si

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

alors, (K.21) se découple sous la forme

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \forall t \in [0,T], \quad \dot{y}_i(t) + d_i y_i(t) = c_i(t).$$

On résoud chacune de ces équations différentielles. Le vecteur Y est donc connu ; on en déduit ensuite X grâce à (K.20). Enfin, les n constantes d'intégrations sont déterminées grâce à (K.19b).

Annexe L

Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2

Dans cette annexe, nous donnons les preuves complètes du chapitre 6. De nombreuses références théoriques sont disponibles comme par exemple [RDO87]. Dans le cas des équations d'ordre deux, on renvoie au papier à la fois très complet et succinct (qui a inspiré la section L.2 de cette annexe) de Daniel Perrin, disponible sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf`

L.1. Équations différentielles d'ordre 1

Dans toute cette section, on suppose que a est un réel non nul, b, t_0 et y_0, t_0 sont des réels et f une fonction continue de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

L.1.1. Un lemme sur la variation de la constante

On reprend, en fait, les différents calculs de la section 6.2, dans un ordre légèrement différement et en les justifiant tous.

Lemme L.1 (Variation de la constante). *y est solution de l'équation différentielle*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by'(t) = f(t), \tag{L.1}$$

si et seulement si la fonction C définie par

$$C(t) = e^{bt/a} y(t), \tag{L.2}$$

vérifie

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad C'(t) = \frac{1}{a} e^{bt/a} f(t) \tag{L.3}$$

Démonstration. Il suffit de reprendre le calcul de la section 6.2.2.2.
y vérifie (L.2) ssi on a

$$y(t) = C(t)e^{-bt/a}. \tag{L.4}$$

On a alors

$$\begin{aligned} ay'(t) + by(t) &= a\left(C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a}\right) + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} + \underbrace{\left(-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}\right)}_{\text{quantité nulle}}, \end{aligned}$$

et donc, en disivant par $ae^{-bt/a}$, non nul, on constate que (L.1) est équivalent à (L.3). □

L.1.2. Résolution générale de l'équation homogène associée

Lemme L.2 (Résolution générale de l'Équation homogène associée). *y est solution de l'équation homogène associée*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by'(t) = 0, \tag{L.5}$$

si et seulement si il existe une constante c telle que

$$y(t) = ce^{-bt/a}. \tag{L.6}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le lemme L.1 avec $f = 0$, selon lequel y est solution de (L.5) ssi la fonction C définie par (L.2) vérifie

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad C'(t) = 0, \tag{L.7}$$

ce qui est donc équivalent à l'existence d'une constante c telle que $C = c$, ce qui est équivalent à (L.5) en revenant à y donné par (L.4). □

L.1.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans la section (6.2.2.1), on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. On obtient alors, dans les deux cas, une fonction où intervient une constante, que l'on calcule à la fin en utilisant la condition initiale (voir section L.1.3.3).

L.1.3.1. En utilisant une solution particulière de l'équation avec second membre.

Dans ce cas, on retrouve le principe, dit de superposition, suivant :

PROPOSITION L.3 (Résolution générale (version a))). *On suppose que l'on connaît une solution particulière, notée y_p de* (L.1)*. Les solutions de* (L.1) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{L.8}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer y une solution quelconque de (L.1) et de poser $z = y - y_p$. On a alors, par linéarité

$$az'(t) + bz(t) = ay'(t) + by(t) - \left(ay_p'(t) + by_p(t)\right)$$

qui vaut $f(t) - f(t) = 0$ puisque y et y_p sont toutes les deux solutions de (L.1). D'après le lemme L.2 appliqué à z, on a, d'après (L.6)

$$z(t) = ce^{-bt/a},$$

et donc

$$y(t) - y_p(t) = ce^{-bt/a},$$

dont on déduit (L.8). □

L.1.3.2. En utilisant la variation de la constante.

Si on utilise la méthode de la variation de la constante, on a alors :

PROPOSITION L.4 (Résolution générale (version b))). *Les solutions de* (L.1) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{L.9}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le lemme L.1 qui implique que si y est définie par (L.4), alors, y est solution de (L.1) ssi (L.3) ce qui est équivalent par intégration entre t_0 et t : à

$$\begin{aligned} C(t) - C(t_0) &= \int_{t_0}^{t} C'(u)du, \\ &= \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{bu/a} f(u)du \end{aligned}$$

et en réutilisant (L.4) et en posant $c = C(t_0)$, on a

$$y(t) = \left(c + \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{bu/a} f(u)du\right) e^{-bt/a}$$

ce qui donne (L.9). □

REMARQUE L.5. Si on compare (L.8) et (L.9), on peut constater qu'une solution particulière de (L.1) est donnée par

$$y_p(t) = \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{L.10}$$

Attention, cette solution particulière peut contenir des termes de la forme $de^{-bt/a}$ où d est une constante. Voir à ce titre l'exercice 6.2 de TD.

L.1.3.3. Traitement de la condition initiale.

On a alors la proposition suivante, immédiate à vérifier et laissée au lecteur :

PROPOSITION L.6 (Résolution générale avec condition initiale). *Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et y l'unique solution de* (L.1) *vérifiant la condition initiale*

$$y(t_0) = y_0. \tag{L.11}$$

(1) Si on utilise la proposition L.3, on alors

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_p(t) + (y_0 - y_p(t_0))ce^{-\frac{b}{a}(t-t_0)}. \tag{L.12}$$

(2) Si on utilise la proposition L.4, on a alors

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{L.13}$$

REMARQUE L.7. La formule (L.13) est appelée la formule de Duhamel.

L.1.3.4. Généralisation.

(1) En fait, on laissera vérifier par le lecteur que les trois résultats (annoncés dans la section 6.2.3) qui suivent se démontrer exactement de la même façon que le lemme L.2 et les propositions L.3, L.4 et L.6. On introduit α donnée par

$$\boxed{\alpha \text{ est une primitive quelconque de la fonction } b/a.} \tag{L.14}$$

(L.14). On remplace l'équation (L.2) par

$$C(t) = e^{\alpha(t)} y(t), \tag{L.15}$$

et l'équation (L.3) par

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad C'(t) = \frac{1}{a(t)} e^{\alpha(t)} f(t). \tag{L.16}$$

LEMME L.8 (Résolution générale de l'équation homogène essociée). *y est solution de l'équation homogène associée*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)y'(t) + b(t)y'(t) = 0, \tag{L.17}$$

si et seulement si il existe une constante c telle que

$$y(t) = ce^{-\alpha(t)} \tag{L.18}$$

PROPOSITION L.9 (Résolution générale (version a))). *On suppose que l'on connaît une solution particulière, notée y_p de*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)y'(t) + b(t)y'(t) = f(t). \tag{L.19}$$

Les solutions de (L.19) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-\alpha(t)}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{L.20}$$

PROPOSITION L.10 (Résolution générale (version b))). *Les solutions de* (L.19) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = ce^{-\alpha(t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{f(u)}{a(u)} e^{\alpha(u)-\alpha(t)} du. \tag{L.21}$$

PROPOSITION L.11 (Résolution générale avec condition initiale). *Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et y l'unique solution de* (L.19) *vérifiant la condition initiale*

$$y(t_0) = y_0. \tag{L.22}$$

(a) Si on utilise la proposition L.9, on alors

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_p(t) + (y_0 - y_p(t_0))ce^{-\alpha(t)+\alpha(t_0)}. \tag{L.23}$$

(b) Si on utilise la proposition L.10, on a alors

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_0 e^{-\alpha(t)+\alpha(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{f(u)}{a(u)} e^{\alpha(u)-\alpha(t)} du. \tag{L.24}$$

(2) Dans toute la section L.1 ou dans le point 1, on peut remplacer sans problème "pour tout $t \in [t_0, +\infty[$" par "pour tout $t \in \mathbb{R}$" ou "pour tout $t \in [t_0, T]$".

L.2. Équations différentielles d'ordre 2

Dans toute cette section, on suppose que a est un réel non nul, b, c, y_0, y_0', t_0 sont des réels et f une fonction continue de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La preuve théorique de la résolution complète de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{L.25a}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{L.25b}$$

$$y'(t_0) = y_0'. \tag{L.25c}$$

est très proche de la résolution des équations différentielles d'ordre deux. Elle a présentée de façon complète dans la section 6.3. Aussi, seule la preuve complète de la résolution de l'équation homogène associée (EHA) :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{L.26}$$

est présentée ici.

Nous montrons donc les résultats de la section 6.3.1.

LEMME L.12. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c et $r \in \mathbb{R}$. On considère une fonction z et une fonction y donnée par*

$$y = e^{rt} z. \tag{L.27}$$

On a alors

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{rt}\left(az''(t) + (2ar + b)z'(t) + (ar^2 + br + c)z(t).\right). \tag{L.28}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de calculer successivement $y(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$, en utilisant (L.27). On a respectivement

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} z(t), \\ y'(t) &= re^{rt} z(t) + e^{rt} z'(t), \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} z(t) + re^{rt} z'(t) + re^{rt} z'(t) + e^{rt} z''(t), \\ &= r^2 e^{rt} z(t) + 2re^{rt} z'(t) + e^{rt} z''(t). \end{aligned}$$

On a donc

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{rt}\left(ar^2 z(t) + 2arz'(t) + az''(t) + brz(t) + bz'(t) + cz(t)\right)$$

dont on déduit, après réarangement des termes, (L.28). □

(1) Premier cas : $\Delta = 0$. La racine unique r de l'équation caractéristique (6.53) est donnée par (6.60) et vérifie donc aussi

$$2ar + b = 0. \tag{L.29}$$

On considère $y(t)$ solution de l'equation homogène associée et $z(t)$ donnée par (L.27). D'après le lemme L.28, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= ay''(t) + by'(t) + cy(t), \\ &= \left(az''(t) + (2ar + b)z'(t) + (ar^2 + br + c)z(t).\right), \end{aligned}$$

et d'après (6.53) et (L.29)

$$= az''(t),$$

et puisque $a \neq 0$, on a donc $z''(t) = 0$. On en déduit qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$z(t) = At + B,$$

et, en revenant à $y(t)$ grâce à (L.27), on en déduit (6.61).

(2) Deuxième cas : $\Delta > 0$.

Nous avons deux racines r_1 et r_2 données par (6.55), dont on déduit

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{L.30}$$

On considère $y(t)$ solution de l'equation homogène associée et, cette fois-ci, $z(t)$ donnée par (L.27) où

$$r = r_1. \tag{L.31}$$

D'après le lemme L.28, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= ay''(t) + by'(t) + cy(t), \\ &= \left(az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)z(t).\right), \end{aligned}$$

et donc, d'après l'équation caractéristique (6.53), on a

$$az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) = 0.$$

soit

$$a(z'(t))' + (2ar_1 + b)z'(t) = 0.$$

ou encore

$$z''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) z'(t) = 0.$$

D'après (6.4), il existe une constante K telle que

$$z'(t) = Ke^{-\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)t}.$$

Puisque $\Delta \neq 0$, on vérifie que

$$2r_1 + \frac{b}{a} \neq 0.$$

On en déduit par intégration qu'il existe une constante C_1 telle que

$$z(t) = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

soit, en notant

$$C_2 = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}},$$

on a

$$z(t) = C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

En revenant à $y(t)$ grâce à (L.27) (avec (L.31)), on en déduit

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{r_1 t}\left(C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1\right), \\ &= C_2 e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}+r_1\right)t} + C_1 e^{r_1 t}, \\ &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{\left(-r_1-\frac{b}{a}\right)t}, \end{aligned}$$

et d'après (L.30), on a $-r_1 - \frac{b}{a} = r_2$ et donc

$$= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

ce qui montre (6.56).

(3) Troisième cas : $\Delta < 0$.

Ici, on utilise une méthode légèrement différente de celle utilisée dans `https://www.imo.universite-paris-sac` `fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf` .

Il suffit de reprendre les calculs du cas 2 en supposant cette fois-ci que les racines r_1 et r_2 sont complexes, données par (6.55). Il existe donc des complexes C_1 et C_2 tels que (6.56) ait lieu. Avec les notations (6.57), on a donc

$$y(t) = C_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(\alpha-i\omega)t},$$

et donc

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{L.32}$$

On écrit ensuite que la fonction $y(t)$ est à valeurs réelles. D'après (L.32), on a

$$\overline{y(t)} = \overline{(e^{\alpha t})}\left(\overline{C_1}\,\overline{(e^{i\omega t})} + \overline{C_2}\,\overline{(e^{-i\omega t})}\right)$$

et donc, puisque α et ω sont réels, on a

$$\overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\overline{C_1} e^{-i\omega t} + \overline{C_2} e^{i\omega t}\right) \tag{L.33}$$

De (L.32) et (L.33), on déduit

$$y(t) - \overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\left(C_1 - \overline{C_2}\right)e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right)e^{-i\omega t}\right). \tag{L.34}$$

On a donc, pour tout t, puisque $y(t)$ est réel

$$0 = y(t) - \overline{y(t)}$$

et donc, d'après (L.34),

$$\left(C_1 - \overline{C_2}\right)e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right)e^{-i\omega t} = 0.$$

Puisque cela est vrai pour tout t, on peut prendre deux valeurs différentes de t et vérifier que cela implique

$$C_1 = \overline{C_2} \text{ et } C_2 = \overline{C_1}$$

Si on remplace cela dans (L.32), on a donc

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1} e^{-i\omega t}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1 e^{i\omega t}}\right), \\ &= 2e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left(C_1 e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Si on écrit $C_1 = K + iK'$, avec K et K' réels, o a donc

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\omega t} &= (K + iK')e^{i\omega t}, \\ &= (K + iK')\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \\ &= K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t) + i\left(K\sin(\omega t) + K'\cos(\omega t)\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Re}(y(t)) = K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t),$$

et, d'après ce qui précède

$$y(t) = 2e^{\alpha t}\left(K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t)\right)$$

ce qui permet de montrer (6.55), en posant $A = 2K$ et $B = -2K'$.

Annexe M

Approximations de π

Cette annexe est issue de [DB21].

M.1. Introduction

Il existe de très nombreux moyens d'approcher la valeur de π. On pourra consulter les pages suivantes : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation_de_%CF%80`, `http://serge.mehl.free.fr/anx/iso_perim.html`, `https://melusine.eu.org/syracuse/bc/archimede/doc-a4.pdf` et surtout ces dernières [1] qui ont inspiré ce texte : `http://www.pi314.net/fr/archi.php`, `http://www.pi314.net/fr/cues.php` et `http://serge.mehl.free.fr/chrono/Cusa.html`. Les deux méthodes constituent les plus géométriques et les plus intuitives (et naturellement possibles à la règle et du compas) pour approcher π.

M.2. Méthode d'Archimède

M.2.1. Principe

L'idée est de construire deux suites de polygone réguliers de même nombre de sommets tels qu'un cercle donnés soit circonscrit à chacun des polygone de la première suite (le cercle passe par tous les sommets) et ce cercle soit inscrit dans chacun des polygone de la seconde suite (le cercle est tangent à tous les cotés de ce polygone). Par la suite, pour simplifier les polygones auxquels est cisconcrit le cercle seront dits inscrits dans le cercle et les polygones dans lequel le cercle est inscrits seront dits circonscrits au cercle. Chacune des deux suite de polygone se rapprochera du cercle donné de telle sorte que les polygones aient des périmètres (faciles à calculer) qui se rapprochent par défaut et par excès du périmètre du cercle. Au début, on considère deux héxagones réguliers inscrit et circonscrit au cercle. Ensuite à chaque étape, on double le nombre de sommet de chacun des deux polygones en construisant deux nouveaux polygones qui soient de nouveau respectivement inscrits et circonscrit au cercle.

M.2.2. Mise en évidence géométrique

Archimède a tout d'abord construit un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $1/2$ et un hexagone régulier circonscrit au cercle, constructions qui peuvent être faites à la règle et au compas. Voir figure M.1. Le côté de l'hexagone inscrit est égal à $DC = 1/2$ (rayon du cercle) tandis que le côté de celui qui est circonscrit vaut $AB = \sqrt{3}/3$. En effet, d'une part, le triangle OAB est équilatéral et sa hauteur OI (voir figure M.1) est égal à $1/2$, rayon du cercle. Ainsi, $OC = 1/2$ et puisque le triangle OCD est équilatéral, on a bien $DC = 1/2$ D'autre part, le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OIA donne, puisque I est le milieu de $[AB]$

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{1}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{OA^2}{4}$$

et donc

$$OA^2 = \frac{1}{3},$$

1. on pourra aussi consulter `http://www.pi314.net/fr/index.php`.

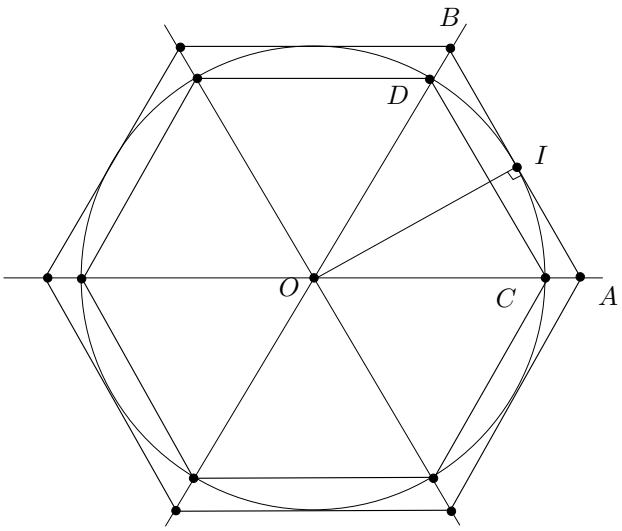


FIGURE M.1. Hexagones réguliers inscrit et circonscrit au cercle de rayon 1/2.

et

$$OA = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

et donc

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les périmètres de ces deux hexagones, respectivement égaux à $6 \times 1/2 = 3$ et $6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ constituent une approximation par défaut et par excès du périmètre du cercle, égal ici à π :

$$3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3} \approx 3,4641. \tag{M.1}$$

Archimède a ensuite construit deux autres polygones réguliers, inscrit et circonscrit au cercle, en doublant le nombre de cotés, opération qui peut se faire à la règle et au compas. Les périmètres de ces deux polygones constituent un encadrement de π, et quand le nombre de coté grandit, ces deux polygones se confondent avec le cercle, ce qui fournit donc une approximation de π. Nous notons, à la n-ième étape I_n le périmètre du polygone inscrit dans le cercle et C_n le périmètre du polygone circonscrits au cercle.

M.2.3. Construction à la règle et au compas

Sur les figures M.2 à M.4, sont indiquées les constructions de I_0, I_1 et I_2. Le lecteur pourra mesurer, sur chaque figure, le demi-périmètre donné, en utilisant la distance de 1/2 donnée et vérifier qu'il est proche de $\pi/2$ (ou de π en prenant 1 à la place de 1/2 !).

M.2.4. Étude géométrique

Formons de façon géométrique l'expression des suites I_n et C_n qu'a proposées Archimède pour approcher π. Naturellement, le formalisme utilisé n'est pas l'original. À l'étape numéro $n \in \mathbb{N}$ du procédé, notons

U_n la longueur du côté du polygone régulier inscrit dans le cercle, (M.2a)

V_n la longueur du côté du polygone régulier circonscrit au cercle. (M.2b)

Voir les figures M.5.

Ces deux polygones ont 6.2^n cotés. (M.3)

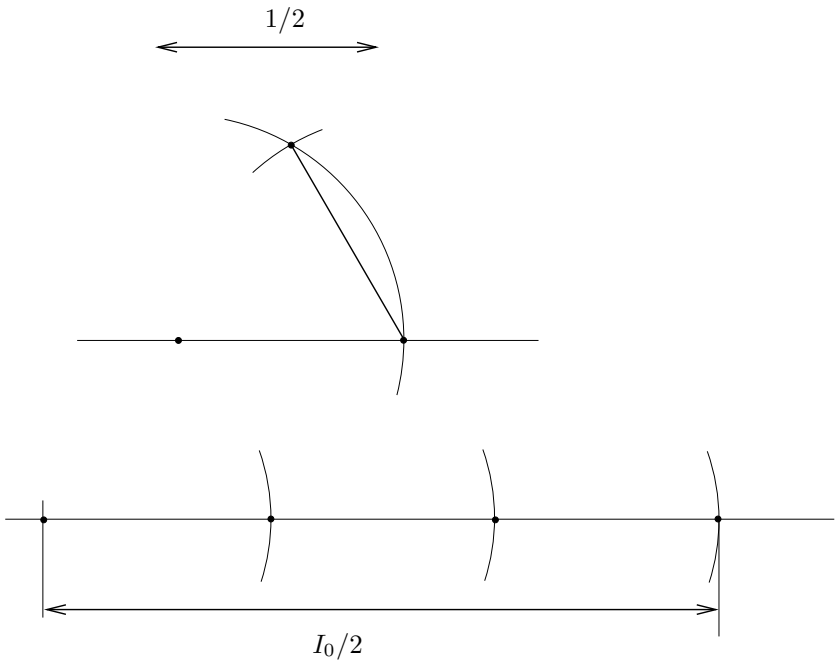


FIGURE M.2. Construction à la règle et au compas de I_0.

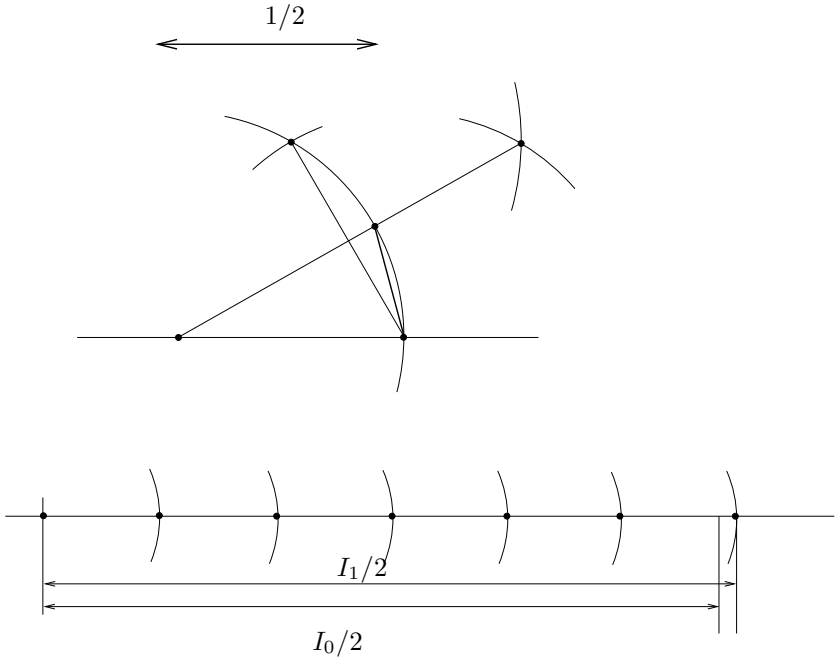


FIGURE M.3. Construction à la règle et au compas de I_1.

D'après ce qui précède, on a

$$U_0 = \frac{1}{2}, \quad V_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{M.4}$$

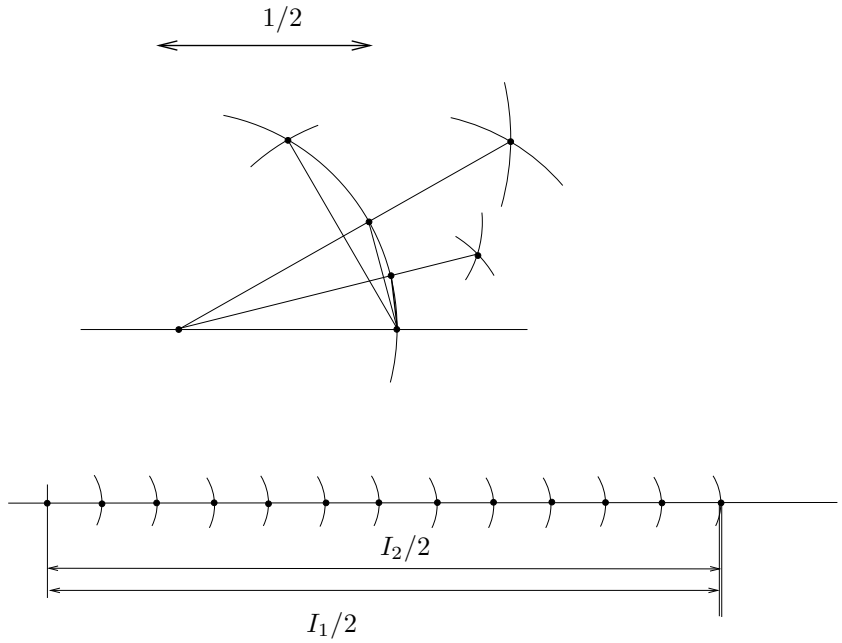
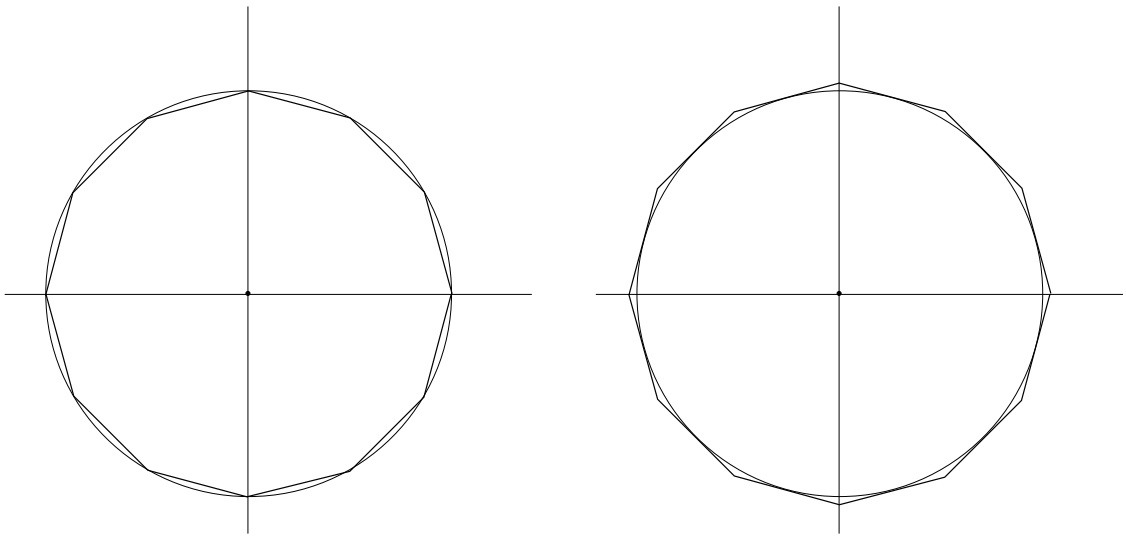


FIGURE M.4. Construction à la règle et au compas de I_2.



(a) Le polygone inscrit (b) Le polygone circonscrit

FIGURE M.5. Les polygones inscrit et circonscrit (sur ces figures, ils ont 12 cotés ($n = 1$)).

Contrairement à la page `http://www.pi314.net/fr/archi.php`, on peut trouver une relation de récurrence entre U_n et U_{n+1} et V_n et V_{n+1} directement, de façon géométrique, sans passer par la trigonométrie, inconnue d'Archimède !

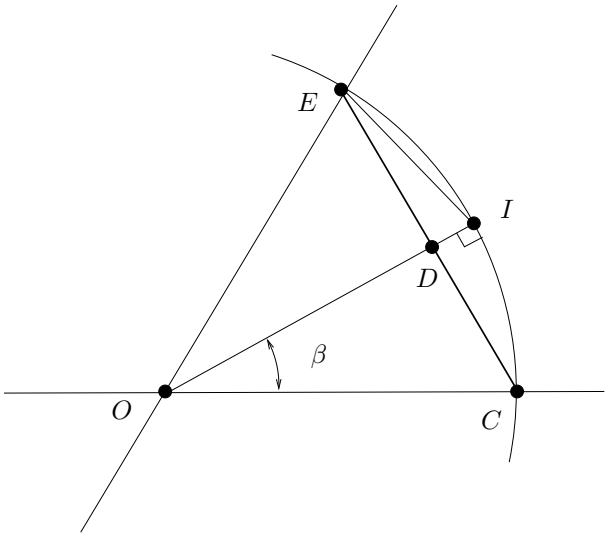


FIGURE M.6. Relation entre U_n et U_{n+1}.

Sur la figure M.6, on suppose que $U_n = CE$. Calculons $U_{n+1} = EI$, en appliquant deux fois le théorème de Pythagore aux deux triangles EDI et ODE, ce qui fournit :

$$EI^2 = ED^2 + DI^2,$$
$$OE^2 = OD^2 + DE^2,$$

et donc

$$U_{n+1}^2 = \frac{1}{4}U_n^2 + DI^2,$$
$$\frac{1}{4} = OD^2 + \frac{1}{4}U_n^2$$

et puisque

$$\frac{1}{2} = OI = OD + DI,$$

on a donc, en supposant

$$U_n \leq 1, \tag{M.5}$$

on a

$$\begin{aligned}
U_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}U_n^2 + \left(\frac{1}{2} - OD\right)^2, \\
&= \frac{1}{4}U_n^2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}U_n^2}\right)^2, \\
&= \frac{1}{4}U_n^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}U_n^2 - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}U_n^2}, \\
&= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}U_n^2}, \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right),
\end{aligned}$$

et donc puisque $U_{n+1} \geq 0$ et $1 \geq \sqrt{1-U_n^2}$

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}}. \tag{M.6}$$

À ce niveau-là, on peut montrer par récurrence sur n que (M.5) est valable pour tout n. D'après (M.4), c'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai pour un entier n, les calculs donnant U_{n+1} sont valables. D'après (M.6), $U_{n+1} \leq 1$ est successivement équivalent à

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}} \leq 1 &\iff \sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}} \leq \sqrt{2},\\ &\iff 1-\sqrt{1-U_n^2} \leq 2,\\ &\iff -1 \leq \sqrt{1-U_n^2},\end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque $-1 < 0$.

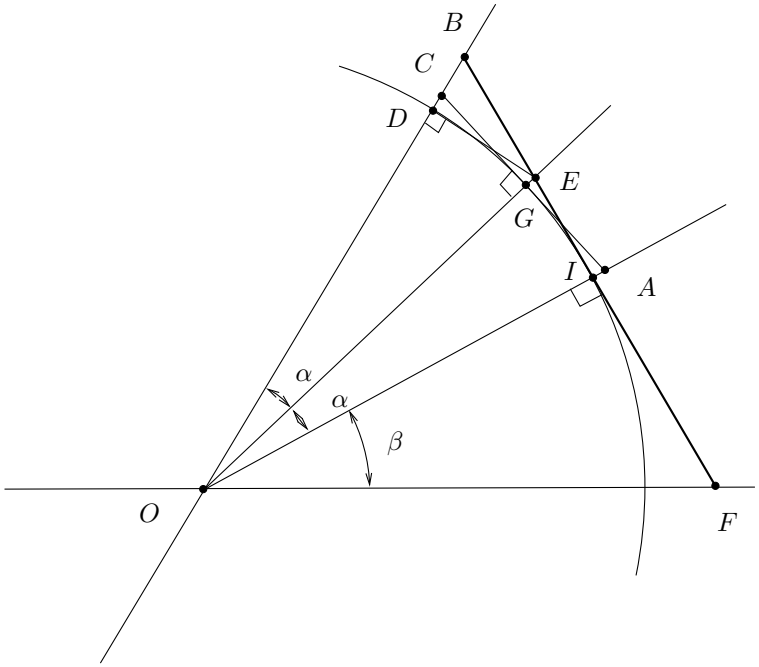


FIGURE M.7. Relation entre V_n et V_{n+1}.

Faisons de même pour calculer V_{n+1} en fonction de V_n. Sur la figure M.7, on suppose que $V_n = BF$. Calculons $V_{n+1} = CA$, de nouveau en appliquant deux fois le théorème de Pythagore judicieusement. Calculons tout d'abord CG en fonction de BI. On introduit le point E, intersection des droites (OG) et (IB) (qui ne sont pas parallèles). Une astuce consiste à remarquer que

$$IE = CG = DE = GA, \tag{M.7}$$

puisque chacun des segments est défini par le même angle α. Voir figure M.7. Il nous faut donc calculer

$$a = IE \tag{M.8}$$

en fonction de

$$b = IB. \tag{M.9}$$

Notons

$$e = DB. \tag{M.10}$$

Par symétrie, on a aussi l'orthogonalité des droites (ED) et (OD). Le théorème de Pythagore appliqué au triangle DEB fournit donc

$$BD^2 + DE^2 = EB^2,$$

soit encore

$$BD^2 + a^2 = (IB - IE)^2 = (b - a)^2,$$

et donc

$$BD^2 + a^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

d'où

$$2ab = b^2 - BD^2,$$

et puisque b est non nul :

$$a = \frac{1}{2b}\left(b^2 - e^2\right) \tag{M.11}$$

Appliquons maintenant le théorème de Pythagore au triangle BIO :

$$OI^2 + IB^2 = OB^2,$$

soit puisque le cercle est de rayon $1/2$:

$$\frac{1}{4} + b^2 = (OD + DB)^2 = \left(\frac{1}{2} + BD\right)^2$$

ce qui donne

$$\left(e + \frac{1}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{1}{4},$$

et

$$e + \frac{1}{2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}$$

soit encore

$$e = -\frac{1}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}. \tag{M.12}$$

On a plus qu'à réutiliser (M.11) qui fournit :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2b}\left(b^2 - e^2\right), \\
&= \frac{1}{2b}\left(b^2 - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}\right)^2\right), \\
&= \frac{1}{2b}\left(b^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} - b^2 - \frac{1}{4}\right), \\
&= \frac{1}{2b}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}\right), \\
&= \frac{1}{4b}\left(-1 + \sqrt{4b^2 + 1}\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$a = \frac{1}{4b}\left(-1 + \sqrt{4b^2 + 1}\right). \tag{M.13}$$

On a enfin, d'après (M.7) et (M.8)

$$V_{n+1} = CA = 2CG = 2IE = 2a,$$

et d'après (M.9)

$$V_n = BF = 2BI = 2b.$$

Tout cela donne grâce à (M.13) :

$$\frac{V_{n+1}}{2} = \frac{1}{2(2b)}\left(-1+\sqrt{(2b)^2+1}\right) = \frac{1}{2V_n}\left(-1+\sqrt{V_n^2+1}\right)$$

et finalement

$$V_{n+1} = \frac{1}{V_n}\left(-1+\sqrt{V_n^2+1}\right) \tag{M.14}$$

On vérifie aisément par récurrence sur n que cette expression assure que pour tout n, on a $0 < V_n$.

Remarque M.1. Notons qu'en utilisant le langage des lignes trigonométriques, on a (voir l'angle β sur la figure M.7)

$$V_n = 2BI = 2IF = 2OI\tan\beta,$$

soit

$$V_n = \tan\beta \tag{M.15}$$

Naturellement, on a aussi

$$V_{n+1} = CA = 2CG = \tan\alpha,$$

soit puisque $\alpha = \beta/2$:

$$V_{n+1} = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{M.16}$$

Le calcul qui est fait dans `http://www.pi314.net/fr/archi.php` consiste à calculer classiquement $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ puis, par le biais de la résolution d'une équation du second degré en $\tan(\theta)$ d'obtenir l'expression de $\tan(\theta)$ en fonction de $\tan(2\theta)$. Ainsi, grâce à (M.16), on obtient l'expression de V_{n+1} en fonction de celle de V_n, ce que l'on a fait avec deux simples applications du théorème de Pythagore !

Remarque M.2. Comme dans la remarque M.1, on a aussi (voir l'angle β sur la figure M.6) :

$$U_n = CE = 2CD = 2OI\sin\beta,$$

et donc

$$U_n = \sin\beta \tag{M.17}$$

Les valeurs initiales des suites U_0 et V_0 sont données par (M.4) et les relations de récurrence vérifiées par les suites U_n et V_n sont données par (M.6) et (M.14), ce qui donne finalement

$$U_0 = \frac{1}{2}, \tag{M.18a}$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tag{M.18b}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}}, \tag{M.18c}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{V_n}\left(-1+\sqrt{V_n^2+1}\right). \tag{M.18d}$$

D'après, (M.3), puisque chacun des polygones est constitué de 6.2^n cotés chacun de longueur U_n et V_n, on obtient donc l'expression des périmètres I_n et C_n des polygones inscrits et circonscrits :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = 6.2^n U_n, \tag{M.19a}$$

$$C_n = 6.2^n V_n. \tag{M.19b}$$

On peut donc déterminer numériquement les valeurs de I_n et C_n pour tout n, grâce à (M.18). Naturellement, chacune des valeurs de I_n et C_n peut s'obtenir à la règle et au compas (voir figure M.4).

Remarque M.3. On peut aussi obtenir des relations de récurrence qui portent uniquement sur I_n et C_n en écrivant

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= 6.2^{n+1}U_{n+1},\\
&= 6.2^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}},\\
&= 6.2^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{I_n}{6.2^n}\right)^2}},\\
&= 6.2^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{6.2^n}\sqrt{(6.2^n)^2-I_n^2}},\\
&= 6.2^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{6.2^n}}\sqrt{6.2^n-\sqrt{(6.2^n)^2-I_n^2}},\\
&= 2.6.2^n\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{6.2^n}}\sqrt{6.2^n-\sqrt{(6.2^n)^2-I_n^2}},\\
&= \sqrt{6.2^n}\sqrt{2}\sqrt{6.2^n-\sqrt{(6.2^n)^2-I_n^2}},
\end{aligned}$$

et donc

$$I_0 = 3, \tag{M.20a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \sqrt{2q_n}\sqrt{q_n-\sqrt{q_n^2-I_n^2}}, \tag{M.20b}$$

$$q_0 = 6, \tag{M.20c}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{n+1} = 2q_n. \tag{M.20d}$$

On montre de même qu'avec la même définition de q_n :

$$C_0 = 2\sqrt{3}, \tag{M.21a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \frac{2q_n}{C_n}\left(-q_n+\sqrt{C_n^2+q_n^2}\right). \tag{M.21b}$$

On consultera les simulations numériques faites plus bas.

M.2.5. Preuve géométrique de la convergence des deux suites I_n et C_n vers π

Par exemple, pour $n = 0$, on retrouve (M.1) :

$$I_0 = 3, \quad C_0 = 2\sqrt{3}$$

L'idée d'Archimède est que I_n et C_n constituent une approximation de π par défaut et par excès, puisque qu'elles correspondent aux périmètres des polygones qui se rapprochent du cercle et qui sont respectivement inscrits et circonscrits donc de périmètres respectivement plus petits et plus grands que celui de cercle, dont on sait qu'il vaut π.

Tentons de fournir une preuve qu'aurait pu écrire Archimède en n'utilisant que les calculs précédents, fondés sur la géométrie élémentaire (on n'utilise que les théorèmes de Thalès et de Pythagore, sans utilisation des lignes trigonométriques et de leurs propriétés analytiques).

Donnons tout d'abord le lemme suivant, fondé sur la géométrie élémentaire :

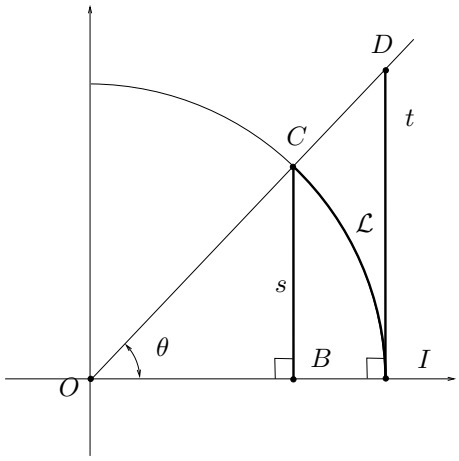


FIGURE M.8. La longueur de l'arc de cercle $\mathcal{L}$, s et t.

LEMME M.4.

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et le cercle de centre O et de rayon r (voir figure M.8.) On considère C le point du cercle définissant l'angle θ, B son projeté orthogonal sur l'axe de x, I le point de l'axe des x d'abscisse 1 et D le point de la droite (OC) d'abscisse 1. On note $s = BC$, $\mathcal{L}$, la longueur de l'arc engendré par l'arc de cercle de centre O et défini par l'angle θ et $t = IB$. On a alors

$$s < \mathcal{L} < t, \tag{M.22}$$

et

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta. \tag{M.23}$$

DÉMONSTRATION. Dans le (vrai) triangle rectangle CBI, l'hypoténuse CI est strictement plus grande que le coté BC. La longueur $\mathcal{L}$ est strictement plus grande que la corde CI et on a donc

$$s < \mathcal{L}. \tag{M.24}$$

L'angle θ étant dans $]0, \pi/2[$, le segment le segment $[ID]$ est à l'extérieur du cercle. On en déduit que l'aire de la portion de disque délimitée par θ est strictement plus petite que l'aire du triangle ODI. Ces aires sont respectivement égales à $\theta r^2/2$ et $rt/2$. Puisque

$$\mathcal{L} = r\theta,$$

ces aires valent donc respectivement $\mathcal{L}r/2$ et $tr/2$ et on a donc

$$\frac{\mathcal{L}r}{2} < \frac{tr}{2},$$

et donc

$$\mathcal{L} < t. \tag{M.25}$$

L'inégalité (M.22) provient donc (M.24) et de (M.25). En remplaçant dans (M.22) respectivement s, $\mathcal{L}$ et t par $r\sin\theta$, $r\theta$ et $r\tan\theta$, on déduit (M.23).

REMARQUE M.5. Une preuve "moderne" pour démontrer analytiquement directement (M.23) (et donc en déduire (M.22) qui est équivalente) consiste à utiliser la convexité et la concavité des fonctions tan et sin. En effet, on a

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Donc la dérivée de tan est strictement croissante (car cos est décroissante) et donc tan est strictement convexe sur $[0, \pi/2[$. On a aussi

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sin''(x) = -\cos(x) < 0,$$

Donc sin est strictement convexe sur $[0, \pi/2[$. Ainsi, le graphe de la fonction tan est toujours strictement au-dessus de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, tandis que le graphe de la fonction sin est toujours strictement en-dessous de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. Les deux tangentes des deux fonctions tan et sin en zéro sont la droite d'équation $y = x$. On a donc

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan(x) > x > \sin(x).$$

Mais ce raisonnement nous pousse à tourner à rond [2] car cette preuve est fondée sur la dérivée du sinus, elle même fondée sur l'inégalité que nous sommes en train de montrer !

□

Si on applique la première inégalité de (M.22), à la situation de la figure M.6, en notant $\widetilde{\mathcal{L}}$ la longueur de l'arc de cercle délimité par I et E, on a

$$ED < \widetilde{\mathcal{L}}. \tag{M.26}$$

En notant $\mathcal{L}$ la longueur de l'arc de cercle délimité par C et E qui vaut $2\widetilde{\mathcal{L}}$, on déduit de (M.26)

$$U_n < \mathcal{L}. \tag{M.27}$$

De même, la seconde inégalité de (M.22), à la situation de la figure M.7, où cette fois-ci, $\widetilde{\mathcal{L}}$ désigne la longueur de l'arc de cercle délimité par I et D et $\mathcal{L}$ désigne la longueur de l'arc de cercle délimité par F et B, on a

$$IB > \widetilde{\mathcal{L}}, \tag{M.28}$$

dont on déduit

$$V_n > \mathcal{L}. \tag{M.29}$$

En multipliant respectivement (M.27) et (M.29) par le nombre de cotés des polygones (à l'étape n et qui correspond aussi au nombre de fois où $\mathcal{L}$ est répété pour obtenir le périmètre de cercle), on obtient donc

$$I_n < \pi, \tag{M.30a}$$

et

$$\pi < C_n. \tag{M.30b}$$

Si on revient de nouveau sur la figure M.6, l'hypoténuse du triangle rectangle EDI étant strictement supérieure à son coté ED. On a donc $U_{n+1} = EI > ED = U_n/2$ et donc

$$U_n < 2U_{n+1}$$

Si on multiplie cela par le nombre de cotés, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n < I_{n+1}. \tag{M.31}$$

Si on revient de nouveau sur la figure M.7, l'hypoténuse du triangle rectangle BDE étant strictement supérieure à son coté ED. On a donc $BE > DE$. Ainsi,

$$BI = BE + EI > DE + EI,$$

et d'après (M.7), il vient donc

$$BI > CG + GA,$$

et donc

$$BI > CA,$$

2. dans le sens trigonométrique ...

soit encore

$$\frac{V_n}{2} > V_{n+1},$$

et finalement

$$V_n > 2V_{n+1},$$

Si on multiplie cela par le nombre de cotés, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n > C_{n+1}. \tag{M.32}$$

D'après (M.30), (M.31) et (M.32), les deux suites I_n et C_n sont donc respectivement croissante et majorée et décroissante et minorée et convergent donc respectivement vers deux limites I et C (qui sont strictement positives).

Le raisonnement d'Archimède aurait pu être le suivant : quand θ est "petit", d'après (M.22), on a

$$s \approx \mathcal{L} \approx t,$$

et, en raisonnant comme dans les inégalités (M.27) et (M.29), on a, pour n "grand",

$$U_n \approx \mathcal{L},$$
$$V_n \approx \mathcal{L},$$

dont on déduit, comme précédemment,

$$I_n \approx \pi,$$
$$C_n \approx \pi,$$

et donc que les deux limites I et C sont égales à π.

Plus rigoureusement, on peut utiliser (M.15) et (M.17) (qu'Archimède aurait pu écrire sous une autre forme, car n'on utilise que les définitions géométriques des lignes trigonométriques et non leur propriété analytique) qui donnent

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{\sin\beta}{\tan\beta},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_n}{V_n} = \cos\beta. \tag{M.33}$$

Quand n tend vers l'infini, β tend vers zéro et d'après l'inégalité (M.23), $\sin\beta$ tend vers zéro et donc $\cos\beta$ tend vers 1. Ainsi, d'après (M.33)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1. \tag{M.34}$$

En multipliant à gauche par le nombre de cotés dans la fraction, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{C_n} = 1. \tag{M.35}$$

et donc

$$\frac{I}{C} = 1.$$

et donc

$$I = C = l.$$

Si on passe à la limite n tendant vers l'infini dans (M.30), on obtient

$$l \leq \pi \leq l$$

et donc

$$l = \pi.$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n < \pi < C_n, \tag{M.36a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi, \tag{M.36b}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \pi. \tag{M.36c}$$

On peut donc affirmer *a posteriori* que les deux suites I_n et C_n sont adjacentes.

M.2.6. Définition de la longueur d'un cercle et de π.

À un niveau élémentaire, les résultats précédents peuvent en fait servir à définir la longueur d'un cercle et π. Si on considère la longueur d'un segment comme connue, la longueur d'une courbe quelconque doit se faire par un passage à la limite. Par exemple, pour une courbe paramétrée, on pourra consulter [Bas11a, section 3.2.1 Arc rectifiable et longueur] qui nous montre qu'il est nécessaire de passer par une intégrale, ce que l'on veut éviter ici, afin de rester dans le domaine de la géométrie élémentaire.

De façon élémentaire, on peut se passer même de la notion d'angle (comme le faisaient les Mésopotamiennes [3]). Nous n'utilisons maintenant plus la longueur de cercles et d'arcs de cercle, ni même la définition de π (comme périmètre d'un cercle de rayon $1/2$ connu). On renvoie à la figure M.9 où apparaissent U_n et V_n.

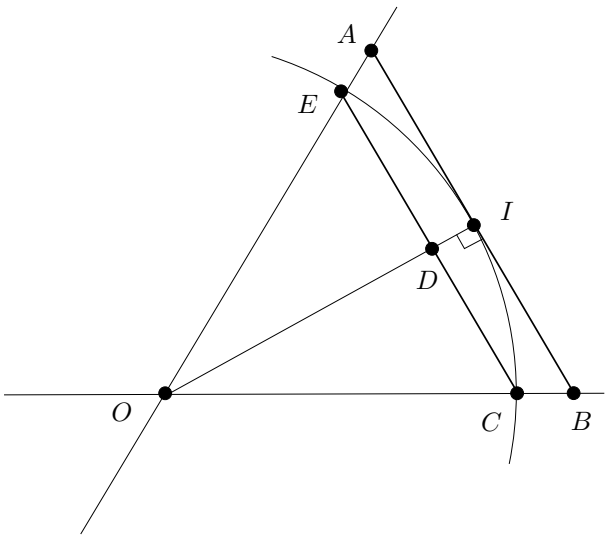


FIGURE M.9. Relation entre U_n et V_n.

D'après les théorèmes de Thalès et de Pythagore appliqués respectivement aux triangles OAI et ODE, on a successivement

$$\begin{aligned}
\frac{U_n}{V_n} &= \frac{ED}{AI}, \\
&= \frac{OD}{OI}, \\
&= \frac{\sqrt{OE^2 - ED^2}}{OI}, \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{U_n^2}{4}}}{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

3. voir par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_mésopotamiennes`

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_n}{V_n} = \sqrt{1 - U_n^2}. \tag{M.37}$$

On déduit de (M.37) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n < V_n. \tag{M.38}$$

Les égalités (M.31) et (M.32) impliquent toujours que les deux suites I_n et C_n sont respectivement croissante et minorée. De plus, de (M.38), on déduit qu'elles sont respectivement majorée et minorée. Elles convergent donc respectivement vers deux limites I et C (qui sont strictement positives). Enfin, si on utilise (M.19a), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \frac{C_n}{6.2^n},$$

et d'après (M.32), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n < \frac{C_0}{6.2^n}. \tag{M.39}$$

Ainsi, de (M.38) et (M.39), on déduit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0, \tag{M.40a}$$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0, \tag{M.40b}$$

et donc, grâce à (M.37), on obtient de nouveau (M.34) et (M.35). Les deux limites des suites I_n et C_n sont donc égales et la limite pourra donc être la définition de π et qui sera aussi la longueur du cercle de rayon $1/2$ dont on est parti.

M.2.7. Preuve analytique de la convergence des deux suites I_n et C_n vers π et qualité de la convergence

Montrons cette fois-ci analytiquement (M.36), en précisant la qualité de la convergence et en utilisant les propriétés analytiques des lignes trigonométriques, ce que n'aurait pas probablement fait Archimède !

Montrons maintenant rigoureusement (M.36) avec un langage "moderne". Pour cela, on fournit maintenant une expression explicite de I_n et de C_n en fonction de n. A la n-ième étape, on note α_n l'angle au sommet correspondant à chacun des secteurs angulaires définissant U_n et V_n. Cet angle est égal à 2π divisé par le nombre de coté soit 6.2^n. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{2\pi}{6.2^n}. \tag{M.41}$$

Les angles β donnés sur les figures M.6 et M.7 sont égaux à $\alpha_n/2$ (par symétrie) et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \frac{\pi}{6.2^n}. \tag{M.42}$$

D'après (M.17)

$$U_n = \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right),$$

et donc, d'après (M.3) et (M.19a), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = 6.2^n \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right). \tag{M.43}$$

De même, d'après (M.15), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = 6.2^n \tan\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right). \tag{M.44}$$

Les deux équations (M.43) et (M.44) n'ont aucune utilité pratique pour déterminer les valeurs numériques de U_n et de V_n puisqu'elles font intervenir π que l'on cherche ! On leur préférera à cet égard, les formules (M.20) et (M.21). Mais pour l'étude de la convergence, elles sont fondamentales. On a effet, d'après (M.23),

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta, \tag{M.45a}$$

et le cours d'analyse (formule de Taylor-Lagrange) nous montre que

$$\sin(\theta) = \theta + O\left(\theta^3\right), \tag{M.45b}$$
$$\tan(\theta) = \theta + O\left(\theta^3\right). \tag{M.45c}$$

Les inéquations (M.45a) donnent, pour $\theta = \frac{\pi}{6.2^n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 6.2^n \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right) < 6.2^n \frac{\pi}{6.2^n} < 6.2^n \tan\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$$

et donc, d'après (M.43) et (M.44), on retrouve (M.36a). On obtient aussi, grâce à (M.45b),

$$\begin{aligned} I_n &= 6.2^n \left(\frac{\pi}{6.2^n} + O\left(\frac{\pi}{2^{3n}}\right)\right), \\ &= \pi + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right), \\ &= \pi + O\left(\frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

On fait de même pour C_n, grâce à (M.45c), et on obtient finalement

$$I_n = \pi + O\left(\frac{1}{4^n}\right), \tag{M.46a}$$
$$C_n = \pi + O\left(\frac{1}{4^n}\right), \tag{M.46b}$$

ce qui implique bien (M.36b) et (M.36c).

Nous constateront aussi cela de façon numérique plus bas.

Remarque M.6. À partir des équations (M.20) et (M.21) il n'était pas possible de montrer la convergence des suites vers π. Notons cependant que les équations (M.18c) et (M.18d) nous permettent de retrouver (M.40). En effet, les suites U_n et V_n sont en effet définies par $U_{n+1} = F(U_n)$ et $V_{n+1} = G(U_n)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}, \tag{M.47a}$$
$$G(x) = \frac{1}{x}\left(-1 + \sqrt{x^2 + 1}\right). \tag{M.47b}$$

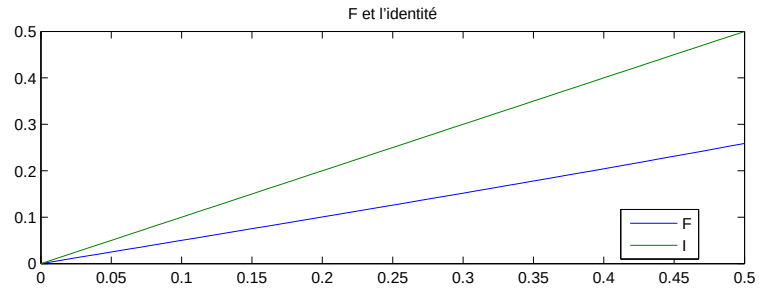
On peut montrer que l'on a les propriétés suivantes (voir figures M.10) : si on pose $\mathcal{I} = [0, U_0]$ et $\mathcal{J} = [0, V_0]$, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{I}$, G, prolongée par 0 en 0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{J}$. De plus,

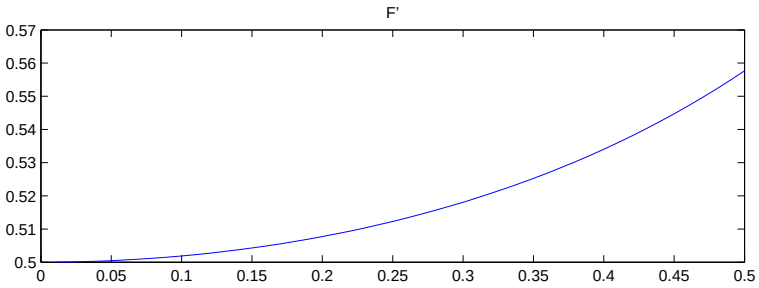
$$\begin{aligned} &F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I} \text{ et il existe } k \in [0, 1[\text{ tel que } \forall x \in \mathcal{I},\ |F'(x)| \leq k\,; \\ &F(\mathcal{J}) \subset \mathcal{I} \text{ et il existe } l \in [0, 1[\text{ tel que } \forall x \in \mathcal{I},\ |F'(x)| \leq l. \end{aligned}$$

D'après [DB21, Théorème "condition suffisante de convergence de la méthode du point fixe", Chapitre 3], les deux suites convergent respectivement vers l'unique point fixe de F et de G sur $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$. Puisque $F(0) = G(0) = 0$, la limite commune est donc nulle. Enfin, on peut montrer que

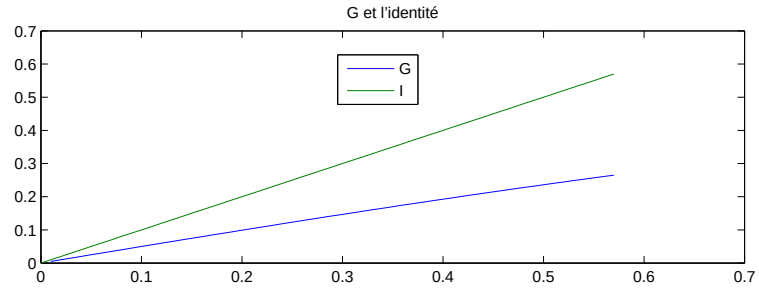
$$\begin{aligned} &\forall x \in]0, U_0], \quad F(x) < x, \\ &\forall x \in]0, V_0], \quad G(x) < x, \end{aligned}$$

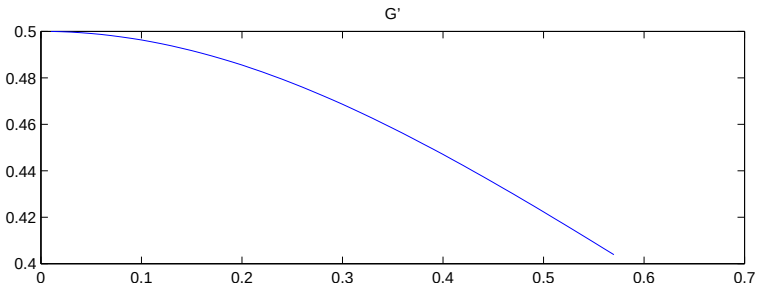
ce qui implique que les deux suites U_n et V_n sont strictement décroissantes.





(a) La fonction F et sa dérivée.





(b) La fonction G et sa dérivée.

FIGURE M.10. Les fonctions F et G.

M.3. Méthode de Cues

L'idée est cette fois-ci de construire une suite de polygones de périmètres constants, qui vont se rapprocher d'un cercle de périmètre égal à ce périmètre ! Cependant, on fait le contraire de la méthode d'Archimède : on déterminer le rayon d'un cercle dont le périmètre est fixé à l'avance. Là encore, plutôt que de donner la récurrence fondée sur la trigonométrie, comme c'est fait dans `http://www.pi314.net/fr/cues.php`, nous

donnons une preuve géométrique, qui met aussi en avance que la construction est aussi possible à la règle et au compas, ce qui est fait dans `http://serge.mehl.free.fr/anx/iso_perim.html`.

M.3.1. Principe

Nous partons d'un carré de coté 1/4 et donc de périmètre 1. Nous allons cette fois-ci construire une suite de polygônes réguliers de mêmes périmètres, tous égaux à 1, le coté du nouveau polygône étant égal à la moitié de l'ancien et comme pour la méthode d'Archimède, le nombre de sommet étant le double. Cette suite de polygône se rapprochera d'un cercle de périmètre 1 et donc de rayon $1/(2\pi)$.

M.3.2. Mise en évidence géométrique

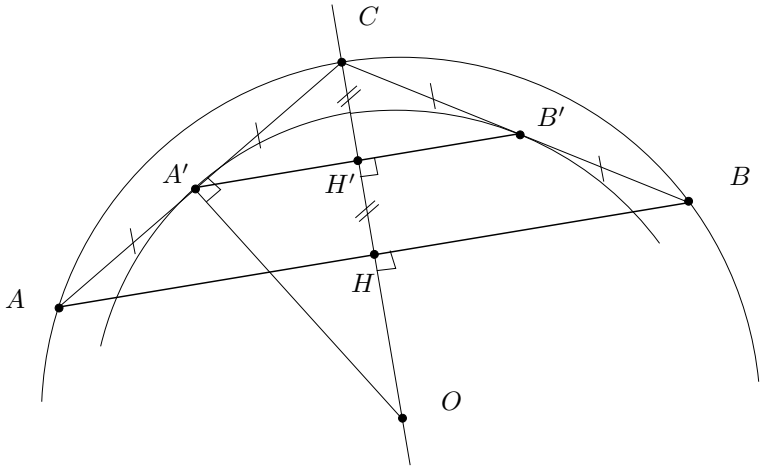


FIGURE M.11. Passage du polygone à celui d'un polygone à deux fois plus de côtés, de même périmètre.

On se donne tout d'abord un polygone régulier de coté $[AB]$ (ayant en tout n cotés), inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O et on construit un polygone ayant deux fois plus de cotés et de périmètre égal au premier (il sera dit isopérimétre au premier). Voir figure M.11. On considère C le milieu de l'arc AB, A' le milieu de $[AC]$ et B' le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[AB]$ et H' le milieu de $[A'B']$. On considère alors le polygone régulier à $2n$ cotés, de centre O, dont l'un des cotés est $[A'B']$ et nous montrons qu'il est bien isopérimètre au premier polygone. Notons r le rayon OA, cercle dans lequel est inscrit le premier polygone et a son apothème, c'est-à-dire, la distance de O au milieu de AB, soit la distance OH. On a donc

$$r = OA, \quad a = OH. \tag{M.48}$$

On note de même

$$r' = OA', \quad a' = OH'. \tag{M.49}$$

qui correspondent respectivement au rayon du cercle dans lequel est inscrit le second polygone et à l'apothème de ce polygone. Il évident, grâce au théorème de la droite des milieux que $A'B' = AB/2$ et donc que le périmètre du second polygone est égal à celui du premier (puisqu'il a deux fois plus de côtés). Ce second polygone sera donc inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r'. Déterminons maintenant a' et r' en fonction de a et de r. D'après le théorème de la droite des milieux, H' est le milieu de $[CH]$, on a donc

$$OH' = \frac{OH + OC}{2}$$

et donc

$$a' = \frac{a + r}{2}. \tag{M.50}$$

Par ailleurs, A et C sont équidistants de O (car appartenant au même cercle de centre O) et puisque A' est le milieu de $[AC]$, la droite (OA') est la médiatrice de $[AC]$. Ainsi dans le triangle rectangle $OA'C$, de hauteur $A'H'$ issue de A, on a

$$OA'^2 = OH'.OC. \tag{M.51}$$

Donnons en effet le petit résultat très classique suivant :

LEMME M.7. *Soit ABC un triangle rectangle en B et H le pied de la hauteur issue de B. On a*

$$AB^2 = AH.AC. \tag{M.52}$$

DÉMONSTRATION.

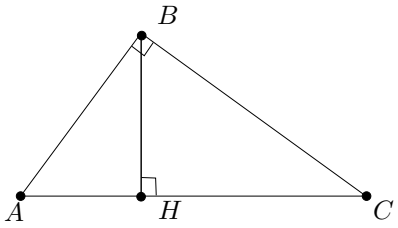


FIGURE M.12. Le triangle rectangle ABC et sa hauteur BH.

On peut en donner deux preuves, la première élémentaire n'utilisant que le théorème de Pythagore (donc connue de Cues !) et la seconde utilisant le produit scalaire. On se réfère à la figure M.12.

(1) Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles ABC, ABH et BHC donne respectivement :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2, \\ AB^2 &= AH^2 + HB^2, \\ BC^2 &= BH^2 + HC^2, \end{aligned}$$

et l'on vérifie que le point H est nécessairement sur $[AC]$, ce qui donne :

$$AC = AH + HC.$$

On déduit donc successivement de tout cela que

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2, \\ &= AH^2 + BC^2 - HC^2, \\ &= AH^2 + AC^2 - AB^2 - HC^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} 2AB^2 &= AH^2 + AC^2 - HC^2, \\ &= AH^2 + AC^2 - (AC - AH)^2, \\ &= AH^2 + AC^2 - AC^2 - AH^2 + 2ACAH, \\ &= 2AC.AH. \end{aligned}$$

(2) Plus rapidement, avec les produits scalaires, on a successivement

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}, \\ &= \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right), \\ &= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CB}, \end{aligned}$$

puisque (BH) est perdendiculaire à (AC), on a $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0$ et donc

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CB}, \\ &= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\overrightarrow{CB}, \\ &= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}, \end{aligned}$$

puisque (AB) est perdendiculaire à (BC), on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0$ et donc

$$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC},$$

quantité qui vaut $AH.AC$ puisque le point H est nécessairement sur $[AC]$.

□

De (M.51), on déduit donc

$$r' = \sqrt{ra'}. \tag{M.53}$$

Grâce à (M.50) et (M.53), on a donc explicité r' et a' en fonction de r et a (et implicitement vérifié que la construction du second polygone en fonction du premier est possible à la règle et au compas.).

Comme dans la méthode d'Archimède, on construit deux suites r_n et a_n correspondant respectivement au rayon du n-ième polygone construit à 2^n côtés et à l'apothème de ce polygone. Le périmètre sera choisi constant, égal à 1. Au début de la construction, on a $n=2$. On remplace donc (M.3) par

$$\text{Pour } n \geq 2, \text{ le polygone a } 2^n \text{ côtés.} \tag{M.54}$$

Nous supposerons que

$$\text{le périmètre constant du polygone vaut 1.} \tag{M.55}$$

On a donc la valeur c_n du côté du polygone à l'étape n :

$$\forall n \geq 2, \quad c_n = \frac{1}{2^n}. \tag{M.56}$$

Nous avons les relations suivantes de récurrence, obtenues grâce à (M.50) et (M.53)

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2}, \tag{M.57a}$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n a_{n+1}}. \tag{M.57b}$$

Attention, ce ne sont pas excactement les fameuses suites arithmético-géométriques que l'on verra plus bas.

L'avantage de cette méthode est de proposer une construction de suite a_n et r_n dont la limite est liée à π. Dans la méthode d'Archimède, au contraire, il fallait multiplier par 2^n une longueur qui tendait vers zéro, ce qui pose des problèmes pour la construction géométrique (dupliquer un grand nombre de fois le même segment) ou numériquement, comme on le vera plus bas.

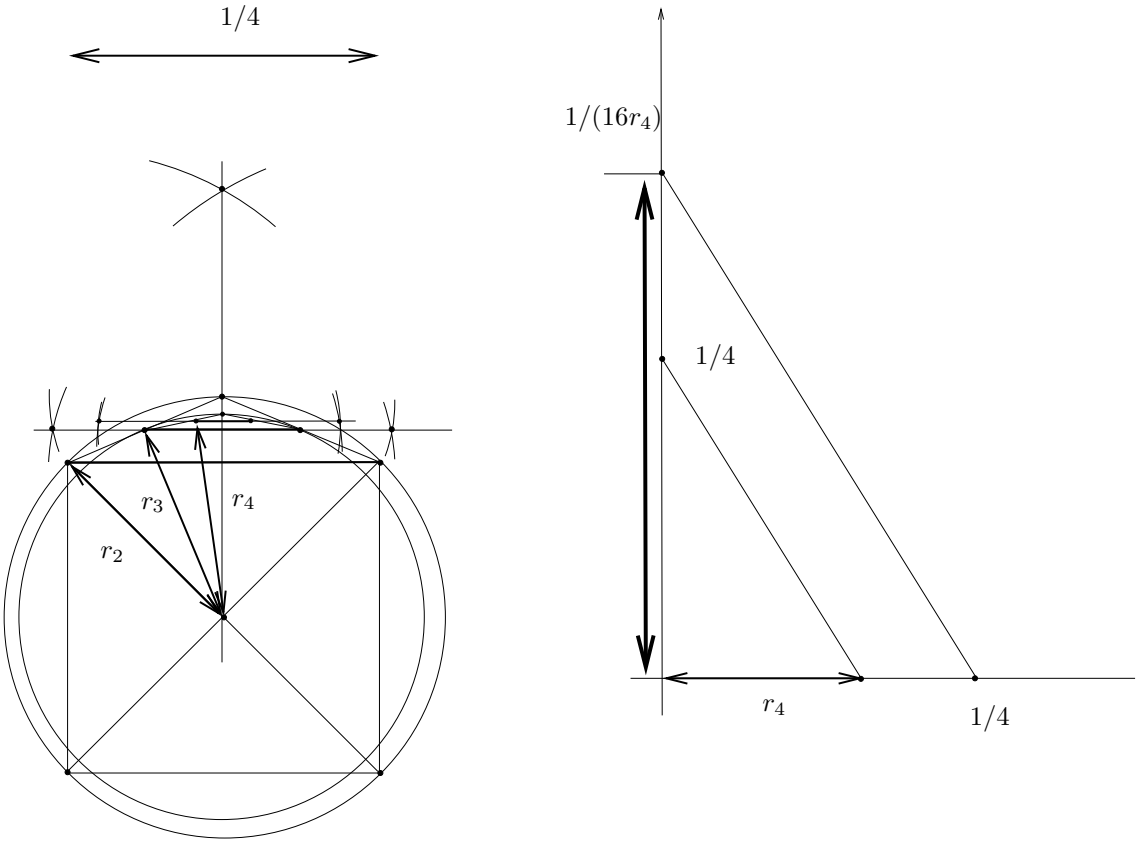


FIGURE M.13. Construction de a_4 $1/(2a_2)$ à la règle et au compas par la méthode de Cues.

M.3.3. Construction à la règle et au compas

On donnera en figure M.13, la construction de a_4 et l'approximation de π en construisant $1/r_4$ (voir [Car84, p. 21]), puis $1/(2r_4)$. La construction du carré initial n'est pas faite et laissée au lecteur !

Le lecteur pourra vérifier que le segment représenté à droite représentant $1/(16r_4)$ vaut bien à peu près $\pi/8$ (puisque $1/(2r_4) \approx \pi$) !

M.3.4. Étude géométrique

Sur la figure M.11, on constate que par construction $OA' < OA$ et donc

$$\forall n \geq 2, \quad r_{n+1} < r_n. \tag{M.58}$$

On a aussi $OH' > 0H$ et donc

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} > a_n. \tag{M.59}$$

Par ailleurs, par construction, à chaque étape, le polygone construit est inscrit dans le cercle de rayon $[OA] = r_n$ et donc son périmètre est strictement inférieur au cercle de rayon r_n soit $1 < 2\pi r_n$, soit encore

$$\forall n \geq 2, \quad r_n > \frac{1}{2\pi}. \tag{M.60}$$

De même, par construction, à chaque étape, le polygone construit est circonscrit au cercle de rayon $[OH] = a_n$ et donc son périmètre est strictement supérieur au cercle de rayon a_n soit $1 > 2\pi a_n$, soit encore

$$\forall n \geq 2, \quad a_n < \frac{1}{2\pi}. \tag{M.61}$$

Notons que l'on a aussi (voir figure M.11)

$$OA < OH + HA,$$

et donc

$$OA - OH < HA,$$

soit

$$\forall n \geq 2, \quad r_n - a_n < \frac{c_n}{2},$$

et donc, d'après (M.56)

$$\forall n \geq 2, \quad r_n - a_n < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{M.62}$$

M.3.5. Preuve géométrique de la convergence des deux suites a_n et r_n vers $1/(2\pi)$

Bref, d'après (M.59), (M.58), et (M.62), les deux suites a_n et r_n sont adjacentes et convergent vers une limite commune l. D'après (M.60) et (M.61), par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on a

$$l \geq \frac{1}{2\pi}, \quad l \leq \frac{1}{2\pi},$$

et donc $l = 1/(2\pi)$, soit encore

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2\pi} \tag{M.63a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{2\pi}. \tag{M.63b}$$

Là encore, nous avons fournit une preuve qu'auraient pu écrire Archimède ou Cues, en n'utilisant que les calculs précédents, fondés sur la géométrie élémentaire.

M.3.6. Preuve analytique de la convergence des deux suites a_n et r_n vers $1/(2\pi)$ et qualité de la convergence

Montrons maintenant le dernier résultat !

Formellement, chaque polygone, de perimètre constant égal à 1, tend vers un cercle, de périmètre $1 = 2\pi l$ où l est la limite commune des suites a_n et r_n. On a donc $l = 1/(2\pi)$ ce qu'on montre maintenant analytiquement.

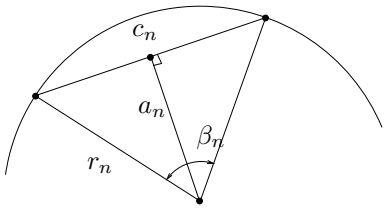


FIGURE M.14. Les relations entre c_n, a_n et r_n et β_n, l'angle au sommet.

Nous avons des relations entre c_n, a_n et r_n (voir figure M.14). D'après (M.54), on a

$$\forall n \geq 2, \quad \beta_n = \frac{\pi}{2^{n-1}}. \tag{M.64}$$

et, grâce aux relations trigonométriques habituelles :

$$\sin\frac{\beta_n}{2} = \frac{c_n}{2r_n},$$

$$\tan\frac{\beta_n}{2} = \frac{c_n}{2a_n},$$

et donc

$$c_n = 2r_n \sin\frac{\pi}{2^n},$$
$$c_n = 2a_n \tan\frac{\pi}{2^n}$$

et enfin, d'après (M.56)

$$\frac{1}{2^n} = 2r_n \sin\frac{\pi}{2^n},$$
$$\frac{1}{2^n} = 2a_n \tan\frac{\pi}{2^n}.$$

Cela donne d'une part, pour $n = 2$:

$$\frac{1}{4} = 2r_2\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\frac{1}{4} = 2a_2,$$

soit

$$a_2 = \frac{1}{8}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}. \tag{M.65}$$

et d'autre part,

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{\pi}{2^n}}, \tag{M.66a}$$
$$r_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}, \tag{M.66b}$$

ce qui implique (M.63). On a aussi, comme pour la méthode d'Archimède :

$$\frac{1}{2a_n} = \pi + O\left(\frac{1}{4^n}\right), \tag{M.67a}$$
$$\frac{1}{2r_n} = \pi + O\left(\frac{1}{4^n}\right). \tag{M.67b}$$

D'après (M.59) et (M.60), on a aussi

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2r_n} < \pi < \frac{1}{2a_n}. \tag{M.68}$$

M.4. Et la méthode originale des isopérimètres de Descartes !

Concluons par une remarque sur la méthode originale des isopérimètres de Descartes présentée dans voir `http://www.pi314.net/fr/descartes.php`. N'en déplaisent à leur auteur ou à M. Descartes, cette méthode n'est rien d'autre que la méthode de Cues, présentée autrement, comme c'est dit dans `https://publimath.univ-irem.fr/glossaire/ME103.htm`. En effet, tentons d'éliminer la variable r_n dans les relations de récurrence (M.57) afin de ne conserver que la suite des apothèmes a_n. Le raisonnement est même un peu plus simple que celui présenté ci-dessus, puisqu'il n'est même pas nécessaire d'utiliser l'équation (M.51).

On renvoie de nouveau à la figure M.11. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OAH fournit

$$OA^2 = OH^2 + HA^2,$$

soit encore avec les notations précédemment utilisées : pour tout $n \geq 2$,

$$r_n^2 = a_n^2 + \frac{c_n^2}{4},$$

et donc, d'après (M.56), on a

$$r_n^2 = a_n^2 + \frac{1}{4.2^{2n}},$$

et donc

$$\forall n \geq 2, \quad r_n^2 = a_n^2 + \frac{1}{2^{2(n+1)}}. \tag{M.69}$$

Si on utilise (M.50) ou (M.57a), on a par ailleurs

$$2a_{n+1} - a_n = r_n$$

et donc

$$4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 = r_n^2,$$

et en éliminant r_n d'après (M.69), on a

$$4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 = a_n^2 + \frac{1}{2^{2(n+1)}}.$$

soit encore

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n - \frac{1}{2^{2(n+2)}} = 0, \tag{M.70}$$

ce qui est bien l'équation du second degré en a_{n+1} présentées dans `http://www.pi314.net/fr/descartes.php`. En effet, dans cette dernière référence, on a l'équation (où a_n représente en fait r_n !) soit encore

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n - \frac{a_0^2}{4^{n+1}} = 0 \tag{M.71}$$

où $a_0 = 1/8$ et (M.71) est donc équivalente à

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n - \frac{1}{2^{2(n+4)}} = 0.$$

et en posant en remplaçant $n+4$ par $n+2$ (car nous partons de 2 et non de 0) :

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n - \frac{1}{2^{2(n+2)}} = 0,$$

ce qui est bien équivalent à (M.70). La résolution de (M.70) donne un discriminant égal à

$$\Delta = a_n^2 + \frac{4}{2^{2(n+2)}} = a_n^2 + \frac{1}{2^{2(n+1)}} > 0$$

et les racines de (M.70) sont donc données par

$$X = \frac{1}{2}\left(a_n \pm \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2^{2(n+1)}}}\right),$$

et on ne conserve que la racine positive :

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2^{2(n+1)}}}\right), \tag{M.72}$$

ce qui est bien la même expression que dans les références données ci-dessus. Puisque a_n tend vers $1/(2\pi)$ on retrouve aussi la convergence annoncée.

M.5. Approximation quadratique par une méthode arithmético-géométrique

Dans `http://www.pi314.net/fr/salamin.php` est proposée la suite suivante, qui n'a, cette fois-ci, plus de construction à la règle et au compas :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
b_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2},\\
u_0 &= 0,\\
v_0 &= 1,\\
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right),\\
b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n},\\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + v_n\right),\\
v_{n+1} &= \frac{1}{2b_{n+1}}\left(u_n b_n + v_n a_n\right),\\
w_n &= 2\sqrt{2}\frac{a_n^3}{u_n},
\end{aligned}$$

Les deux suites a_n et b_n sont adjacentes (suite arithmético-géométrique) et on peut montrer assez simplement (voir le lemme M.8) que la convergence vers la limite commune est quadratique. De plus, on

$$w_n \to \pi,$$

et là encore de façon quadratique.

Lemme M.8 (Suite arithmético-géométrique). *On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0, $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et*

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Alors les deux suites convergent vers la même limite. De plus, la convergence de chacune des deux suites est quadratique.

Démonstration. On pourra consulter par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Moyenne_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique`

On raisonne par étape.

(1) (a) Montrons tout d'abord, que, si a et b sont positifs,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{M.73}$$

ce qui s'obtient en élevant au carré :

$$4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab,$$

équivalent à

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab,$$

soit à

$$0 \leq (a-b)^2.$$

(b) On peut vérifier aisément par récurrence sur n que

$$\forall n, \quad u_n > 0, \quad v_n > 0, \tag{M.74}$$

et, en même temps, que v_n est définie.

(c) Ainsi, (M.73) appliquée à $a = u_n$ et $b = v_n$ donne

$$\forall n, \quad u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

soit

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq v_n. \tag{M.75}$$

(d) De (M.75), on déduit donc

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n u_n} = |u_n| = u_n,$$

et

$$\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n,$$

On a donc

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n. \tag{M.76}$$

(e) La suite u_n est donc croissante et majorée par v_0 et la suite v_n est donc décroissante et minorée par $u_0 > 0$. Ainsi (u_n) converge vers l et (v_n) vers $l' > 0$. Si on passe à la limite quand n tend vers l'infini dans la définition des deux suite, on obtient par continuité : $l = \sqrt{ll'}$ et $l' = (l + l')/2$, ces deux égalités impliquant que $l = l'$. De (M.76), on déduit donc que les deux suites convergent vers $l > 0$ (difficile à calculer en fonction de u_0 et v_0) tel que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n. \tag{M.77}$$

En fait, les deux suites u_n et v_n sont donc adjacentes.

(2) (a) Par définition,

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n\right) = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n\right),$$

et donc

$$\forall n, \quad v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)^2. \tag{M.78}$$

(b) On a donc

$$\forall n, \quad (v_{n+1} - u_{n+1})(v_{n+1} + u_{n+1}) = \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)^2$$

et, grâce à (M.74) :

$$\forall n, \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4(v_{n+1} + u_{n+1})}\left(v_n - u_n\right)^2. \tag{M.79}$$

Grâce à (M.77), on a

$$v_{n+1} + u_{n+1} \geq u_0 + l,$$

et (M.79) implique

$$\forall n, \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4(u_0 + l)}\left(v_n - u_n\right)^2. \tag{M.80}$$

(c) On a, selon (M.77),

$$e_n = |u_n - l| + |v_n - l| = l - u_n + v_n - l = v_n - u_n,$$

et donc (M.80) est équivalent à

$$\forall n, \quad e_{n+1} \leq \frac{1}{4(u_0 + l)} e_n^2. \tag{M.81}$$

Notons aussi que

$$|u_n - l| \leq e_n,$$
$$|v_n - l| \leq e_n,$$

et donc que les résultats relatifs à e_n sont aussi valables pour les deux erreurs $u_n - l|$ et $|v_n - l|$. La convergence est donc d'ordre 2 et on renvoie à [DB21, chapitre "Équations non-linéaires"].

□

M.6. Approximations d'ordres plus élevés

Voir `http://www.pi314.net/fr/borwein.php`

M.7. Simulations numériques

Voir les fonctions matlab aux liens suivants :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBif/fichiers_matlab/approximation_pi_archimede.m`,
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBif/fichiers_matlab/approximation_pi_cues.m`
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBif/fichiers_matlab/approximation_pi_quadratique.m`.

M.7.1. Méthode d'Archimède

n	I_n	C_n
0	3.00000000000000000	3.46410161513775440
1	3.10582854123025020	3.21539030917347100
2	3.13262861328123690	3.15965994209749380
3	3.13935020304687210	3.14608621513140200
4	3.14103195089053070	3.14271459964531270
5	3.14145247228534430	3.14187304998012660
6	3.14155760791162210	3.14166274705480710
7	3.14158389214893590	3.14161017659978190
8	3.14159046323676170	3.14159703432307640
9	3.14159210604304920	3.14159374881711620
10	3.14159251658815460	3.14159292787337300
11	3.14159261864078940	3.14159272562285170
12	3.14159264532121570	3.14159267174128450
13	3.14159264532121570	3.14159261890114650
14	3.14159264532121570	3.14159267174128450
15	3.14159264532121570	3.14159193588223350
16	3.14159366984942690	3.14159267174128450
17	3.14159230381173770	3.14158100757962440
18	3.14160869622480380	3.14159267174128450
19	3.14158683965504170	3.14140615473788240
20	3.14167426502175800	3.14054349240083930
21	3.14167426502175800	3.14000686469122850
22	3.14307274017003960	3.13494537565859140
23	3.15980616494113460	3.14000686469122850
24	3.18198051533946420	3.22451524353455100

TABLE M.1. Valeurs de n, de I_n et de C_n.

n	$\log(\lvert I_n - \pi\rvert)$	$\log(\lvert C_n - \pi\rvert)$
0	−0.84896	−0.49146
1	−1.44655	−1.13196
2	−2.04750	−1.74311
3	−2.64928	−2.34741
4	−3.25127	−2.95003
5	−3.85331	−3.55223
6	−4.45537	−4.15432
7	−5.05742	−4.75639
8	−5.65949	−5.35845
9	−6.26158	−5.96050
10	−6.86327	−6.56180
11	−7.45657	−7.14247
12	−8.08257	−7.74109
13	−8.08257	−7.45981
14	−8.08257	−7.74109
15	−8.08257	−6.14405
16	−5.99300	−7.74109
17	−6.45621	−4.93382
18	−4.79472	−7.74109
19	−5.23553	−3.72932
20	−4.08825	−2.97916
21	−4.08825	−2.79975
22	−2.82971	−2.17736
23	−1.73961	−2.79975
24	−1.39375	−1.08133

TABLE M.2. Valeurs de n, de $\log(\lvert I_n - \pi\rvert)$ et de $\log(\lvert C_n - \pi\rvert)$.

On utilisant les formules (M.18) et (M.19), on a déterminé numériquement les valeurs de I_n et de C_n, ainsi que les logarithmes (décimaux) des erreurs ; voir les tableaux M.1 et M.2. On constate sur ces tableaux qu'à partir d'un certain rang ($n = 12$), l'erreur remonte, et ce à cause des arrondis de calcul. On constate aussi que (M.36a) est vraie mais uniquement jusqu'à cette valeur de n.

Si on utilise cette fois-ci les formules (M.20) et (M.21), les calculs ont faits et présentés dans les tableaux M.3 et M.4. L'erreur augmente pour une valeur de n un peu plus élevés. Grâce aux logarithmes, on a fait une interpolation pour retrouver les formules (M.46) ; par interpolation, on obtient les deux valeurs de A tel que $\log(\lvert I_n - \pi\rvert) \approx B/n^A$ et $\log(\lvert C_n - \pi\rvert) \approx B'/n^{A'}$. Numériquement, on obtient en effet

$$A = 0.249641,$$
$$A' = 0.247349.$$

Voir aussi la figure M.15.

n	I_n	C_n
0	3.00000000000000000	3.46410161513775440
1	3.10582854123024890	3.21539030917347150
2	3.13262861328123470	3.15965994209750670
3	3.13935020304685210	3.14608621513144280
4	3.14103195089047560	3.14271459964548860
5	3.14145247228556150	3.14187304997995120
6	3.14155760791205640	3.14166274705671980
7	3.14158389214893630	3.14161017661176520
8	3.14159046322286570	3.14159703431109350
9	3.14159210604304830	3.14159374871793110
10	3.14159251681049150	3.14159292752788440
11	3.14159262041948390	3.14159272241094990
12	3.14159264532121530	3.14159266783840650
13	3.14159264532121530	3.14159262280402450
14	3.14159264532121530	3.14159266783840650
15	3.14159275915769950	3.14159285047699610
16	3.14159230381173730	3.14159175714657390
17	3.14159412519519070	3.14159649324559310
18	3.14158683965504080	3.14157718609415330
19	3.14155769732548420	3.14153820867771390
20	3.14167426502175710	3.14181032725824180
21	3.14120796828226560	3.14060572479268090
22	3.14493640635228110	3.14927305962702600
23	3.15238005322962240	3.15549011211397310
24	3.12249899919919870	3.08985281321896910

TABLE M.3. Valeurs de n, de I_n et de C_n (utilisation des formules (M.20) et (M.21)).

M.7.2. Méthode de Cues

On utilise les formules (M.57) et (M.65), on a déterminé numériquement les valeurs de $1/(2r_n)$ et de $1/(2a_n)$, ainsi que les logarithmes (décimaux) des erreurs ; voir les tableaux M.5 et M.6. Cette fois-ci, contrairement à la méthode d'Archimède, le comportement numérique est meilleur : l'erreur se stabilise au lieu de remonter à partir d'un certain rang, ce qui confirme ce que l'on a observé dans la construction à la règle et au compas, vue plus haut. De plus, la formule (M.68) reste numériquement vraie. Grâce aux logarithmes, on a fait une interpolation pour retrouver les formules (M.67) ; par interpolation, on obtient les deux valeurs de A tel que $\log(\pi - 1/(2r_n)) \approx B/n^A$ et $\log(1/(2a_n) - \pi) \approx B'/n^{A'}$. Numériquement, on obtient en effet

$$A = 0.248464,$$
$$A' = 0.252042.$$

On constate à la fin du tableau M.6 des valeurs complexes du logarithme, due à son argument négatif, à cause des erreurs de calcul, ce qui est normal sous matlab qui calcule le logarithme complexe (Voir [Bas22b, Chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"]).

n	$\log(\lvert I_n - \pi\rvert)$	$\log(\lvert C_n - \pi\rvert)$
0	−0.84896	−0.49146
1	−1.44655	−1.13196
2	−2.04750	−1.74311
3	−2.64928	−2.34741
4	−3.25127	−2.95003
5	−3.85331	−3.55223
6	−4.45537	−4.15432
7	−5.05742	−4.75639
8	−5.65948	−5.35845
9	−6.26158	−5.96054
10	−6.86398	−6.56235
11	−7.47925	−7.16228
12	−8.08257	−7.84623
13	−8.08257	−7.51165
14	−8.08257	−7.84623
15	−6.97647	−6.70578
16	−6.45621	−6.04748
17	−5.83221	−5.41571
18	−5.23553	−4.81058
19	−4.45647	−4.26404
20	−4.08825	−3.66219
21	−3.41489	−3.00571
22	−2.47577	−2.11462
23	−1.96708	−1.85706
24	−1.71911	−1.28617

TABLE M.4. Valeurs de n, de $\log(\lvert I_n - \pi\rvert)$ et de $\log(\lvert C_n - \pi\rvert)$ (utilisation des formules (M.20) et (M.21)).

M.7.3. Approximation quadratique

Voir les tableaux M.7 et M.8 qui montrent la convergence très rapide de w_n vers π. On peut aussi mettre en évidence l'aspect quadratique de la convergence en passant par le logarithme et en utilisant la technique de [Bas21a, un des exercices du TD "Équations non-linéaires"] et son corrigé [Bas21b]. On obtient la valeur numérique suivante de l'ordre : 2.0691, ce qui confirme l'aspect quadratique de la méthode.

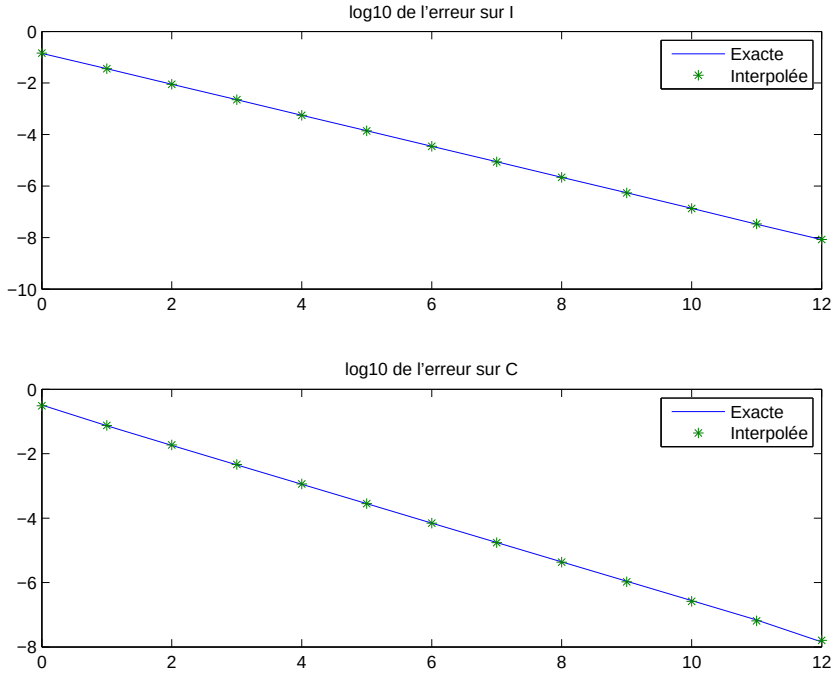


FIGURE M.15. Estimation de l'erreur pour le calcul de I_n et de C_n.

n	$1/(2r_n)$	$1/(2a_n)$
0	2.82842712474618980	4.00000000000000000
1	3.06146745892071830	3.31370849898476070
2	3.12144515225805200	3.18259787807452810
3	3.13654849054593890	3.15172490742925640
4	3.14033115695475250	3.14411838524590430
5	3.14127725093277290	3.14222362994245640
6	3.14151380114430090	3.14175036916896570
7	3.14157294036709130	3.14163208070318190
8	3.14158772527716000	3.14160251025680900
9	3.14159142151120020	3.14159511774958930
10	3.14159234557011800	3.14159326962930720
11	3.14159257658487290	3.14159280759964420
12	3.14159263433856270	3.14159269209225480
13	3.14159264877698610	3.14159266321540850
14	3.14159265238659160	3.14159265599619710
15	3.14159265328899330	3.14159265419139460
16	3.14159265351459330	3.14159265374019370
17	3.14159265357099260	3.14159265362739280
18	3.14159265358509290	3.14159265359919270
19	3.14159265358861810	3.14159265359214280
20	3.14159265358949870	3.14159265359038020
21	3.14159265358971900	3.14159265358993920
22	3.14159265358977450	3.14159265358982910
23	3.14159265358978820	3.14159265358980200
24	3.14159265358979130	3.14159265358979490
25	3.14159265358979270	3.14159265358979310
26	3.14159265358979270	3.14159265358979270
27	3.14159265358979270	3.14159265358979270
28	3.14159265358979270	3.14159265358979270
29	3.14159265358979270	3.14159265358979270

TABLE M.5. Valeurs de n, de $1/(2r_n)$ et de $1/(2a_n)$.

n	$\log(\pi - 1/(2r_n))$	$\log(1/(2a_n) - \pi)$
0	-0.50423	-0.06631
1	-1.09623	-0.76418
2	-1.69578	-1.38716
3	-2.29721	-1.99429
4	-2.89911	-2.59761
5	-3.50113	-3.19999
6	-4.10318	-3.80213
7	-4.70524	-4.40421
8	-5.30730	-5.00627
9	-5.90936	-5.60833
10	-6.51142	-6.21039
11	-7.11348	-6.81245
12	-7.71554	-7.41451
13	-8.31760	-8.01657
14	-8.91966	-8.61863
15	-9.52172	-9.22069
16	-10.12378	-9.82275
17	-10.72583	-10.42482
18	-11.32788	-11.02689
19	-11.92994	-11.62899
20	-12.53102	-12.23130
21	-13.12981	-12.83533
22	-13.72928	-13.44404
23	-14.31114	-14.05150
24	-14.75047	-14.75047
25	-15.35253	$-Inf$
26	-15.35253	$-15.35253 + 1.36438i$
27	-15.35253	$-15.35253 + 1.36438i$
28	-15.35253	$-15.35253 + 1.36438i$
29	-15.35253	$-15.35253 + 1.36438i$

TABLE M.6. Valeurs de n, de $\log(\pi - 1/(2r_n))$ et de $\log(1/(2a_n) - \pi)$.

n	w_n
1	3.51776695296636890
2	3.14278210836401910
3	3.14159266157735220
4	3.14159265358979490
5	3.14159265358979490
6	3.14159265358979490
7	3.14159265358979490
8	3.14159265358979490
9	3.14159265358979490

TABLE M.7. Valeurs de n et de w_n

n	$\log(\lvert w_n - \pi \rvert)$
1	-0.42461
2	-2.92465
3	-8.09759
4	-14.75047
5	-14.75047
6	-14.75047
7	-14.75047
8	-14.75047
9	-14.75047

TABLE M.8. Valeurs de n, de $\log(\lvert w_n - \pi \rvert)$.

Annexe N

Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle (sous la forme de deux exercices corrigés)

Premier énoncé

(1) Pour a réel et n entier naturel non nul, (re)définir a^n par récurrence sur n.

(2) Avec cette définition, montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{n+m} = a^n a^m$.

(3) Quel sens donner alors à a^0, pour a réel non nul ?

(4) De la même façon, donner successivement un sens à a^n, pour $n \in \mathbb{Z}$, $a^{1/p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et enfin pour a^r pour $r \in \mathbb{Q}$.

(5) Seriez-vous capable de donner un sens à a^x, pour x réel, complexe ?

Premier corrigé

(1) Une définition de a^n peut être la suivante : pour tout $n \geq 1$,

$$a^n \text{ est le produit de } n \text{ facteurs égaux à } a. \tag{N.1}$$

De telle sorte que

$$a^1 = a. \tag{N.2}$$

Plus rigoureusement, on peut aussi le définir par récurrence (ou récursivité) sur n :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} = \begin{cases} aa^n, & \text{si } n \geq 1, \\ a, & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{N.3}$$

Dans les deux cas, a^0 n'est pas défini !

(2) Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{N.4}$$

L'initialisation correspond à $m = 1$ et il faut donc montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+1} = a^n a^1,$$

ce qui correspond, d'après (N.2) à montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+1} = a^n a,$$

ce qui est exactement la définition (N.3).

Supposons maintenant que (N.4) est vrai pour un entier m non nul fixé et montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^n a^{m+1}. \tag{N.5}$$

Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^{(n+m)+1} = aa^{n+m}.$$

Ainsi, d'après (N.4), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = aa^n a^m = a^n aa^m,$$

et donc, en utilisant de nouveau la définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^n a^{m+1}.$$

REMARQUE N.1. À un niveau élémentaire, cela peut aussi se démontrer en disant, d'après la définition (N.1) que a^{n+m} est le produit de $n+m$ facteurs égaux à a, que a^n est le produit de n facteurs égaux à a, que a^m est le produit de m facteurs égaux à a et donc a^{n+m} est aussi le produit de $n+m$ facteurs égaux à a.

(3) D'après la définition (N.1) ou (N.3) n'a aucun sens si $n = 0$. Cependant, violons le domaine de validité de (N.4) et écrivons-là abusivement avec $n = 0$, ce qui donne formellement

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^{0+m} = a^0 a^m.$$

soit

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^m = a^0 a^m. \tag{N.6}$$

Si a est non nul, a^m est non nul et dans (N.6), on peut donc diviser par a^m et obtenir

$$1 = a^0. \tag{N.7}$$

Cette égalité non montre que a^0, *a priori* non défini, peut être posé formellement égal à 1. Ainsi, on pose

$$\forall a \neq 0, \quad a^0 = 1. \tag{N.8}$$

Dans ce cas, on peut écrire (N.4), sous la forme :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{N.9}$$

et (N.3) sous la forme

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} = \begin{cases} aa^n, & \text{si } n \geq 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{N.10}$$

REMARQUE N.2. En reprenant la remarque N.1, on peut montrer cela à un niveau élémentaire, sans récurrence.

REMARQUE N.3. On peut aussi donner une preuve alternative de $a^0 = 1$, moins élémentaires, valable uniquement dans le cas où $a = 2$.

Rappelons que, si I est un ensemble de cardinal $n \geq 1$, le nombre de parties de I est de cardinal 2^n. Si I est vide, on tient pour vrai encore cela. Or, l'ensemble des parties de $\emptyset$ est égal à $\{\emptyset\}$, de cardinal 1 qui vaut donc 2^0.

REMARQUE N.4. De la même façon, on peut donner un sens à 0!. On rappelle que $n!$ est défini, pour tout entier $n \geq 1$ par

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq 1$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n \times (n+1),$$

et donc

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

On écrit alors la définition récurrente de $n!$:

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ (n+1)n! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On l'utilise alors abusivement la deuxième équation pour $n = 0$, ce qui donne

$$1 = 1! = 0!$$

Dans ce cas, on peut réécrire la définition de $n!$ sous la forme

$$\forall n \geq 0, \quad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n(n-1)! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

De la même façon, on peut poser par convention

$$1 = \prod_{i=1}^{0} i.$$

(4) (a) Si on reprend maintenant (N.9), en écrivant formellement, et comme précédemment, en violant le domaine de validité de cette formule, qu'on peut l'appliquer à $n \in \mathbb{N}$ et $m = -n \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^0 = a^n a^{-n}.$$

ce qui donne, compte tenu de (N.8)

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \tag{N.11}$$

ce que l'on prendra comme définition. Ainsi, (N.9) est vrai pour tout entier n et m relatifs :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{N.12}$$

En effet, prenons n ou m négatif (le cas n et m positifs étant déjà réglé !), en donc, sans perte de généralité, par symétrie, il suffit de traiter les cas ($n \leq -1$ et $m \leq -1$) et ($n \leq -1$ et $m \geq 1$). Dans le premier cas, on écrit

$$a^{n+m} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} = \frac{1}{a^{(-n)}a^{(-m)}} = \frac{1}{a^{(-n)}}\frac{1}{a^{(-m)}} = a^n a^m.$$

Le second cas est presque identique.

(b) De la même façon, on peut montrer, comme dans le point 2 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad (a^n)^m = a^{nm}. \tag{N.13}$$

Si comme précédemment, on applique cela formellement à $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = 1/m$, on obtiendrait

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(a^{1/m}\right)^m = a. \tag{N.14}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'application $x \mapsto x^m$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, d'inverse $\sqrt[m]{x}$ et donc (N.14), nous fournit la définition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^{1/m} = \sqrt[m]{a}. \tag{N.15}$$

(c) On peut, d'après ce qui précède, tenir vrai (N.15) pour $m \in \mathbb{Z}$, en posant, si $-m \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad m \leq -1 \Longrightarrow a^{-1/m} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}. \tag{N.16}$$

(d) Enfin, si p et q sont deux entiers naturels non nuls, on peut définit, d'après tout ce qui précède,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{N.17}$$

Si $p \in \mathbb{Z}$, on pourra définir

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad p \leq -1 \Longrightarrow a^{p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}. \tag{N.18}$$

On a donc défini a^r pour tout r rationnel. On laisse au lecteur vérifier que la définition de a^r ne dépend pas de la fraction choisie, c'est-à-dire que $a^{p/q} = a^{(mp)/(mq)}$ et que (N.12) et (N.13) sont vrais pour tout couple de rationnels. Démontrons par exemple que

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall r, r' \in \mathbb{Q}, \quad a^{r+r'} = a^r a^{r'}. \tag{N.19}$$

Pour cela, on écrit, d'après ce qui précède (avec p, q, p' et q' entiers)

$$\begin{aligned}
a^{r+r'} &= a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}, \\
&= a^{\frac{pq'+qp'}{qq'}}, \\
&= \sqrt[qq']{a^{pq'+qp'}}, \\
&= \sqrt[qq']{a^{pq'}}\,\sqrt[qq']{a^{qp'}}, \\
&= \left(a^{pq'}\right)^{1/(qq')}\left(a^{qp'}\right)^{1/(qq')}, \\
&= a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{p'}{q'}}.
\end{aligned}$$

(5) (a) Si a est un réel non nul et x un réel, on peut écrire que $x \lim_{n\to+\infty} r_n$ où r_n est u rationnel. On sait que a^{r_n} est défini et on admet que la limite de a^{r_n} existe, indépendamment de la suite choisie et cela constituera la définition de a^x. On peut aussi montrer que (N.12) et (N.13) sont vrais pour tout couple de réels.

Démontrons par exemple (N.12). Soient x et y deur réels. Il existe deux suites x_n et y_n de rationnels qui convergent respectivemet vers x et y. D'après (N.19), on a donc

$$a^x a^y = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \lim_{n\to+\infty} a^{y_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} a^{y_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$$

(b) Si x est un complexe, on peut écrire $x = X + iY$ où X et Y sont deux réels et on posera donc, dans le cas où $a = e$:

$$e^x = e^{X+iY} = e^X e^{iY} = e^X \left(\cos Y + i \sin Y\right),$$

qui se généralise pour a réel quelconque. Plus de détails par exemple dans [Bas22b, Chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"].

Second énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (1 + 1/n)^n$.

Le but de cet exercice est de donner une définition alternative de l'exponentielle, dont on ne servira donc pas !

(1) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2 \Longrightarrow (1-\alpha)^n > 1 - n\alpha)$.

(2) En prenant $\alpha = 1/n^2$, montrer que u_n est croissante.

(3) En prenant $\alpha = 1/(6n+1)$, montrer que u_n est majorée.

(4) Conclure.

Second corrigé

Voir [Mon90, exercice 3.5.7]

(1) De méthodes sont possibles :

(a) Pour $\alpha \in]0,1[$ fixé, utiliser une récurrence sur n. Pour $n=0$, on a bien

$$(1-\alpha)^0 = 1 \geq 1 - \alpha \times 0.$$

Si l'inéquation est vraie pour n, on écrit alors à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^{n+1} &= (1-\alpha)(1-\alpha)^n,\\ &\geq (1-\alpha)(1-n\alpha),\\ &= 1 - n\alpha - \alpha + \alpha^2,\\ &\geq 1 - n\alpha - \alpha,\\ &= 1 - (n+1)\alpha.\end{aligned}$$

(b) On peut aussi étudier la fonction $t \mapsto (1-\alpha)^t - 1 + t\alpha$ sur $[1, +\infty[$, ce qui gênant en fait car cela contient l'exponentielle !

(2) On déduit d'abord de l'inégalité de l'énoncé :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

ce qui implique

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

et donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n+1}. \tag{N.20}$$

Remarquons aussi que pour tout $X > 0$,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{X}} = 1 + \frac{1}{X-1}. \tag{N.21}$$

Si on applique cela pour $X = n$, on a donc, d'après (N.20) :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

et donc $u_n > u_{n-1}$.

(3) On déduit d'abord de l'inégalité de l'énoncé :

$$\left(1 - \frac{1}{6n+1}\right)^n > 1 - \frac{n}{6n+1} = \frac{5n+1}{6n+1} > \frac{5}{6},$$

puisque cette dernière inégalité est équivalente à $30n+6 > 30n+5$, ce qui est vrai. Ainsi, on a d'après (N.21) appliquée à $X = 6n+1$:

$$\left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6},$$

et donc

$$\left(1 + \frac{1}{6n}\right)^n < \frac{6}{5},$$

et donc

$$\left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{6n} < \left(\frac{6}{5}\right)^6.$$

On a donc u_{6n} est majorée et puisque u_n est croissante, elle est majorée.

(4) La suite converge donc. On peut ensuite, en utilisant l'exponentielle, montrer que la limite est e.

Annexe O

Emprunts bancaires

O.1. Emprunt hors assurance

O.1.1. Théorie

On emprunte une somme que l'on rembourse mois par mois à mensualité et à taux constants.

On appelle S la somme empruntée et τ le taux d'emprunt (hors assurance) annuel, supposé constant et m la mensualité, supposée constante.

Au bout du n-ième mois ($n \in \mathbb{N}$), on appelle k_n le capital dû. Initialement, pour $n = 0$, on doit le capital k_0.

À partir du premier mois, on rembourse, chaque mois, la mensualité, qui se décompose en un intérêt et un amortissement, qui représente le remboursement du capital (hors intérêt). On note donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i_n l'intérêt relatif au capital k_n et a_n, l'amortissement remboursé au n-ième mois. L'emprunt cessera lorsque le capital k_n devient négatif ou nul.

Traduisons tout cela. Initialement, on a emprunté la somme S :

$$k_0 = S. \tag{O.1}$$

On suppose que

$$\text{le capital décroit, mois par mois,} \tag{O.2a}$$
$$\text{ll finit par dévenir négatif} \tag{O.2b}$$

Nous vérifierons l'hypothèse (O.2) *a posteriori*. Ainsi, on peut définir n_0 par

$$\text{on note } n_0 \text{ le plus grand entier tel que } k_{n_0} > 0. \tag{O.3}$$

On a donc

$$\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad k_n > 0, \tag{O.4}$$
$$\forall n \in \{0, ..., n_0 - 1\}, \quad k_n > k_{n+1}, \tag{O.5}$$
$$k_{n_0+1} \leq 0. \tag{O.6}$$

Puisque la mensualité se décompose en un intérêt et un amortissement, on a

$$\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad m = i_n + a_n. \tag{O.7}$$

Par définition de l'amortissement, on a

$$\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad k_{n+1} = k_n - a_n. \tag{O.8}$$

Par définition du taux annuel τ, on a

$$\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad i_n = \frac{\tau k_n}{12}. \tag{O.9}$$

D'après (O.7), (O.8) et (O.9), on a successivement

$$\begin{aligned}\forall n \in \{0,...,n_0\}, \quad k_{n+1} &= k_n - a_n,\\ &= k_n - m + i_n,\\ &= k_n - m + \frac{\tau k_n}{12}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\forall n \in \{0,...,n_0\}, \quad k_{n+1} = k_n\left(1+\frac{\tau}{12}\right) - m. \tag{O.10}$$

Si on pose

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{12}, \tag{O.11}$$

on constate que $(k_n)_{0\leq k\leq n_0+1}$ est une suite arithmético-géométrique. On renvoie au lemme 11.44 page 84 que l'on utilise avec $a = \rho \neq 1$, $b = -m$ et la condition initiale (O.1). On a

$$\begin{aligned}\frac{b}{1-a} &= \frac{m}{\frac{\tau}{12}} = \frac{12m}{\tau},\\ u_0 - \frac{b}{1-a} &= S - \frac{12m}{\tau}\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \{0,...,n_0+1\}, \quad k_n = \rho^n(k_0 - K) + K,$$

et donc

$$\forall n \in \{0,...,n_0+1\}, \quad k_n = \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau}. \tag{O.12}$$

Il est important de noter que l'on a

$$\frac{S\tau}{12} < m. \tag{O.13}$$

Cela signifie que la mensualité remboursée est supérieure à la somme $S\tau/12$ qui correspond à l'intérêt mensuel lié à la somme S empruntée. On rembourse bien au moins ce qu'il faut. En effet, d'après (O.9), on a $i_0 = \frac{\tau k_0}{12} = \frac{\tau S}{12}$ et donc $m > i_0$.

Montrons maintenant que la suite k_n est décroissante. On a d'après (O.12)

$$\begin{aligned}k_{n+1} - k_n &= \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{n+1}\left(S - \frac{12m}{\tau}\right) - \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(S - \frac{12m}{\tau}\right),\\ &= \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(S - \frac{12m}{\tau}\right)\left(1+\frac{\tau}{12} - 1\right),\\ &= \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\frac{\tau}{12}\left(S - \frac{12m}{\tau}\right),\\ &= \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(\frac{S\tau}{12} - m\right)\end{aligned}$$

qui est bien strictement négatif d'après (O.13). L'hypothèse (O.2a) est donc bien vérifiée. Vérifions maintenant (O.2b). On a d'une part, d'après (O.12)

$$\begin{aligned}k_0 &= \left(1+\frac{\tau}{12}\right)\left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau},\\ &= S + \frac{S\tau}{12} - m,\\ &= S\left(1+\frac{\tau}{12}\right) - m,\end{aligned}$$

et donc

$$k_0 > 0. \tag{O.14}$$

ssi

$$m < S\left(1+\frac{\tau}{12}\right). \tag{O.15}$$

Cette condition fixe la mensualité maximale initiale et sera toujours implicitement vérifiée. Sinon, il suffira de poser $n_0 = 0$: cela signifie qu'on rembourse tout dès le début ! D'autre part, compte tenu de (O.13), on a [1]

$$\lim_{n\to+\infty} k_n = -\infty. \tag{O.16}$$

Ainsi, (O.2b), (O.14) et (O.16) impliquent bien (O.2b).

Calculons donc maintenant n_0 en utilisant (O.4) et (O.6) : n_0 vérifie donc

$$k_{n_0} > 0 \text{ et } k_{n_0+1} \leq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{n_0}\left(S-\frac{12m}{\tau}\right)+\frac{12m}{\tau} > 0, \tag{O.17}$$

$$\left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}\left(S-\frac{12m}{\tau}\right)+\frac{12m}{\tau} \leq 0. \tag{O.18}$$

Ce système d'inéquations est équivalent à

$$n_0 < -\frac{\ln\left(1-\frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1+\frac{\tau}{12}\right)},$$

$$n_0+1 \geq -\frac{\ln\left(1-\frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1+\frac{\tau}{12}\right)}.$$

Ces deux inéquations sont équivalentes à

$$-n_0 \leq 1+\frac{\ln\left(1-\frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1+\frac{\tau}{12}\right)} < 1-n_0 \ ;$$

on a donc

$$n_0 = -\mathrm{E}\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1+\frac{\tau}{12}\right)}\right). \tag{O.19}$$

On vérifie que

$$n_0 \geq 0. \tag{O.20}$$

Au bout de n_0+1 mois, le capital k_{n_0+1} est négatif ou nul. On ne s'intéressera donc qu'aux suites $(a_n)_{0\leq n\leq n_0}$, $(i_n)_{0\leq n\leq n_0}$ et $(k_n)_{0\leq n\leq n_0+1}$, avec $k_{n_0+1} < 0$.

D'après (O.9) et (O.12), on a

$$\forall i \in \{0,...,n_0\}, \quad i_n = \frac{\tau k_n}{12} = \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(\frac{S\tau}{12}-m\right)+m. \tag{O.21}$$

D'après (O.7), on a donc

$$\forall i \in \{0,...,n_0\}, \quad a_n = \left(1+\frac{\tau}{12}\right)^n\left(m-\frac{S\tau}{12}\right). \tag{O.22}$$

Le coût de l'emprunt est égal à la somme des intérêts. On peut calculer cette somme en utilisant l'équation (11.33) et la relation (O.21). Mais plus simplement, le coût de l'emprunt est égal à ce qu'on a donné à la banque otée de ce qu'elle nous a donné ; on a payé pendant les mois 0 à n_0 une mensualité m et donc

$$C = m(n_0+1) - S. \tag{O.23}$$

Récapitulons tous ces résultats : on se donne

- Une somme à emprunter $S > 0$;

1. D'un point de vue mathématique, la suite k_n est définie pour $n \in \mathbb{N}$, mais en pratique, on s'arrêtera pour l'entier n_0 défini par (O.3).

- un taux annuel τ ;
- une mensualité m.

On suppose que

$$\boxed{\frac{S\tau}{12} < m,}$$

ce qui traduit que l'intérêt de la somme S sur un mois est inférieur à la mensualité.

Sous cette hypothèse,

$$\boxed{\text{le crédit cesse au } n_0\text{-ième mois.}} \tag{O.24}$$

avec

$$\boxed{n_0 = -\mathrm{E}\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)}\right) \in \mathbb{N}.}$$

On a alors

$$\boxed{\forall n \in \{0, ..., n_0 + 1\}, \quad k_n = \begin{cases} S & \text{si } n = 0, \\ \left(1 + \dfrac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \dfrac{12m}{\tau}\right) + \dfrac{12m}{\tau} & \text{si } 1 \leq n \leq n_0, \\ 0 & \text{si } n = n_0 + 1. \end{cases}}$$

On a aussi l'amortissement

$$\boxed{\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad a_n = \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(m - \frac{S\tau}{12}\right).}$$

et l'intérêt

$$\boxed{\forall n \in \{0, ..., n_0\}, \quad i_n = \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(\frac{S\tau}{12} - m\right) + m}$$

On a enfin le coût total du crédit :

$$\boxed{C = m(n_0 + 1) - S.}$$

O.1.2. En pratique

En pratique, pour simplifier le calcul, les banques calcule une mensualité de telle sorte que le dernier capital restant dû, k_{n_0+1}, soit exactement nul.

Les variables d'entrée sont

- Une somme à emprunter $S > 0$;
- un taux annuel τ ;
- le nombre d'année ou le nombre de mois n_0.

On calcule alors la mensualité m en écrivant, grâce à (O.18) que le capital restant dû k_{n_0+1} est exactement nul, ce qui fournit

$$\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau} = 0.$$

et donc

$$m\frac{12}{\tau}\left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}\right) = -S\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}$$

soit encore

$$m = \frac{S\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}}{\frac{12}{\tau}\left(\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1} - 1\right)}$$

soit encore

$$m = \frac{S\tau/12}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}}}$$

Les tableaux d'amortissement des banques sont donnés sous la forme suivante :

mois	intérêt	amortissement	capital restant dû	mensualité
0 (avant le début)	0	0	$k_0 = S$	
1 (premier mois du crédit)	i_0	a_0	$k_0 = S$	m
2	i_1	a_1	k_1	m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j+1$	i_j	a_j	k_j	m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n_0	i_{n_0-1}	a_{n_0-1}	$k_{n_0} > 0$	m
n_0+1 (dernier mois du crédit)	i_{n_0}	a_{n_0}	$k_{n_0+1} = 0$	m

On peut donc remplacer en fait la définition (O.24) par

$$\boxed{\text{le crédit cesse au } n_0+1\text{-ième mois.}} \tag{O.25}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\text{la durée en mois du crédit est } n_0+1.} \tag{O.26}$$

Remarque O.1. Parfois, les calculs des banques sont légèrement différents, dans la mesure où ils tiennent compte, pour ne pas perdre un centime, du fait que les mois n'ont pas le même nombre de jours.

Voir la fonction matlab `emprunt_brut` dont les principaux paramètres d'entrée sont
— `S` : capital emprunté
— `tau` : tau nominal annuel annoncé sans assurance, en
— `n0an` : nombre d'années
Par exemple, si on tape

```
[m,C,capitalan,capitalmois,amortissement,interet]=emprunt_brut(100,4,1)
```

on obtient

```
m =
    8.5150
C =
    2.1799
capitalan =
   100     0
capitalmois =
  100.0000 91.8183 83.6094 75.3731 67.1094 58.8181 50.4992
   42.1525 33.7780 25.3756 16.9452  8.4867 0
amortissement =
         0 8.1817  8.2089  8.2363  8.2637  8.2913  8.3189
           8.3467  8.3745  8.4024  8.4304   8.4585  8.4867
interet =
         0 0.3333  0.3061  0.2787  0.2512  0.2237  0.1961
           0.1683  0.1405  0.1126  0.0846   0.0565  0.0283
```

et si l'on tape

```
[m,C,capitalan,capitalmois,amortissement,interet]=emprunt_brut(100,4,1,'exemple','exemple')
```

qui fournit l'exemple joint `exemple.ods`.

O.2. Emprunt avec assurance et divers frais

Les divers frais sont souvent
— assurance : assurance en %, sur le montant réellement emprunté (à payer par an) ;
— frais de dossier, fixes à payer en début d'emprunt ;
— caution à payer en début d'emprunt (sur fonds propres) ;
— pourcentage de la caution à récupérer en fin d'emprunt.
Parfois, une restitution est à prévoir en fin de prêts, comme pourcentage de la caution.
Voir la fonction matlab `emprunt_tot`.

Annexe P

Exponentielle

P.1. Introduction

Dans cette annexe et la suivante (annexe Q), nous allons redéfinir les fonctions exponentielle et logarithmique en démontrant l'ensemble de leurs propriétés, notamment les formules des propositions 11.26 page 73 et 11.27 page 73.

Historiquement, il semblerait que, pour concevoir les règles à calculs permettant de calculer des produits, on ait cherché des fonctions transformant le produit en somme, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ab) = F(a) + F(b). \tag{P.1}$$

On peut alors montrer que la dérivée de cette fonction est la fonction $t \mapsto 1/t$. Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Les premières règles à calcul et les abaques de valeurs de logarithmes sont créées grâce à différentes méthodes de calcul. La fonction réciproque du logarithme est ensuite introduite ; elle est appelée exponentielle. Cette façon de procéder est une façon de définir le logarithme, l'exponentielle et, en utilisant les séries, la trigonométrie réelle.

Voir par exemple l'annexe S page 278, [Lim]

ou

`http://tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc5/exp.html`
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_naturel`

Une autre façon de procéder, plus mathématique et fondamentale est de tout oublier [1]. On définit ensuite les séries comme dans ce cours, puis l'exponentielle par l'égalité (12.19a) de la proposition 12.29 page 94. . Pour plus de détails, on renvoie par exemple à [Bas22b, Chapitre "Fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$", section "Fonction exponentielle"].

Remarque P.1. Une autre façon, moins académique, d'introduire l'exponentielle (et donc d'en déduire ensuite le logarithme) est présentée dans l'annexe N page 223.

P.2. Définition et propriétés élémentaire de l'exponentielle

On prendra comme définition l'égalité (12.19a) de la proposition 12.29 page 94.

Définition P.2 (Fonction exponentielle). Pour tout x réelle la série de terme général $x^n/n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ est convergente et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n. \tag{P.2}$$

Remarque P.3. Cette définition fait apparaître l'exponentielle formellement comme un polynôme, "à nombre infini de coefficients". Elle se comporte comme tel (on peut la dériver terme à terme ....).

♢

1. Enfin, provisoirement, ce qui est relatif au logarithme et à l'exponentielle !

Démonstration. La convergence de la série a été montrée au point 1 page 95 de la preuve de la proposition 12.29. □

Remarque P.4. Comme dans [Bas22b, Chapitre "Fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"], on peut aussi définir, de façon plus générale, l'exponentielle sur $\mathbb{C}$.

Proposition P.5. *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée égale à elle-même. On a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \tag{P.3a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \tag{P.3b}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \tag{P.3c}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \tag{P.3d}$$

Démonstration.

(1) On admet la continuité et la dérivabilité (voir [Bas22b, Chapitre "Fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"]). On a aussi, d'après cette même référence :

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right)', \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} x^n\right)', \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}, \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1},
\end{aligned}$$

on pose $n' = n - 1$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

(2) La célèbre formule (P.3a) est admise (voir de nouveau [Bas22b, Chapitre "Fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"]).

(3) On en déduit la preuve de (P.3b) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est immédiat pour $n = 0$. Si elle est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné, on écrit, d'après (P.3a) et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$e^{(n+1)x} = e^{nx+x} = e^{nx} e^x = (e^x)^n e^x = (e^x)^{n+1},$$

ce qui est (P.3b) au rang $n + 1$.

(4) Notons que

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 0^n = e^0$$

et donc

$$e^0 = 1. \tag{P.4}$$

On écrit ensuite (P.3a) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y = -x$:

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x},$$

dont on déduit (P.3d). Enfin, on a donc d'après (P.3a) et (P.3d)

$$\begin{aligned} e^{x-y} &= e^x e^{-y}, \\ &= \frac{e^x}{e^y}, \end{aligned}$$

et (P.3c) en découle.

□

Remarque P.6. Voir de nouveau la remarque 12.31 page 95.

Proposition P.7. *La fonction exponentielle est strictement positive, strictement croissante et définit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

On a

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty, \tag{P.5a}$$

$$e^0 = 1, \tag{P.5b}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0. \tag{P.5c}$$

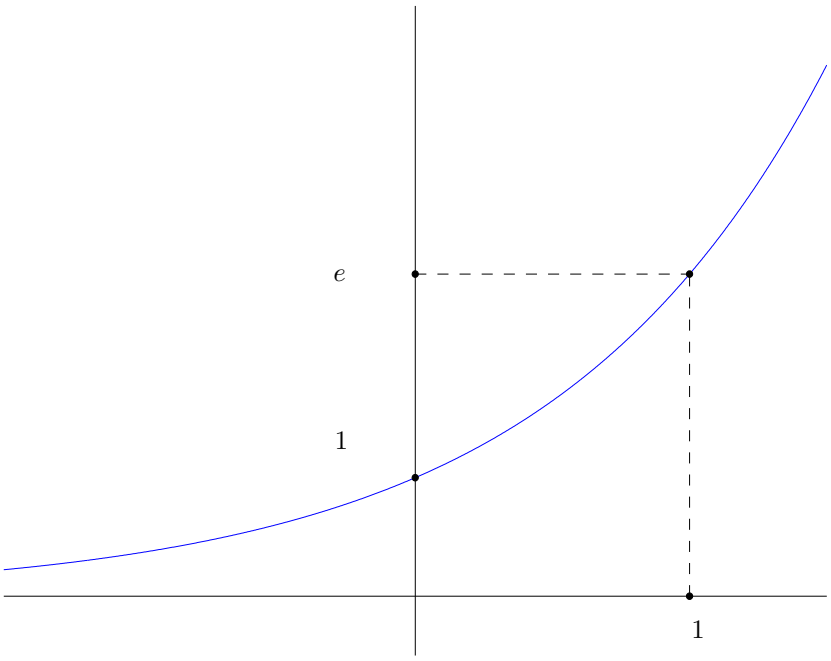


Figure P.1. Le graphe de la fonction exponentielle.

Son graphe est représenté sur la figure P.1.

Démonstration.

(1) Pour tout $x \geq 0$, la somme définie par (P.2), minorée par 1 est strictement positive et on en déduit la stricte positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}_+$. Sa positivité sur $\mathbb{R}_-$ découle de la stricte positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}_+$ et de (P.3d).

(2) L'exponentielle est de dérivée égale à elle même, strictement positive ; on déduit la stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ (voir section 1.3.4 page 7).

(3) (a) Étudions tout d'abord la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}. \tag{P.6}$$

On a

$$g'(x) = e^x - x,$$
$$g''(x) = e^x - 1.$$

D'après la stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $x > 0$, $e^x > e^0 = 1$ (voir (P.4)) et donc $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g'(0) = 1$. Donc, pour tout $x > 0$, $g'(x) > g'(0) > 0$ et g est donc scrictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Voir le tableau de variation P.1. Or

x	0	$+\infty$
$g(x)$	> 0 ↗	
$g'(x)$	> 0 ↗	
$g''(x)$	$+$	

TABLE P.1. Le double tableau de variation de g

$g(0) = 1$. Donc, pour tout $x > 0$, $g(x) > g(0) > 0$. On a donc, compte tenu de la définition de g

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^x > \frac{x^2}{2}. \tag{P.7}$$

(b) (i) De (P.7), on déduit (P.5a).

(ii) (P.5b) n'est rien d'autre que (P.4).

(iii) On a aussi, d'après (P.5a) et (P.3d) le résultat (P.5c).

(c) De (P.5a) et (P.3d), et de la stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on déduit que l'exponentielle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose aussi

$$e = e^1 \approx 2.718281828459046. \tag{P.8}$$

Voir son tableau de variation P.2 page suivante.

□

Voir l'exercice de TD 14.1.

PROPOSITION P.8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^x \geq x + 1 \tag{P.9}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de e	0	1	e	$+\infty$
Signe de e^x		$+$		

TABLE P.2. Tableau de variation de l'exponentielle.

et le seul cas d'égalité correspond au cas $x = 0$. Autrement dit le graphe de la fonction exponentielle est strictement au dessus de la tangente (obtenue par l'équation (1.12) *page 4) à la courbe en* 0 *et le graphe ne touche la tangente qu'au point de contact.*

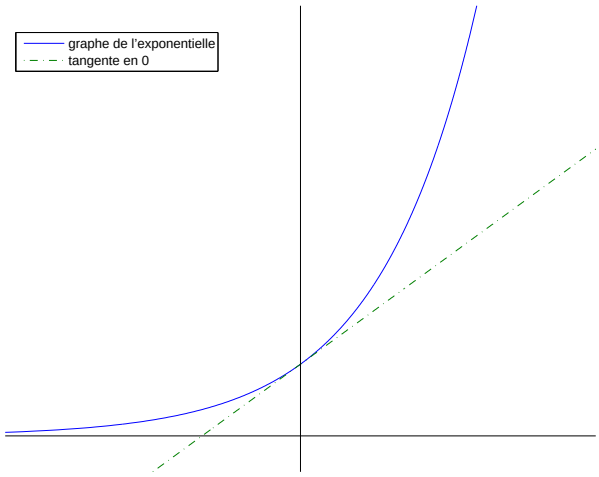


FIGURE P.2. L'exponentielle et sa tangente au point d'abscisse 0.

Voir la figure P.2.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration de ce résultat se fait habituellement en étudiant la convexité de la fonction exponetielle. On peut en donner une version élémentaire à la main. Considérons la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = e^x - x - 1. \tag{P.10}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = e^x - 1,$$

strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$. On en déduit le tableau de variation P.3 page suivante de h. On a donc pour tout $x \neq 0$, $h(x) > 0$ et h n'est nulle que pour $x = 1$, ce qui permet de conclure. □

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h	↘		0	↗	
h'		$-$	0	$+$	

TABLE P.3. Tableau de variation de h.

PROPOSITION P.9. *On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \tag{P.11a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0. \tag{P.11b}$$

DÉMONSTRATION.

(1) Remarquons qu'il suffit de démontrer (P.11a) uniquement pour $n = 1$. En effet, si elle est vraie pour $n = 1$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (P.3b)

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x^n} &= \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n},\\ &= \frac{1}{n^n}\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n},\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \tag{P.12}$$

Si on pose $y = x/n$ qui tend vers l'infini, quand x tend vers l'infini, on a d'après (P.12)

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^y}{y}\right)^n,$$

et il suffit donc de montrer que

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty, \tag{P.13}$$

D'après l'inégalité (P.7) page 237, démontrée dans la preuve de la proposition P.9, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^y}{y} > \frac{y}{2}, \tag{P.14}$$

ce qui entraîne (P.13).

(2) Remarquons, qu'en posant $y = -x$, (P.11a) entraîne

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{e^{-y}}{(-y)^n} = +\infty,$$

et donc, d'après (P.3d)

$$\lim_{y\to-\infty} (-1)^n \frac{1}{e^y y^n} = +\infty,$$

soit encore

$$\lim_{y\to-\infty} e^y y^n = 0,$$

ce qui n'est autre que (P.11b).

□

Annexe Q

Logarithme

Q.1. Introduction

Dans cette annexe, nous présentons le logarithme comme la fonction réciproque de l'exponentielle, définie à l'annexe P.

Remarque Q.1. L'autre façon, historique, comme indiqué dans la section P.1, est présentée dans l'annexe S page 278 (voir en particulier les figures S.1,S.2 et S.3 page 284.).

Q.2. Définition et propriétés élémentaire du Logarithme

Définition Q.2 (Fonction logarithme). La fonction logarithme est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle, bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x \iff x = \ln y. \tag{Q.1}$$

Proposition Q.3. *La fonction logarithmique est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée égale à $1/x$. On a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \tag{Q.2a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(x^n) = n \ln x, \tag{Q.2b}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \tag{Q.2c}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(x). \tag{Q.2d}$$

Démonstration.

(1) On admet la continuité et dérivabilité du logarithme. D'après la formule (1.19g) page 5, avec $f = e$, $f' = e$ et $f^{(-1)} = \ln$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

(2) Toutes les formules (Q.2) ne sont qu'une conséquence des formules (P.3) page 235 et de (Q.1). Démontrons par exemple (Q.2a). Appliquons (P.3a) à $x = \ln a$ et $y = \ln b$ où a et b appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$. Il vient en utilisant (Q.1)

$$x + y = \ln(e^x e^y),$$

et donc

$$\ln a + \ln b = \ln(ab).$$

□

Proposition Q.4. *La fonction logarithme est strictement croissante et définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.*

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \tag{Q.3a}$$

$$\ln 1 = 0, \tag{Q.3b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty. \tag{Q.3c}$$

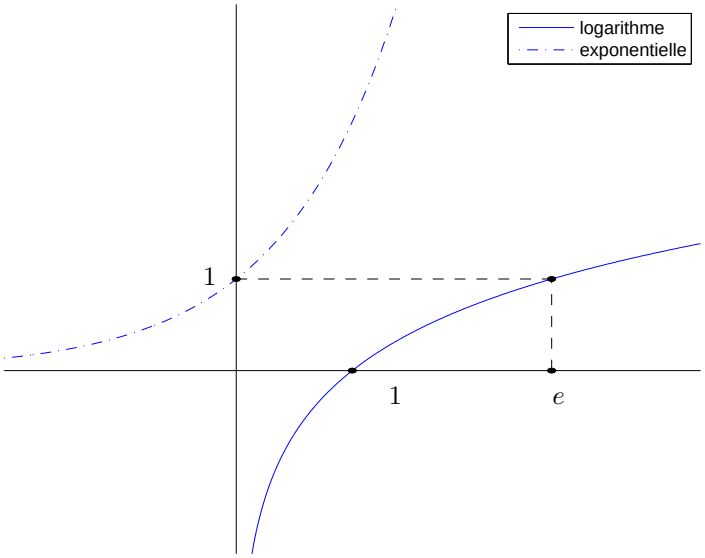


FIGURE Q.1. Le graphe de la fonction logarithme (et le rappel de la fonction exponentielle).

Son graphe est représenté sur la figure Q.1.

DÉMONSTRATION.
Tout cela provient de la définition Q.2 page précédente et de la proposition (P.7).
La stricte croissance provient du fait que la dérivée du logarithme vaut $1/x > 0$.
Si on utilise le tableau de variation P.2 page 238, on en déduit le tableau de variation du logarithme Q.1 page suivante et (Q.3). □

REMARQUE Q.5. En face de la formule (P.2), on a aussi la formule suivante qui généralise le développement usuel de $\ln(1+x)$ de l'annexe A page 122 :

$$\forall x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{Q.4}$$

Voir l'annexe R page 252 et notamment la section R.4.

PROPOSITION Q.6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a*

$$\ln(x) \leq x - 1, \tag{Q.5}$$

et le seul cas d'égalité correspond au cas $x = 1$. Autrement dit le graphe de la fonction logarithme est strictement en dessous de la tangente (obtenue par l'équation (1.12) page 4) à la courbe en 1 et le graphe ne touche la tangente qu'au point de contact.

x	0	1	e	$+\infty$
Variation de ln	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	‖	$+$		

TABLE Q.1. Tableau de variation du logarithme.

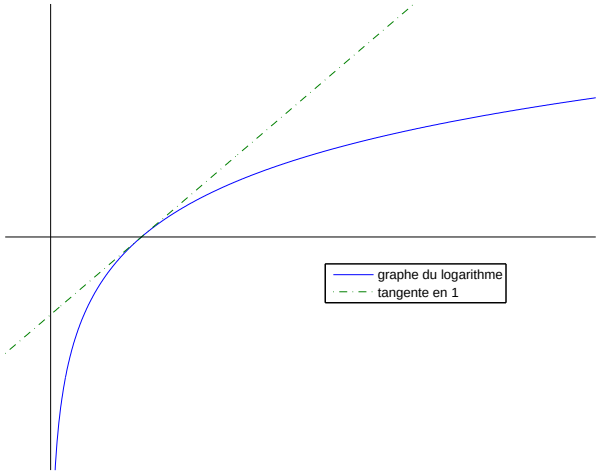


FIGURE Q.2. Le logarithme et sa tangente au point d'abscisse 1.

Voir la figure Q.2.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration de ce résultat (qui est le pendant de la proposition P.8 page 237) se fait habituellement en étudiant la convexité de la fonction logarithme. On peut en donner une version élémentaire à la main. Considérons la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = x - 1 - \ln x. \tag{Q.6}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

strictement positive sur $]1, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, 1[$. On en déduit le tableau de variation Q.2 page suivante de h. On a donc pour tout $x \neq 1$, $h(x) > 0$ et h n'est nulle que pour $x = 1$, ce qui permet de conclure. □

x	0		1		$+\infty$
h	‖	↘	0	↗	
h'	‖	$-$	0	$+$	

TABLE Q.2. Tableau de variation de h.

PROPOSITION Q.7. *On a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \tag{Q.7a}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0. \tag{Q.7b}$$

DÉMONSTRATION.

(1) Si on utilise (P.11a) avec $n = 1$, dans laquelle, on pose $x = \ln y$ avec $y \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\ln y} = +\infty,$$

dont on déduit (Q.7a).

(2) Si on pose $y = 1/x$ dans (Q.7a), on obtient

$$\lim_{y\to 0^+} y \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

dont on déduit (Q.7b) grâce à (Q.2d).

□

Q.3. Fonction exponentielle et logarithme en base a

DÉFINITION Q.8. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle l'exponentielle en base a, la fonction

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{Q.8}$$

DÉFINITION Q.9. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle le logarithme en base a, la fonction

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{Q.9}$$

On a $\log_a(a) = 1$ et on pose $\log = \log_{10}$.

Voir l'exercice de TD 14.7.

LEMME Q.10. *On a pour tout* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = a^x \iff x = \log_a y. \tag{Q.10}$$

Démonstration. En effet, par définition et en utilisant (Q.1),

$$\begin{aligned} y = a^x &\iff y = e^{x \ln a}, \\ &\iff \ln y = x \ln a, \\ &\iff \frac{\ln y}{\ln a} = x, \\ &\iff \log_a y = x. \end{aligned}$$

□

Q.4. Fonction puissance

Définition Q.11. Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a = e^{a \ln x}. \tag{Q.11}$$

Proposition Q.12.

Si $a = 0$, $x^a = 1$.

Pour tout a réel, non nul, l'application $x \mapsto x^a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée égale à $x \mapsto ax^{a-1}$.

Si $a > 0$, cette application peut être prolongée par 0 en 0 et c'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

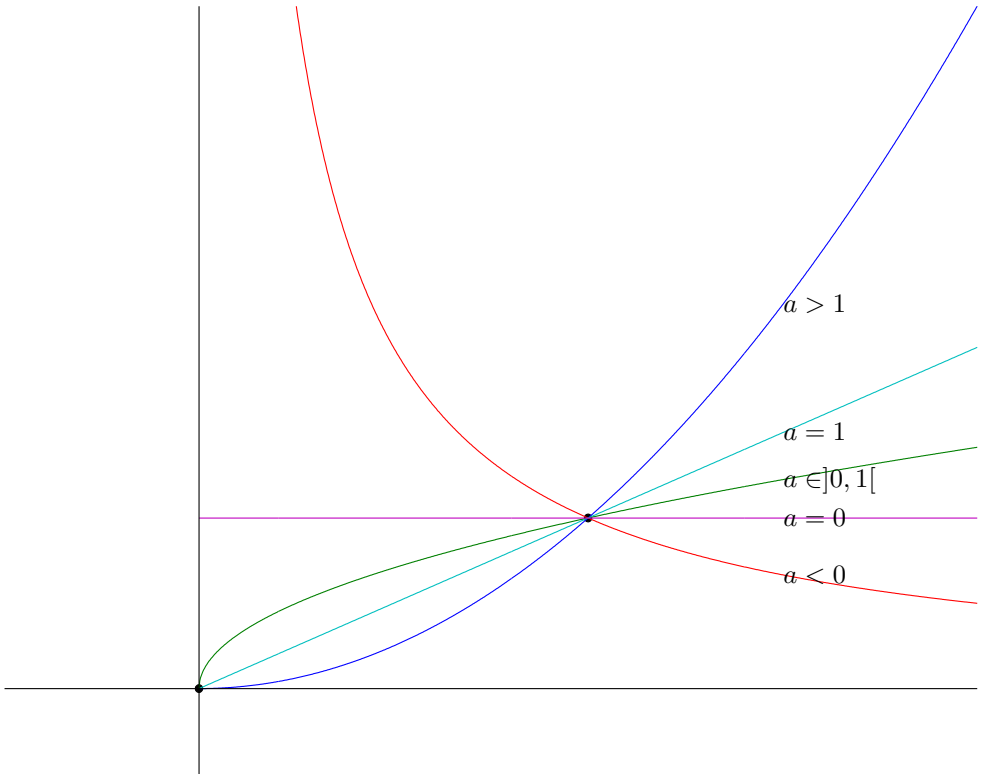


Figure Q.3. Les fonctions x^a.

Voir les graphiques Q.3.

Démonstration.

(1) Remarquons que si $a = 0$, $x^a = 1$.

(2) On a par définition

$$\begin{aligned}(x^a)' &= \left(e^{a\ln x}\right)',\\ &= (a\ln x)'\left(e^{a\ln x}\right),\\ &= \frac{a}{x}\left(e^{a\ln x}\right),\\ &= a\frac{1}{e^{\ln x}}\left(e^{a\ln x}\right),\\ &= a\left(e^{(a-1)\ln x}\right),\\ &= ax^{a-1}.\end{aligned}$$

(3) Si $a \neq 0$, la dérivée est différente de zéro et la fonction est strictement monotone. On vérifie que

$$\text{pour tout réel } a,\ 1^a = 1\,; \tag{Q.12a}$$
$$\text{Si } a > 0,\ \lim_{x\to 0^+} x^a = 0\,; \tag{Q.12b}$$
$$\text{Si } a < 0,\ \lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty\,; \tag{Q.12c}$$
$$\text{Si } a > 0,\ \lim_{x\to +\infty} x^a = +\infty\,; \tag{Q.12d}$$
$$\text{Si } a < 0,\ \lim_{x\to +\infty} x^a = 0. \tag{Q.12e}$$

(4)

x	0	1	∞
Variations de x^a	0 ↗	1 ↘	$+\infty$
Signe de ax^{a-1}	+		

TABLE Q.3. Tableau de variation de la fonction x^a pour $a > 0$.

On peut donc conclure de tout cela les deux tableaux de variation Q.3 et Q.4 page suivante de la fonction x^a et le graphique de la figure Q.3 page précédente.

□

Voir l'exercice de TD 14.2.

x	0	1	∞
Variations de x^a	$+\infty$	1	0
Signe de ax^{a-1}	$-$		

TABLE Q.4. Tableau de variation de la fonction x^a pour $a < 0$.

PROPOSITION Q.13. *On dispose des formules suivantes :*

$$\forall a > 0, \quad \lim_{x\to 0} x^a = 0, \tag{Q.13a}$$
$$\forall a < 0, \quad \lim_{x\to 0} x^a = +\infty, \tag{Q.13b}$$
$$\forall a > 0, \quad \lim_{x\to +\infty} x^a = +\infty, \tag{Q.13c}$$
$$\forall a < 0, \quad \lim_{x\to +\infty} x^a = 0, \tag{Q.13d}$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a x^b = x^{a+b} \text{ et } \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \tag{Q.13e}$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \tag{Q.13f}$$
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^a) = a\ln(x), \tag{Q.13g}$$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad (a^b)^c = a^{bc}. \tag{Q.13h}$$

DÉMONSTRATION.

(1) Les formules (Q.13a) à (Q.13d) ont été démontrées dans la preuve de la proposition Q.12 page 245.

(2) Les autres formules ne sont que la conséquence des résultats des propositions P.5 page 235 et Q.3 page 241

(a) Par définition, on a

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a x^b &= e^{a\ln x} e^{b\ln x}, \\ &= e^{(a+b)\ln x}, \\ &= x^{(a+b)}. \end{aligned}$$

(b) Par définition, on a

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x b^x &= e^{x\ln a} e^{x\ln b}, \\ &= e^{x(\ln a + \ln b)}, \\ &= e^{x\ln(ab)}, \\ &= (ab)^x. \end{aligned}$$

(c) Par définition, on a

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^a) &= \ln\left(x^a\right), \\ &= \ln\left(e^{a \ln x}\right), \\ &= a \ln x.\end{aligned}$$

(d) Par définition, on a

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad (a^b)^c = e^{c \ln(a^b)},$$

et d'après (Q.13g)

$$\begin{aligned}&= e^{bc \ln a}, \\ &= a^{bc}.\end{aligned}$$

□

Proposition Q.14. *On a, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \tag{Q.14a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0. \tag{Q.14b}$$

Démonstration.

(1) Il suffit de poser $u = x^a$ qui tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. On écrit ensuite $u = e^{a \ln x}$ et donc

$$\ln x = \frac{\ln u}{a},$$

puis

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{\ln u}{au},$$

qui tend vers zéro selon (Q.7a).

(2) Il suffit de réécrire le début le début du point 1 page 239, en l'inversant, en remplaçant n par a réel et en utilisant les propriétés de la proposition Q.13 page 246 :

$$\begin{aligned}\frac{x^a}{e^x} &= \frac{x^a}{\left(e^{\frac{x}{a}}\right)^a}, \\ &= a^a \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a}{\left(e^{\frac{x}{a}}\right)^a}, \\ &= a^a \left(\frac{\frac{x}{a}}{e^{\frac{x}{a}}}\right)^a\end{aligned}$$

Si on pose $y = x/a$ qui tend vers l'infini, quand x tend vers l'infini on a donc

$$\frac{x^a}{e^x} = a^a \left(\frac{y}{e^y}\right)^a,$$

qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini en vertu de (P.11a).

□

Voir les exercices de TD 14.3, 14.4, 14.5 et 14.6.

Remarque Q.15.

- Lorsque $a = n$ est un entier naturel, on obtient

$$x^a = e^{n \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n$$

et donc

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times .... \times x}_{n \text{ fois}}.$$

On peut alors prolonger, dans ce cas, la fonction puissance sur $\mathbb{R}$ en une fonction polynômiale.

- Lorsque $a = n$ est un entier négatif, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on obtient

$$\begin{aligned} x^n &= e^{n \ln x}, \\ &= \frac{1}{e^{-n \ln x}}, \\ &= \frac{1}{x^{-n}}, \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} \end{aligned}$$

On peut alors prolonger, dans ce cas, la fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$.

- Lorsque a est l'inverse d'un entier impair, en posant $1/a = 2s + 1$, on constate que, la fonction polynomiale $x \mapsto x^{2s+1}$ étant bijective sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^a = \sqrt[2s+1]{x}$ est la bijection réciproque de cette application. On peut alors prolonger, dans ce cas, la fonction puissance sur $\mathbb{R}$.

On pourra aussi définir, dans le sens inverse, l'exponentielle à partir de la fonction puissance. Voir annexe N page 223.

Q.5. Établissement des formules des propositions 11.26 et 11.27

On a vu les notations o et O au cours du chapitre 11 page 70. On les a aussi vu pour les développements limités dans le cas de fonction en section 1.4.1 page 9, au voisinage d'un point a :

$$f(x) = p_n(x - a) + o\left((x - a)^n\right),$$

où p_n est un polynôme signifie que

$$f(x) - p_n(x - a) = (x - a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ tendant vers zéro quand x tend vers a.

On peut aussi donner un sens aux notations o O au voisinage de $\pm\infty$ et dans la définition 11.22 page 72 remplacer l'entier n par un réel x et on a :

Définition Q.16. Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe une fonction ε définie sur le même intervalle telle que

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad u(x) = \varepsilon(x)v(x) \tag{Q.15a}$$

avec

$$\varepsilon \text{ bornée sur } [a, +\infty[\text{ pour exprimer que } u = O(v) \text{ en l'infini}; \tag{Q.15b}$$

$$\varepsilon \text{ tendant vers zéro quand } x \text{ tend vers l'infini pour exprimer que } u = o(v) \text{ en l'infini}; \tag{Q.15c}$$

$$\varepsilon \text{ tendant vers 1 quand } x \text{ tend vers l'infini pour exprimer que } u \sim v \text{ en l'infini.} \tag{Q.15d}$$

La proposition 11.26 devient alors

Proposition Q.17. *On dispose des relations de comparaison au sein de chaque type : on a,*

$$\forall 0 \leq \alpha < \alpha', \quad \ln^{\alpha} x = o\left(\ln^{\alpha'} x\right) ; \tag{Q.16a}$$

$$\forall 0 \leq \beta < \beta', \quad x^{\beta} = o\left(x^{\beta'}\right) ; \tag{Q.16b}$$

$$\forall 0 \leq \gamma < \gamma', \quad \gamma^{x} = o\left(\gamma'^{x}\right). \tag{Q.16c}$$

Démonstration. Démontrer la proposition Q.17 revient à démontrer la proposition 11.26. Par exemple, pour démontrer (Q.16a), on écrit d'après les règles de la proposition Q.13

$$\frac{\ln^{\alpha} x}{\ln^{\alpha'} x} = \ln^{\alpha-\alpha'} x,$$

qui tend vers zéro en l'infini car $\alpha < \alpha'$. On laisse au lecteur le soin de démontrer les deux autres propriétés. □

La proposition 11.27 devient alors [1]

Proposition Q.18. *On dispose des relations de comparaison entre les différents types*

$$\forall \alpha \geq 0, \quad \forall \beta > 0, \quad \ln^{\alpha} x = o\left(x^{\beta}\right) ; \tag{Q.17a}$$

$$\forall \beta \geq 0, \quad \forall \gamma > 1, \quad x^{\beta} = o\left(\gamma^{x}\right). \tag{Q.17b}$$

Démonstration. Démontrer la proposition Q.18 revient à démontrer la proposition 11.27. Par exemple, pour démontrer (Q.17b), on écrit successivement (on a $\gamma > 1$ donc $\ln \gamma > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{x^{\beta}}{\gamma^{x}} &= \frac{e^{\beta \ln x}}{e^{x \ln \gamma}}, \\ &= e^{\beta \ln x - x \ln \gamma}, \\ &= e^{x \ln \gamma \left(-1 + \frac{\beta \ln x}{x \ln \gamma}\right)}. \end{aligned}$$

D'après (Q.7a), on a $\ln x / x \to 0$ en l'infini et donc $-1 + \frac{\beta \ln x}{x \ln \gamma} \to -1$ et donc $x \ln \gamma \left(-1 + \frac{\beta \ln x}{x \ln \gamma}\right) \to -\infty$ et d'où finalement

$$\frac{x^{\beta}}{\gamma^{x}} \to 0.$$

On laisse au lecteur attentif le soin de démontrer (Q.17a). □

Pour conclure, il nous faut établir :

Démonstration des propriétés (11.14c) et (11.14d).

(1) Pour démontrer (11.14c), il faut démontrer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma^n}{n!} = 0,$$

ce qui est immédiat car $\frac{\gamma^n}{n!}$ est le terme général de la série associée à e^{γ} (voir définition P.2 page 234). D'après le chapitre 12 page 87 puisque cette série converge son terme général tend vers zéro.

(2) Pour démontrer (11.14d), il faut démontrer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

1. la fonction $n!$ peut aussi s'éttendre sur $\mathbb{R}$. On parle de la fonction Γ, mais on ne l'évoque pas ici.

Pour cela, on majore chaque facteur de $n!$, sauf le premier, par n :

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n}{n^n}, \\ &\leq \frac{1 \times n \times n \times ... \times n \times n}{n^n}, \\ &= \frac{n^{n-1}}{n^n}, \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

qui tend vers zéro.

□

Q.6. Applications concrètes du logarithme

Voir l'annexe S page 278.

Annexe R

Approximations polynômiales de $\ln(1+x)$ et de e^x

R.1. Introduction

Dans cette annexe, nous allons justifier de façon complète tout les résultats annoncés au cours des remarques 1.21 page 11, 12.31 page 95, P.6 page 236 et Q.5 page 242.

Nous allons notamment démontrer les formules (P.2) page 234 et (Q.4) page 242, rappelées ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \tag{R.1a}$$

$$\forall x \in]-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \tag{R.1b}$$

et montrer que ces formules peuvent être simplement utilisées pour approcher numériquement les valeurs de e^x et de $\ln(1+x)$. Nous conclurons par quelques simulations numériques.

Il existe sûrement des formules plus performantes pour approcher numériquement les valeurs de e^x et de $\ln(1+x)$, mais l'objet de cette annexe est d'en proposer des versions simples.

R.2. Les principes de l'analyse numérique (ou méthodes numériques ou calcul scientifique)

(1) Les méthodes numériques ont pour objet de remplacer le calcul d'une quantité l, réelle, voire complexe, en principe non calculable ou difficilement calculable, par la détermination d'une suite (u_n) pour $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, convergeant vers ce nombre l de sorte que :

— Le calcul de u_n soit simple. Il sera souvent donné sous la forme d'un algorithme, lui-même implémentable informatiquement.

— La suite (u_n) converge vers le réel l, soit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l. \tag{R.2}$$

— On puisse "gérer" l'erreur, c'est-à-dire, déterminer, un majorant ε_n de l'erreur η_n définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad \eta_n = |u_n - l|, \tag{R.3}$$

qui vérifie

$$\forall n \geq n_0, \quad \eta_n \leq \varepsilon_n\,, \tag{R.4}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{R.5}$$

— Ainsi, le nombre l sera remplacé par son approximation u_n. L'erreur absolue commise, η_n sera donc, selon (R.4) majoré par le nombre connu ε_n. Selon (R.5), cette erreur pourra choisie aussi petite que l'on veut, à partir du moment où n est assez grand.

— De façon plus précise, on essayera de déterminer, si possible, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $N \geq n_0$ tel que

$$\varepsilon_N \leq \varepsilon. \tag{R.6}$$

D'après (R.5), cet entier N existe. D'après (R.4), l'erreur absolue η_n sera majorée par ε.

On pourra consulter par exemple [DB21].

On s'intéressera aussi dans le cas où $l \neq 0$ à déterminer, un majorant $\widetilde{\varepsilon}_n$ de l'erreur absolue $\widetilde{\eta}_n$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad \widetilde{\eta}_n = \left| \frac{u_n - l}{l} \right|, \tag{R.7}$$

qui vérifie les équivalents de (R.4) et (R.5), soit

$$\forall n \geq n_0, \quad \widetilde{\eta}_n \leq \widetilde{\varepsilon}_n, \tag{R.8}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \widetilde{\varepsilon}_n = 0. \tag{R.9}$$

L'erreur relative commise, $\widetilde{\eta}_n$ sera donc, selon (R.8) majorée par le nombre connu $\widetilde{\varepsilon}_n$.

(2) Dans le cas où la suite est réelle, on peut aussi déterminer deux suites $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad a_n \leq l - u_n \leq b_n \tag{R.10}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \max\left(|a_n|, |b_n|\right) = 0. \tag{R.11}$$

Dans ce cas, on a

$$\forall n \geq n_0, \quad |l - u_n| \leq \max\left(|a_n|, |b_n|\right), \tag{R.12}$$

et donc, u_n constitue une approximation de l avec une erreur inférieure à $\max\left(|a_n|, |b_n|\right)$, qui tend vers zéro.

Il suffit de démontrer le résultat suivant :

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}, \quad u \leq v \leq w \Longrightarrow |v| \leq \max(|u|, |w|). \tag{R.13}$$

Puisque l'on a

$$u \leq v \leq w, \tag{R.14}$$

on étudie plusieurs cas :

(a) Premier cas : $0 \leq u$.

On a d'après (R.14), $w \geq v \geq u \geq 0$ et donc

$$|v| \leq |w| \leq \max(|u|, |w|).$$

(b) Deuxième cas : $u \leq 0 \leq v$.

On a d'après (R.14), $u \leq 0 \leq v \leq w$ et donc

$$|v| \leq |w| \leq \max(|u|, |w|).$$

(c) Troisième cas : $v \leq 0 \leq w$.

On a d'après (R.14), $u \leq v \leq 0$ et donc

$$|v| = -v \leq -u = |u| \leq \max(|u|, |w|).$$

(d) Quatrième cas : $w \leq 0$.

On a d'après (R.14), $u \leq v \leq w \leq 0$ et donc

$$v = -v \leq -u = |u| \leq \max(|u|, |w|).$$

(3) Dans le cas où la suite est réelle, on peut enfin déterminer deux suites $(m_n)_{n\geq n_0}$ et $(M_n)_{n\geq n_0}$ vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad m_n \leq l \leq M_n \tag{R.15}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} M_n - m_n = 0. \tag{R.16}$$

m_n et M_n sont respectivement les approximations par défaut et par excès du nombre l. On a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} m_n = l. \tag{R.17}$$

En effet, on a, d'après (R.15)

$$0 \leq l - m_n \leq M_n - m_n,$$

qui tend vers zéro. De même, d'après (R.15)

$$0 \leq M_n - l \leq M_n - m_n,$$

qui tend vers zéro. On en déduit aussi que

$$\max\left(|l - m_n|, |l - M_n|\right) \leq M_n - m_n, \tag{R.18}$$

ce qui assure que l'erreur absolue entre l et m_n et M_n est majorée par $M_n - m_n$.

R.3. Approximation de e^x

R.3.1. Par les formules de Taylor-Lagrange

Montrons le résultat suivant :

PROPOSITION R.1. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{R.19}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists N(x) \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N(x), \quad 1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0. \tag{R.20}$$

On pose

(1) Si $x \geq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{R.21a}$$

$$\forall n \geq N(x), \quad b_n = \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} - 1\right) p_n(x), \tag{R.21b}$$

(2) Si $x \leq 0$

(a) Si n impair

(i) Si $p_n(x) \leq 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \tag{R.21c}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{R.21d}$$

(ii) Si $p_n(x) > 0$,

$$\forall n \geq N(x), \quad a_n = \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{-1} - 1 \right) p_n(x), \tag{R.21e}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{R.21f}$$

(b) Si n pair

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{R.21g}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{-1} - 1 \right) p_n(x), \tag{R.21h}$$

On a alors

$$\forall n \geq N(x), \quad e^x - p_n(x) \in [a_n, b_n], \tag{R.22a}$$

et en posant $\varepsilon_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ et $\widetilde{\varepsilon}_n = b_n - a_n \geq 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{R.22b}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \widetilde{\varepsilon}_n = 0. \tag{R.22c}$$

En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(1) $p_n(x)$ constitue une approximation de e^x avec une erreur inférieure à ε_n, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini,

(2) $p_n(x) + a_n$ et $p_n(x) + b_n$ constituent respectivement deux approximations par défaut et par excès de e^x avec une erreur inférieure à $\widetilde{\varepsilon}_n$, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

On retrouve donc d'une part le développement limité usuel de e^x de l'annexe A page 122 et d'autre part le résultat habituel sur les séries (voir équation (12.19a)) . Si on tient (12.19a) comme définition de e^x, comme c'est fait dans le chapitre 14 page 112 (voir définition P.2 page 234), cette proposition apporte, en outre, les résultats (R.21) et (R.22a).

Remarque R.2. Notons que si x est rationnel, la proposition R.1 propose une approximation rationnelle de e^x.

Démonstration de la proposition R.1. On s'appuiera pour montrer ce résultat sur la formule de Taylor-Lagrange.

(1) Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x. \tag{R.23}$$

On a immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = e^x \tag{R.24}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(0) = 1. \tag{R.25}$$

La formule de Taylor-Lagrange (voir équation (1.28) page 11 du cours) à l'ordre n appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) fournit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1},$$

où

$$\xi \in \begin{cases}]0,x[, & \text{si } x \geq 0, \\ ]x,0[, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{R.26}$$

et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (R.25),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}. \tag{R.27}$$

Pour toute la suite, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \tag{R.28a}$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}, \tag{R.28b}$$

de sorte que (R.27) s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = p_n(x) + R_n(x). \tag{R.29}$$

Il ne reste plus qu'à étudier la suite $R_n(x)$, selon les différentes valeurs de x.

(2) (a) Premier cas : $x \in \mathbb{R}_+$.

D'après (R.26), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \tag{R.30}$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \tag{R.31}$$

puisque $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est le terme général d'une série convergente. (voir le lemme 12.30 page 94) . Cela suffit pour montrer que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0, \tag{R.32}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \to +\infty} p_n(x) = e^x, \tag{R.33}$$

et donc (12.19a). Cependant cela ne permet pas de majorer $R_n(x)$ indépendamment de x ! Pour cela, on écrit d'après (R.29) et (R.30),

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x - p_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

et donc d'une part

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x - p_n(x) \tag{R.34}$$

et d'autre part

$$\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^x \leq p_n(x). \tag{R.35}$$

D'après (R.31), on a (R.20). Donc, d'après (R.20) et (R.35), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \geq N(x), \quad e^x \leq p_n(x) \left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1}. \tag{R.36}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \geq N(x), \quad e^x - p_n(x) \leq \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} - 1\right) p_n(x). \tag{R.37}$$

L'équation (R.22a) est une conséquence de (R.34) et de (R.37), en considérant a_n et b_n définis par (R.21a) et (R.21b). On vérifie facilement que $0 \leq a_n \leq b_n$ ce qui implique

$$R_n(x) \geq 0. \tag{R.38}$$

Enfin, on a

$$\max(|a_n|, |b_n|) = \max\left(\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|, \left|\left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} - 1\right) p_n(x)\right|\right) \to 0, \tag{R.39}$$

d'après (R.31) et (R.33) et donc, *a fortiori*

$$b_n - a_n = \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} - 1\right) p_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \tag{R.40}$$

(i) D'après (R.22a) et le point 2 page 253 appliqué à $l = e^x$, et $u_n = p_n(x)$, (R.39) implique que $p_n(x)$ constitue une approximation de e^x avec une erreur inférieure à $\max(|a_n|, |b_n|)$, ce qui permet de montrer le point 1 page 255.

(ii) Posons $m_n = p_n(x) + a_n$ et $M_n = p_n(x) + b_n$. On a donc, d'après (R.22a)

$$\forall n \geq N(x), \quad m_n \leq e^x \leq M_n, \tag{R.41}$$

et

$$\forall n \geq N(x), \quad M_n - m_n = b_n - a_n. \tag{R.42}$$

D'après (R.22a) et le point 3 page 254 appliqué à $l = e^x$, (R.40) (R.41) (R.42) impliquent que m_n et M_n tendent vers e^x et constituent des approximations par défaut et par excès de e^x, avec une erreur inférieur à $b_n - a_n$, ce qui permet de conclure en montrant le point 2 page 255.

(b) Second cas : $x \in \mathbb{R}_-$.

Il nous faut discuter cette fois-ci sur la parité de n.

(i) Si n est impair, on a

$$x^{n+1} \geq 0. \tag{R.43}$$

On a d'après (R.26) $e^x \leq e^\xi \leq 1$ et donc d'après (R.43)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xi^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq R_n(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x, \tag{R.44}$$

ce qui est l'analogue de (R.30). Cela montre (R.33) ainsi que, d'une part,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq e^x - p_n(x) \tag{R.45}$$

et d'autre part

$$\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^x \geq p_n(x). \tag{R.46}$$

qui sont les analogues de (R.34) et (R.35).

- Si

$$p_n(x) \leq 0. \tag{R.47}$$

On écrit d'après (R.44)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq R_n(x) \geq 0,$$

et donc

$$0 \leq e^x - p_n(x). \tag{R.48}$$

- Si

$$p_n(x) > 0, \tag{R.49}$$

on a d'après (R.46), et d'après (R.20),

$$\forall n \geq N(x), \quad e^x \geq \left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} p_n(x). \tag{R.50}$$

qui est l'analogue de (R.36). Dans ce cas, (R.50) implique

$$\forall n \geq N(x), \quad e^x - p_n(x) \geq \left(\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{-1} - 1\right) p_n(x). \tag{R.51}$$

qui est l'analogue de (R.37). Comme pour les équations (R.34) et de (R.37), on dispose des minorations de $e^x - p_n(x)$ (R.48) ou (R.51) et de la majoration (R.45). On conclut comme dans le cas 2a page 256, en posant a_n et b_n définis par (R.21c), (R.21d) ou (R.21e), (R.21f). On vérifie facilement que $0 \leq a_n \leq b_n$ ce qui implique

$$R_n(x) \geq 0. \tag{R.52}$$

Puis on conclut de la même façon que dans le cas 2a page 256 en remarquant que dans ce cas encore a_n et b_n tendent aussi vers zéro.

(ii) Si n est pair, on a

$$x^{n+1} \leq 0, \tag{R.53}$$

et on a cette fois-ci, puisque $e^x \leq e^\xi \leq 1$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xi^{n+1} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x,$$

ce qui est exactement (R.30). On finit donc exactement comme dans le cas 2a page 256, à la différence près que $\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ est toujours strictement positif et on peut donc considérer a_n et b_n définis par (R.21g) et (R.21h). On vérifie facilement que $b_n \leq a_n \leq 0$ ce qui implique

$$R_n(x) \leq 0. \tag{R.54}$$

□

R.3.2. Par les séries

En utilisant quelques résultats classiques sur les séries, nous allons obtenir des résultats légèrement différents de la proposition R.1 page 254.

Comme rappelé dans l'introduction P.1 page 234, l'exponentielle peut être introduite de différentes façons.

Établissons maintenant le résultat principal. Nous rappelons que nous tenons pour vrai le résultat (R.1a) page 252.

Remarquons que la convergence de la série de terme général $x^n/n!$ résulte par exemple de la proposition 12.29 page 94.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude du reste $R_n(x)$ de la série associée à l'exponentielle

$$\forall x \in]-1, 1], \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{R.55}$$

et qui vérifie donc aussi (R.22a) où p_n est défini par (R.19).

PROPOSITION R.3. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{R.56}$$

On pose

(1) Si $x \geq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \tag{R.57a}$$

$$\forall n \geq E(x-1), \quad b_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}\right). \tag{R.57b}$$

(2) Si $x \leq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \tag{R.57c}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \tag{R.57d}$$

On a alors

$$\forall n \geq N(x), \quad e^x - p_n(x) \in [a_n, b_n], \tag{R.58}$$

et en posant $\varepsilon_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ et $\widetilde{\varepsilon}_n = b_n - a_n \geq 0$, on a (R.22b) *et* (R.22c) *. En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

(1) $p_n(x)$ constitue une approximation de e^x avec une erreur inférieure à ε_n, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini,

(2) $p_n(x) + a_n$ et $p_n(x) + b_n$ constituent respectivement deux approximations par défaut et par excés de e^x avec une erreur inférieure à $\widetilde{\varepsilon}_n$, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION.

(1) Premier cas : $x \in \mathbb{R}_+$.

La série définie par (R.1a) est une série à terme positif. On a donc

$$R_n(x) \geq 0. \tag{R.59}$$

On peut donc écrire successivement *a priori* dans $[0, +\infty]$ (voir la remarque 12.14 page 90) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{x^{k-n-1}(n+1)!}{k!}\right), \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)\times\ldots\times k} x^{k-n-1}\right), \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\times\ldots\times k} x^{k-n-1}\right), \end{aligned}$$

chacun des $k-(n+2)+1=k-n-1$ termes des dénominateurs $(n+2)\times ...\times k$ de la somme est minoré par $n+2$ de sorte que $\frac{1}{(n+2)\times ...\times k}$ est majoré par $1/((n+2)^{k-n-1}$:

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k-n-1}}x^{k-n-1}\right),$$

on pose $k'=k-n-1$:

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k'}}x^{k'}\right),$$
$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k}}x^{k}$$

et donc,

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+2}\right)^k\in[0,+\infty]. \tag{R.60}$$

Si on prend n tel que $n>x-2$ en choisissant par exemple (ici $E(x)$ désigne la partie entière de x)

$$n\geq E(x-1) \tag{R.61}$$

alors $n>x-2$ et $n+2>x$ et

$$0\leq\frac{x}{n+2}<1,$$

et la série géométrique de raison $\frac{x}{n+2}$ converge (voir section 12.3.2 page 89) et on a

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}\right),$$
$$<+\infty,$$

et donc,

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \forall n\geq E(x-1),\quad R_n(x)\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}\right). \tag{R.62}$$

Ainsi, grâce à (R.59) et (R.62), on considère a_n et b_n définis par (R.57a) et (R.57b). On retrouve donc l'équation (R.38) ainsi que des équations un peu différentes de celles du cas 2a page 256 de la preuve de la proposition R.1 page 254. On conclue comme à la fin du point 2a page 256.

(2) Deuxième cas : $x\in\mathbb{R}_-$.

La série définie par (R.1a) est une série alternée (voir théorème 12.25 page 92) . En effet :

- On pose
$$u_n(x)=\frac{x^n}{n!}, \tag{R.63}$$
qui est du signe de x^n, c'est à dire de $(-1)^n$.
- On a aussi
$$\lim_{n\to+\infty}|u_n(x)|=0,$$
puisque la série associée converge.
- On a enfin
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1}<1,$$
et la suite $|u_n(x)|$ est décroissante, à partir d'un certain rang.

Ainsi, d'après le théorème sur les séries alternées (voir théorème 12.25 page 92) , la série de terme général $u_n(x)$ converge. De plus le reste $R_n(x)$ a un signe égal à celui du premier terme négligé, qui est $(-1)^{n+1}$ et une valeur absolue inférieure à celle du premier premier terme négligé, qui est $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. On considère donc a_n et b_n définis par (R.57c) et (R.57d). On retrouve donc les équations (R.52) et (R.54) ainsi que des équations un peu moins générales que celles du cas 2b page 257 de la preuve de la proposition R.1 page 254. On conclue comme à la fin du point 2a page 256.

□

REMARQUE R.4. On pourra consulter la fonction fournie sur le site habituel `approximation_exp.m` qui synthétise les différents calculs des propositions R.1 page 254 et R.3 page 259. Cette fonction propose donc, pour $x \in \mathbb{R}$, les valeurs de $a_n + p_n(x)$ et de $b_n + p_n(x)$. Ces approximations sont aussi rationnelles si x l'est. Voir les simulations numériques de la section R.3.3.

REMARQUE R.5. Il pourrait être intéressant de comparer ce que donnent les approximations fournies par e^x et e^{-x} censées être inverses l'un de l'autre.

R.3.3. Simulations numériques

Présentons quelques simulations numériques faites grâce à la fonction `approximation_exp.m`, qui utilise les résultats des propositions R.1 page 254 et R.3 page 259. Elle envoie, pour n et x donnés, les valeurs

$$g_n = a_n + p_n(x), \tag{R.64a}$$
$$h_n = b_n + p_n(x); \tag{R.64b}$$

Une mesure de l'erreur peut être aussi donnée par

$$\eta_n = \max(e^x - g_n, n_n - e^x). \tag{R.65}$$

(1)

Voir le tableau R.1 page suivante pour $x = 1$.

(2)

Voir le tableau R.2 page suivante pour $x = -1$.

R.4. Approximation de $\ln(1+x)$

R.4.1. Par les formules de Taylor-Lagrange

Montrons le résultat suivant :

PROPOSITION R.6. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \tag{R.66}$$

(1) On a si $x > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n(x)| = +\infty \tag{R.67}$$

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	2.7182818	2.7182818	0.0000000022775	$2.26054\,10^{-9}$
11	2.7182818	2.7182818	0.00000000017397	$1.72876\,10^{-10}$
20	2.7182818	2.7182818	9.3204×10^{-22}	$9.30039\,10^{-22}$
21	2.7182818	2.7182818	4.0440×10^{-23}	$4.03605\,10^{-23}$
30	2.7182818	2.7182818	3.9230×10^{-36}	$3.91903\,10^{-36}$
31	2.7182818	2.7182818	1.1876×10^{-37}	$1.18650\,10^{-37}$
40	2.7182818	2.7182818	7.2910×10^{-52}	$7.28678\,10^{-52}$
41	2.7182818	2.7182818	1.6946×10^{-53}	$1.69368\,10^{-53}$
50	2.7182818	2.7182818	1.2641×10^{-68}	$1.26363\,10^{-68}$
51	2.7182818	2.7182818	2.3842×10^{-70}	$2.38337\,10^{-70}$
60	2.7182818	2.7182818	3.2297×10^{-86}	$3.22887\,10^{-86}$
61	2.7182818	2.7182818	5.1252×10^{-88}	$5.12389\,10^{-88}$
70	2.7182818	2.7182818	1.6561×10^{-104}	$1.65574\,10^{-104}$
71	2.7182818	2.7182818	2.2681×10^{-106}	$2.26772\,10^{-106}$
80	2.7182818	2.7182818	2.1296×10^{-123}	$2.12930\,10^{-123}$
81	2.7182818	2.7182818	2.5654×10^{-125}	$2.56504\,10^{-125}$

TABLE R.1. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.65) pour $x = 1$

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	0.36787944	0.36787946	0.000000015836	$1.38981\,10^{-8}$
11	0.36787944	0.36787944	0.0000000013197	$1.16982\,10^{-9}$
20	0.36787944	0.36787944	1.2372×10^{-20}	$1.15199\,10^{-20}$
21	0.36787944	0.36787944	5.6238×10^{-22}	$5.25251\,10^{-22}$
30	0.36787944	0.36787944	7.6874×10^{-35}	$7.31852\,10^{-35}$
31	0.36787944	0.36787944	2.4023×10^{-36}	$2.29043\,10^{-36}$
40	0.36787944	0.36787944	1.8896×10^{-50}	$1.82005\,10^{-50}$
41	0.36787944	0.36787944	4.4991×10^{-52}	$4.33722\,10^{-52}$
50	0.36787944	0.36787944	4.0753×10^{-67}	$3.95357\,10^{-67}$
51	0.36787944	0.36787944	7.8370×10^{-69}	$7.60735\,10^{-69}$
60	0.36787944	0.36787944	1.2454×10^{-84}	$1.21408\,10^{-84}$
61	0.36787944	0.36787944	2.0086×10^{-86}	$1.95898\,10^{-86}$
70	0.36787944	0.36787944	7.4325×10^{-103}	$7.27142\,10^{-103}$
71	0.36787944	0.36787944	1.0323×10^{-104}	$1.01021\,10^{-104}$
80	0.36787944	0.36787944	1.0904×10^{-121}	$1.06962\,10^{-121}$
81	0.36787944	0.36787944	1.3298×10^{-123}	$1.30471\,10^{-123}$

TABLE R.2. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.65) pour $x = -1$

(2) Si au contraire, $x \in]-1, 1]$, en posant

$$a_n = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ pair,} \\ -\frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} & \text{si } x \in [0,1], \\ \max\left(-\left(\frac{-x}{x+1}\right)^{n+1}, -\frac{1}{1+x}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right) & \text{si } \in]-1,0], \end{cases} \tag{R.68a}$$

$$b_n = \begin{cases} \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0, & \text{si } \in]-1,0], \end{cases} \tag{R.68b}$$

on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(1+x) - p_n(x) \in [a_n, b_n], \tag{R.69a}$$

et en posant $\varepsilon_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ *et* $\widetilde{\varepsilon}_n = b_n - a_n \geq 0$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{R.69b}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\varepsilon}_n = 0. \tag{R.69c}$$

En d'autres termes, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$*, pour tout* $x \in]-1, 1]$*,*

(1) $p_n(x)$ *constitue une approximation de* $\ln(1+x)$ *avec une erreur inférieure à* ε_n*, qui tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini,*

(2) $p_n(x) + a_n$ *et* $p_n(x) + b_n$ *constituent respectivement deux approximations par défaut et par excès de* $\ln(1+x)$ *avec une erreur inférieure à* $\widetilde{\varepsilon}_n$*, qui tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini.*

Au contraire, si $x > 1$*, cette approximation est inutilisable.*

On retrouve donc d'une part le développement usuel de $\ln(1+x)$ de l'annexe A page 122 et d'autre part le résultat habituel sur les séries (voir équation (R.1b)) .

Remarque R.7. Notons que si x est rationnel, la proposition R.6 propose une approximation rationnelle de $\ln(1+x)$.

Remarque R.8. Le cas $x = -1$ n'est pas pertinent, puisque $\ln(1+x)$ n'est pas défini. De plus, on a alors d'après (R.66)

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

pour laquelle on sait, d'après l'exemple 12.19 page 91, que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(-1) = -\infty. \tag{R.70}$$

Cela peut nous permettre néanmoins d'écrire formellement que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(-1) = \ln(0).$$

Démonstration de la proposition R.6. On s'appuiera pour montrer ce résultat sur la formule de Taylor-Lagrange, en complétant par la formule de la somme de la suite géométrique pour combler deux cas lacunaires.

(1) Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1, +\infty], \quad f(x) = \ln(1+x). \tag{R.71}$$

On a aisément

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \\ f''(x) &= -(x+1)^{-2}, \\ f'''(x) &= 2(x+1)^{-3}, \\ f^{(4)}(x) &= -2 \times 3(x+1)^{-4}, \end{aligned}$$

et on vérifie par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}. \tag{R.72}$$

On a alors

$$f(1) = 0, \tag{R.73}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \tag{R.74}$$

La formule de Taylor-Lagrange (voir équation (1.28) page 11 du cours), à l'ordre n appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$) fournit

$$\forall x \in]-1,+\infty], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1},$$

où

$$\xi \in \begin{cases}]0,x[, & \text{si } x \geq 0, \\ ]x,0[, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{R.75}$$

et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (R.73) et (R.74),

$$\forall x \in]-1,+\infty], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)! x^k + \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^n n!}{(\xi+1)^{n+1}} x^{n+1},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}. \tag{R.76}$$

Pour toute la suite, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \tag{R.77a}$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}, \tag{R.77b}$$

de sorte que (R.76) s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad \ln(1+x) = p_n(x) + R_n(x). \tag{R.78}$$

(2) Proposons une expression alternative de $R_n(x)$ qui permettra de combler deux cas lacunaires. Cette petite astuce est issue de `https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=discussion/881075#Comment_881075`.

Remarquons que l'on a classiquement (somme de la suite géométrique de raison $-t \neq 1$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]-1,+\infty], \quad \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]-1,+\infty], \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + \frac{1}{1+t},$$

ce qui donne par intégration par rapport à t entre 0 et $x \in]-1,+\infty]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt,$$

ce qui donne, en comparant avec (R.77) et (R.78) sont toujours valables, à condition de remplacer (R.77b) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt. \tag{R.79}$$

Il ne reste plus qu'à étudier la suite $R_n(x)$, selon les différentes valeurs de x.

(3) (a) Premier cas : $x \in]1,+\infty[$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'expression (R.77b) est dans ce cas inutile. Si on utilise plutôt (R.79), puisque $x > 1$ et $t \leq x$, on a $t+1 \leq x+x = 2x$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad |R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right|, \tag{R.80}$$

$$= \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt, \tag{R.81}$$

$$\geq \int_0^x \frac{t^n}{2x} dt, \tag{R.82}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad |R_n(x)| \geq \frac{1}{2x} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

dont on déduit de l'équation (11.14b) page 73 du cours, puisque $x > 1$, que

$$\forall x \in]-1,+\infty], \quad \lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| = +\infty. \tag{R.83}$$

On écrit d'après (R.78)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad |p_n(x)| = |R_n(x) - \ln(1+x)|.$$

et donc d'après l'inégalité triangulaire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty], \quad |p_n(x)| \geq |R_n(x)| - |\ln(1+x)|. \tag{R.84}$$

On déduit alors (R.67) de (R.83) et de (R.84).

Remarque R.9. De (R.79), on déduit que le signe de $R_n(x)$ est celui de $(-1)^n$. On a donc d'après (R.83)

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \lim_{n+\to+\infty} R_{2n}(x) = +\infty, \tag{R.85a}$$

$$\lim_{n+\to+\infty} R_{2n+1}(x) = -\infty. \tag{R.85b}$$

D'après (R.78), on a donc

$$p_{2n}(x) = \ln(1+x) - R_{2n}(x),$$
$$p_{2n+1}(x) = \ln(1+x) - R_{2n+1}(x),$$

et d'après (R.85), on a

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \lim_{n+\to+\infty} p_{2n}(x) = -\infty, \tag{R.86a}$$

$$\lim_{n+\to+\infty} p_{2n+1}(x) = +\infty. \tag{R.86b}$$

(b) Deuxième cas : $x \in [-1,1]$.

On utilise *a priori* l'expression (R.77b) de $R_n(x)$.

(i) Supposons $x \in [0,1]$.

D'après (R.75), on a $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} \geq 0$ et donc $R_n(x)$ est du signe de $(-1)^n$. On a aussi, d'après (R.75), $\xi + 1 \geq 1$ et donc

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} \right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

et donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n(x) \in [\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n], \tag{R.87a}$$

avec

$$\widetilde{a}_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ pair}, \\ -\frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{si } n \text{ impair}, \end{cases} \tag{R.87b}$$

$$\widetilde{b}_n = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{si } n \text{ pair}, \\ 0, & \text{si } n \text{ impair}. \end{cases} \tag{R.87c}$$

Remarquons aussi grâce à l'équation (11.14b) page 73 du cours, puisque $x \in [0,1]$ que

$$|R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.} \tag{R.87d}$$

Puis on conclut de la même façon que dans le cas 2a page 256.

(ii) Supposons $x \in [-1,0]$. D'après (R.75), on a $x < \xi < 0$ et donc

$$0 < x + 1 < \xi + 1 < 1$$

et donc

$$\frac{1}{(x+1)^n} > \frac{1}{(\xi+1)^n} > 1 \tag{R.88}$$

On a aussi d'après (R.77b)

$$R_n(x) = -\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}$$

et donc

$$R_n(x) \leq 0, \tag{R.89}$$

et aussi, d'après (R.88)

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}, \\ &\leq \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(x+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

et donc

$$|R_n(x)| = \left(\frac{-x}{x+1} \right)^{n+1}. \tag{R.90}$$

(A) On a enfin

$$\begin{aligned} 0 < \frac{-x}{x+1} < 1 &\iff -x < x+1, \\ &\iff 2x > -1, \\ &\iff x > -1/2, \end{aligned}$$

et donc, d'après (R.89) et (R.90), il vient

$$\forall x \in]-1/2, 0], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n(x) \in [\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n], \tag{R.91a}$$

avec

$$\widetilde{a}_n = -\left(\frac{-x}{x+1}\right)^{n+1}, \tag{R.91b}$$

$$\widetilde{b}_n = 0, \tag{R.91c}$$

$$|R_n(x)| = \left(\frac{-x}{x+1}\right)^{n+1} \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.} \tag{R.91d}$$

Puis on conclut de la même façon que dans le cas 2a page 256.

(B) Il reste donc à traiter le cas $x \in]-1, -1/2]$. On utilise alors, dans ce cas, l'expression (R.79) qui s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1, +\infty], \quad R_n(x) = -(-1)^n \int_x^0 \frac{t^n}{1+t} dt. \tag{R.92}$$

On retrouve alors, d'une part, (R.89), puisque t^n est du signe de $(-1)^n$. D'autre part, on a d'après (R.92) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1, +\infty], \quad |R_n(x)| &= \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1+t} dt \right|, \\ &\leq \int_x^0 \frac{|t^n|}{1+t} dt. \end{aligned}$$

si on choisit $x \in [-1, 0]$, on a $t \geq x$ et $1 + t \geq 1 + x > 0$, $0 < 1/(t+1) < 1/(1+x)$ et

$$\leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t^n| dt,$$

si on fait le changement de variable $u = -t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{1}{1+x} \int_{-x}^0 |(-u)^n| du, \\ &\leq \frac{1}{1+x} \int_0^{-x} u^n du, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1, 0], \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+x} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.} \tag{R.93}$$

Si on compare les expressions des majorants de $|R_n(x)|$ données par (R.91d) et (R.93), on constate que, dans le cas où $x \in]-1/2, 0[$, celle fournie par (R.93) est théoriquement meilleure puisque l'on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} < \left(\frac{-x}{x+1}\right)^{n+1} &\iff \frac{1}{1+x} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} < \frac{(-x)^{n+1}}{(x+1)^{n+1}}, \\ &\iff \frac{1}{1+x} \frac{1}{n+1} < \frac{1}{(x+1)^{n+1}}, \\ &\iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{(x+1)^n}, \end{aligned}$$

ce qui est vrai en théorie pour n tendant vers l'infini puisque $\frac{1}{n+1}$ tend vers zéro et $\frac{1}{(x+1)^n}$ vers l'infini. Néanmoins, on poura, par sécurité conserver les deux expressions et unifier les

cas $x \in]-1/2, 0]$ et $x \in [-1, 0]$ en écrivant finalement à la place de (R.91), l'expression suivante qui reste valable pour toutes les valeurs $x \in [-1, 0]$:

$$\forall x \in]-1, 0], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n(x) \in [\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n], \tag{R.94a}$$

avec

$$\widetilde{a}_n = \max\left(-\left(\frac{-x}{x+1}\right)^{n+1}, -\frac{1}{1+x}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right), \tag{R.94b}$$

$$\widetilde{b}_n = 0, \tag{R.94c}$$

$$|R_n(x)| \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.} \tag{R.94d}$$

Puis on conclut de la même façon que dans le cas 2a page 256.

Remarque R.10. Si on utilise l'expression de $R_n(x)$ donnée par (R.79) dans le cas où $x \in [0, 1]$, on obtient que $R_n(x)$ est du signe de $(-1)^n$ et que l'on a puisque $1 + t \geq 1$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt, \\ &\leq \int_0^x t^n dt, \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

et on obtient donc exactement (R.87).

On unifie, pour conclure, les deux cas donnés par les expressions (R.87) et (R.94). □

Remarque R.11. On peut grâce à la proposition R.6, proposer une ou deux approximations par défaut et par excès, g_n et h_n, de $\ln(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$ sous la forme

$$\ln(X) \in [g_n, h_n]. \tag{R.95}$$

(1) Premier cas : $X > 2$.

On pose

$$x = \frac{1}{X} - 1. \tag{R.96}$$

Puisque $X \in]0, 1/2[$, on a

$$x = \in]-1, -1/2[, \tag{R.97}$$

On a

$$\ln(1+x) = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln(X),$$

et donc

$$\ln(X) = -\ln(1+x). \tag{R.98}$$

D'après (R.69a), on a aussi

$$\ln(1+x) \in [a_n + p_n(x), b_n + p_n(x)]$$

et donc, d'après (R.98),

$$\ln(X) \in [-b_n - p_n(x), -a_n - b_n(x)]. \tag{R.99}$$

(2) Deuxième cas : $X \in [1, 2]$.

Nous avons deux approximations possibles.

(a) La première est donnée de nouveau par les formules (R.96), (R.98) et (R.99) du cas (1). En effet, $1/X \in [1/2, 1]$ et (R.97) est remplacée par

$$x = \in]-1/2, 0]. \tag{R.100}$$

(b) Une autre façon de procéder et de poser

$$x = X - 1 \in [0, 1], \tag{R.101}$$

puis

$$\ln(X) = \ln(1+x), \tag{R.102}$$

et donc d'après (R.69a),

$$\ln(X) \in [a_n + p_n(x), b_n + p_n(x)]. \tag{R.103}$$

REMARQUE R.12. Dans ce cas, les approximations fournies du cas (2a) et du cas (2b) ne sont pas nécessairement de la même qualité. Par exemple, pour $X = 2$, l'approximation fournie par (R.99) correspond d'après la proposition R.6 page 261 à une erreur correspondant à $x = 1$, c'est à dire, d'après (R.68) à a_n et b_n donnés par

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ pair}, \\ -\frac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ impair}, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ pair}, \\ 0, & \text{si } n \text{ impair}. \end{cases}$$

c'est-à-dire à un majorant de l'erreur donné par

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}. \tag{R.104}$$

Si, au contraire, on utilise l'approximation fournie par (R.103), d'après la proposition R.6 page 261 utilisée avec x donné par (R.96), c'est-à-dire $x = -1/2$ les expressions de a_n et b_n fournies par (R.68) s'écrivent

$$a_n = -\frac{1}{2^n(n+1)},$$
$$b_n = 0,$$

c'est-à-dire à un majorant de l'erreur donné par

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n(n+1)}, \tag{R.105}$$

expression qui tend vers zéro plus rapidement que celle donnée par (R.104) du fait du facteur supplémentaire 2^n. Voir les simulations numériques de la section R.3.3 page 261.

(3) Troisième cas : $X \in]0, 1]$.

On utilise de nouveau les formules du cas 2b : on pose

$$x = X - 1 \in]-1, 0], \tag{R.106}$$

puis (R.102). On a de nouveau d'après (R.69a),

$$\ln(X) \in [a_n + p_n(x), b_n + p_n(x)]. \tag{R.107}$$

On pourra consulter la fonction fournie sur le site habituel `approximation_ln.m` qui synthètise les différents calculs de cette remarque et propose donc, pour $X > 0$, les valeurs de $[g_n, h_n]$, approximations par défaut et par excès de $\ln(X)$ d'après (R.99), (R.103), et (R.107). Voir les simulations numériques de la section R.3.3 page 261.

‘

REMARQUE R.13. D'après la remarque R.7 page 263, la remarque R.11 propose aussi une approximation rationnelle de $\ln(X)$ si X est rationnel.

R.4.2. Par les séries

En utilisant quelques résultats classiques sur les séries, nous allons retrouver (partiellement) les résultats de la proposition R.6 page 261.

Comme rappelé l'introduction P.1 page 234, le logarithme peut être introduit de différentes façons.

Établissons mainteant le résultat principal. Nous rappelons que nous tenons pour vrai le résultat (R.1b) page 252.

Remarquons que la convergence de la série de terme général $(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ résulte aussi

— dans le cas où $x \in [0,1]$ du théorème des séries alternées. Voir le théorème 12.25 page 92.

— dans le cas où $x \in]-1,0]$ du fait que par exemple la valeur absolue de $(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ est un petit o de $(-x)^n$, série géométrique convergente.

REMARQUE R.14. Pour ceux qui connaissent la notion de séries entières, la série entière de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est de rayon de convergence égal à un. Comme dans [Bas22b, Chapitre intitulé "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"], on peut par dérivation de la serie terme à terme montrer que cette série entière correspond à $\ln(1+x)$. Le problème de cette méthode est que l'on montre que le rayon de convergence de cette série vaut 1 et que (R.1b) n'est vrai que sur $]-1,1[$. Le passage par continuité en $x=1$ peut-être aussi montré. Voir [Bas22b, section 2 de l'annexe intitulée "Quelques calculs explicites de sommes de Séries"].

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude du reste $R_n(x)$ de la série associée au logarithme et défini par

$$\forall x \in]-1,1], \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \tag{R.108}$$

et qui vérifie donc aussi (R.78) où p_n est défini par (R.66).

(1) Premier cas : $x \in [0,1]$.

La série définie par (R.1b) est une série alternée (voir théorème 12.25 page 92) . En effet :

- En posant
$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{R.109}$$
On a clairement
$$u_n(x) = (-1)^{n-1}|u_n(x)|,$$
en prenant garde au fait que c'est en fait l'opposé de la série qui est alternée. Voir remarque 12.26 page 92.
- On a aussi
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = 0.$$
- On a enfin
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n} = \frac{n}{n+1}x \leq \frac{n}{n+1} < 1,$$
et la suite $|u_n(x)|$ est décroissante.

Ainsi, d'après le théorème des séries alternées (voir théorème 12.25 page 92) la série de terme général $u_n(x)$ converge. De plus le reste $R_n(x)$ a un signe égal à celui du premier terme négligé, qui est $(-1)^n$ et une valeur absolue inférieure à celle du premier terme négligé, qui est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ce qui est exactement le résultat de la proposition R.6 page 261. On retrouve donc le cas 3(b)i page 266 de la preuve de la proposition R.6 page 261.

(2) Deuxième cas : $x \in]-1,0]$.

La série définie par (R.1b) n'est plus une série alternée, puisque son terme général vaut

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

et donc

$$u_n(x) = -\frac{(-x)^n}{n} \leq 0. \tag{R.110}$$

On a donc une série à termes négatifs. Le reste $R_n(x)$ défini par (R.108) est donc négatif et on écrit en utilisant la convention habituelle que l'on travaille dans $]-\infty,+\infty]$ (voir remarque 12.14 page 90) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1], \quad |R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k}, \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{n+1}, \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x)^k, \\
&\leq \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k,
\end{aligned}$$

et d'après la formule de la série géométrique puisque $(-x) \in [0,1[$

$$\leq \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{1+x}.$$

On retrouve donc exactement (R.89) et (R.93). On retrouve donc le cas 3(b)iiB page 267 de la preuve de la proposition R.6 page 261, valable en fait pour $x \in]-1,0]$.

Remarque R.15. Par cette méthode, on ne retrouve plus la majoration du cas 3(b)iiA page 266 de la preuve de la proposition R.6 page 261.

(3) Troisième cas : $x = -1$.

On a, en utilisant la notation (R.109)

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n},$$

qui est le terme général (au signe près) d'une série de Riemann divergente (voir l'exemple 12.19 page 91.) Puisqu'elle est à termes négatifs, d'après la proposition 1 page 90 on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n} = -\infty.$$

On retrouve donc la remarque R.8 page 263.

(4) Quatrième cas : $x > 1$.

On a, en utilisant la notation (R.109)

$$|u_n(x)| = \frac{x^{n-1}}{n},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n(x)| = +\infty. \tag{R.111}$$

La suite $u_n(x)$ ne tend donc pas vers zéro et la série associée ne peut converger. On retrouve donc (partiellement) le cas 3a page 265 de la preuve de la proposition R.6 page 261.

Plus précisément, utilisons le théorème suivant

THÉORÈME R.16 (Série alternée divergente). *Soit une série $\sum u_n$ alternée (voir le théorème 12.25 page 92) pour laquelle la suite $(|u_n|)$ est croissante et contient au moins une valeur strictement positive. Alors la série de terme général u_n est divergente et*

$$\lim_{n+\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} u_k = +\infty, \tag{R.112a}$$

$$\lim_{n+\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = -\infty. \tag{R.112b}$$

DÉMONSTRATION. La preuve est très proche de celle du théorème 12.25 page 92 dont la preuve est donnée par exemple dans [RDO87, section 1.3.3.2)]. Il suffit de l'adapter. Notons que l'hypothèse sur la suite $|u_n|$ implique qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $|u_n|$ sont strictement positifs et que d'après le théorème 11.18 page 72 et la remarque 11.19 page 72,

$$\exists l \in]0, +\infty], \quad \lim_{n+\to+\infty} |u_n| = l. \tag{R.113}$$

Ainsi, en notant comme habituellement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \tag{R.114}$$

il vient

$$\text{les suites } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont divergentes.} \tag{R.115}$$

En effet, si l'une d'entre elle convergeait, par exemple S_{2n}, alors puisque, d'après (R.114)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k,$$

on aurait $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, ce qui contredit (R.113). Remarquons enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \geq 0,$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = (-1)^{2n+3}|u_{2n+3}| + (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \leq 0.$$

ce qui implique que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont respectivement croissantes et décroissantes. D'après le théorème 11.18 page 72 et (R.115), on obtient alors (R.112). □

Appliquons ce théorème à la suite définie par (R.109). On a

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n},\\ &= \frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{n}{n+1},\\ &= x\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} > 1 &\iff x\frac{n}{n+1} > 1,\\ &\iff x > \frac{n+1}{n},\\ &\iff x > 1 + \frac{1}{n},\end{aligned}$$

ce qui est vrai à partir d'un certain rang, puisque $x > 1$ et que $1 + 1/n \to 1$ quand n tend vers l'infini. L'opposé de la suite (u_n) obéit donc aux hypothèses du théorème R.16 page précédente dont on déduit

$$\lim_{n+\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} u_k(x) = -\infty,$$
$$\lim_{n+\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} u_k(x) = +\infty,$$

et on retrouve donc et (R.67) et (R.86).

R.4.3. Simulations numériques

Présentons quelques simulations numériques faites grâce à la fonction `approximation_ln.m`, qui utilise les résultats de la proposition R.6 page 261 et de la remarque R.11 page 268. Elle envoie, pour n et x donnés, les valeurs données par (R.64).

(1)

n	$p_n(-1)$
100	-5.18738
1000	-7.48547
10000	-9.78761
100000	-12.09015
1000000	-14.39273
10000000	-16.69531
100000000	-18.99790

TABLE R.3. Quelques valeurs de $p_n(-1)$

Pour illustrer (R.70), nous présentons dans le tableau R.3 quelques valeurs de $p_n(-1)$ pour différentes valeurs de n, dont on constate qu'elles semblent bien tendre numériquement vers $-\infty$, mais "lentement" (en $\ln(x)$ en fait !).

(2)

Pour illustrer (R.67) et la remarque R.9 page 265, nous présentons dans le tableau R.4 page suivante quelques valeurs de $p_n(2)$ pour différentes valeurs de n, dont on constate qu'elles semblent bien tendre numériquement vers $\pm\infty$.

(3)

Présentons maintenant quelques simulations pertinentes pour illustrer le cas 2 page 261 de la proposition R.6 page 261 en utilisant la remarque R.11 page 268 et l'équation (R.95). Une mesure de l'erreur peut être aussi donnée par

$$\eta_n = \max(\ln(X) - g_n, h_n - \ln(X)). \tag{R.116}$$

(a)

Voir le tableau R.5 page suivante pour $X = 3$.

(b)

Voir le tableau R.6 page 275 pour $X = 1/3$.

n	$p_n(x)$
100	$-8.4227\,10^{27}$
101	$1.6678\,10^{28}$
1000	$-7.1410\,10^{297}$
1001	$1.4268\,10^{298}$
10000	$-\infty$
10001	$+\infty$
100000	$-\infty$
100001	$+\infty$
1000000	$-\infty$
1000001	$+\infty$

TABLE R.4. Quelques valeurs de $p_n(x)$ pour $x = 2$

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	1.0958692	1.0990222	$3.15301\,10^{-3}$	$2.74308\,10^{-3}$
11	1.0969202	1.0988470	$1.92684\,10^{-3}$	$1.69208\,10^{-3}$
20	1.0985859	1.0986145	$2.86408\,10^{-5}$	$2.64032\,10^{-5}$
21	1.0985954	1.0986137	$1.82260\,10^{-5}$	$1.68563\,10^{-5}$
30	1.0986120	1.0986123	$3.36458\,10^{-7}$	$3.17608\,10^{-7}$
31	1.0986121	1.0986123	$2.17295\,10^{-7}$	$2.05457\,10^{-7}$
40	1.0986123	1.0986123	$4.41160\,10^{-9}$	$4.21879\,10^{-9}$
41	1.0986123	1.0986123	$2.87103\,10^{-9}$	$2.74826\,10^{-9}$
50	1.0986123	1.0986123	$6.15029\,10^{-11}$	$5.92987\,10^{-11}$
51	1.0986123	1.0986123	$4.02135\,10^{-11}$	$3.87978\,10^{-11}$
60	1.0986123	1.0986123	$8.91731\,10^{-13}$	$8.64642\,10^{-13}$
61	1.0986123	1.0986123	$5.84865\,10^{-13}$	$5.67546\,10^{-13}$
70	1.0986123	1.0986123	$1.33227\,10^{-14}$	$1.31006\,10^{-14}$
71	1.0986123	1.0986123	$8.65973\,10^{-15}$	$8.65973\,10^{-15}$
80	1.0986123	1.0986123	$2.22045\,10^{-16}$	$2.22045\,10^{-16}$
81	1.0986123	1.0986123	$2.22045\,10^{-16}$	$2.22045\,10^{-16}$

TABLE R.5. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.116) pour $X = 3$

(c)

Enfin, voir les tableaux R.7 page 276 et R.8 page 277 pour $X = 2$. Les calculs ont été fait de façon symbolique, grâce à la fonction `approximation_ln.m` et convertis ensuite en numérique, pour plus de précision dans les calculs. Comme le prévoit la remarque R.12 page 269, les simulations utilisant la méthode 2b page 269 (voir tableau R.7) convergent beaucoup plus vite que celles utilisant la méthode 2a page 269 (voir tableau R.8).

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	-1.0990222	-1.0958692	$3.15301\,10^{-3}$	$2.74308\,10^{-3}$
11	-1.0988470	-1.0969202	$1.92684\,10^{-3}$	$1.69208\,10^{-3}$
20	-1.0986145	-1.0985859	$2.86408\,10^{-5}$	$2.64032\,10^{-5}$
21	-1.0986137	-1.0985954	$1.82260\,10^{-5}$	$1.68563\,10^{-5}$
30	-1.0986123	-1.0986120	$3.36458\,10^{-7}$	$3.17608\,10^{-7}$
31	-1.0986123	-1.0986121	$2.17295\,10^{-7}$	$2.05457\,10^{-7}$
40	-1.0986123	-1.0986123	$4.41160\,10^{-9}$	$4.21879\,10^{-9}$
41	-1.0986123	-1.0986123	$2.87103\,10^{-9}$	$2.74826\,10^{-9}$
50	-1.0986123	-1.0986123	$6.15029\,10^{-11}$	$5.92987\,10^{-11}$
51	-1.0986123	-1.0986123	$4.02135\,10^{-11}$	$3.87978\,10^{-11}$
60	-1.0986123	-1.0986123	$8.91731\,10^{-13}$	$8.64642\,10^{-13}$
61	-1.0986123	-1.0986123	$5.84865\,10^{-13}$	$5.67546\,10^{-13}$
70	-1.0986123	-1.0986123	$1.33227\,10^{-14}$	$1.31006\,10^{-14}$
71	-1.0986123	-1.0986123	$8.65973\,10^{-15}$	$8.65973\,10^{-15}$
80	-1.0986123	-1.0986123	$2.22045\,10^{-16}$	$2.22045\,10^{-16}$
81	-1.0986123	-1.0986123	$2.22045\,10^{-16}$	$2.22045\,10^{-16}$

TABLE R.6. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.116) pour $X = 1/3$.

R.5. Simulations numériques sur une majoration de $e\ln^2 2$

Dans la remarque 14.3 page 157 du corrigé de l'exercice 14.3 page 152, on a écrit qu'il n'était pas nécessaire de connaître les valeurs exactes de ln(2) et de e pour établir l'inégalité nécessaire :

$$\ln^2(2)e < 2, \tag{R.117}$$

cela, sans calculatrice, par un calcul manuel.

Puisque ln(2) et e sont strictement positifs, il suffit de trouver un majorant A de ln(2) et un majorant B de e tel que

$$A^2 B < 2. \tag{R.118}$$

Pour cela, il suffit d'exhiber un tel couple en utilisant les résultats des sections R.3 page 254 et R.4 page 261 en s'armant de courage ! On pourra, pour faciliter les calculs, s'aider des fonctions `approximation_exp.m` et `approximation_ln.m` disponibles sur le ouaib, en utilisant le calcul symbolique.

On pourra par exemple taper avec matlab

```
n=1;
[a,b]=approximation_ln(n,sym(2));
b01=(b(1))^2;
b02=(b(2))^2;
b0=minsym([b01,b02]);
[a1,b1]=approximation_exp(n,sym(1));
[a2,b2]=approximation_exp(n,-sym(1));
b1=b0*b1;
b2=b0/a2;
M=minsym([b1,b2]);
```

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	0.69306486	0.69315363	0.000088778	0.000082324409151658623581327807 39
11	0.69310925	0.69314994	0.000040690	0.000037935204606204078126782352 84
20	0.69314714	0.69314718	0.000000045413	0.000000043508916373144593618750 02
21	0.69314716	0.69314718	0.000000021674	0.000000020802385030138641237797 64
30	0.69314718	0.69314718	3.0043×10^{-11}	$2.9156213965212532721 24 \times 10^{-11}$
31	0.69314718	0.69314718	1.4552×10^{-11}	$1.4134882116575782469 23 \times 10^{-11}$
40	0.69314718	0.69314718	2.2183×10^{-14}	$2.167766099828288803 \times 10^{-14}$
41	0.69314718	0.69314718	1.0827×10^{-14}	$1.058626219617400708 \times 10^{-14}$
50	0.69314718	0.69314718	1.7415×10^{-17}	$1.709233711439502 \times 10^{-17}$
51	0.69314718	0.69314718	8.5402×10^{-18}	$8.38470554870752 \times 10^{-18}$
60	0.69314718	0.69314718	1.4219×10^{-20}	$1.399666432951 \times 10^{-20}$
61	0.69314718	0.69314718	6.9949×10^{-21}	$6.88714188698 \times 10^{-21}$
70	0.69314718	0.69314718	1.1930×10^{-23}	$1.176871126 \times 10^{-23}$
71	0.69314718	0.69314718	5.8822×10^{-24}	$5.80369051 \times 10^{-24}$
80	0.69314718	0.69314718	1.0212×10^{-26}	1.009047×10^{-26}
81	0.69314718	0.69314718	5.0438×10^{-27}	4.98442×10^{-27}

TABLE R.7. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.116) pour $X = 2$ pour la méthode 2b page 269.

ce qui fournit `M` le plus petit des majorants de l'expression A^2B (en utilisant les résultats des des sections R.3 page 254 et R.4 page 261) dont il suffit de vérifier numériquement, ce qui peut se faire à la main, qu'il vérifie (R.118).

On obtient numériquement en choisissant $n = 1$:

$$A^2B \leq \frac{99}{64} = 1.5468750 < 2,$$

ce qui permet de conclure.

Notons que pour $n = 40$, on obtiendrait, de façon numérique cette fois-ci :

$$\ln^2(2)e \approx 1.30600669716222958,$$

à comparer avec la valeure exacte (qui est bien inférieure à 2 !)

$$\ln^2(2)e \approx 1.30600669716222770.$$

n	g_n	h_n	$h_n - g_n$	η_n
10	0.64563492	0.73654401	0.090909	0.047512
11	0.65321068	0.73654401	0.083333	0.043397
20	0.66877140	0.71639045	0.047619	0.024376
21	0.67093591	0.71639045	0.045455	0.023243
30	0.67675814	0.70901620	0.032258	0.016389
31	0.67776620	0.70901620	0.031250	0.015869
40	0.68080338	0.70519363	0.024390	0.012344
41	0.68138410	0.70519363	0.023810	0.012047
50	0.68324716	0.70285500	0.019608	0.009900
51	0.68362423	0.70285500	0.019231	0.009708
60	0.68488328	0.70127672	0.016393	0.008264
61	0.68514769	0.70127672	0.016129	0.008130
70	0.68605534	0.70013985	0.014084	0.007092
71	0.68625096	0.70013985	0.013889	0.006993
80	0.68693624	0.69928192	0.012346	0.006211
81	0.68708680	0.69928192	0.012195	0.006135

TABLE R.8. Quelques valeurs de g_n, h_n, $h_n - g_n$ et η_n donné par (R.116) pour $X = 2$ pour la méthode 2a page 269.

Annexe S

Applications concrètes du logarithme

En cours de rédaction

S.1. Introduction et principes théoriques

Nous donnons la proposition suivante :

Proposition S.1. *Soit une fonction F, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ab) = F(a) + F(b), \tag{S.1a}$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = K \int_1^t \frac{du}{u}. \tag{S.1b}$$

Remarque S.2.

(1) Le sens (S.1b) $\Longrightarrow$ (S.1a) est le sens utilisé dans [Jan22].

(2) On peut affaiblir l'hypothèse de dérivabilité de F en 1 et la remplacer par la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Voir l'annexe T.

(3) (a) Si $K = 0$, $F = 0$, solution nulle de (S.1a).

(b) Sinon on définit $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $K = 1/\ln b$ et on a

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = \frac{1}{\ln b} \int_1^t \frac{du}{u}. \tag{S.2}$$

On retrouve donc la définition de $\log b$, qui est la seule solution non nulle de (S.1a).

Démonstration de la proposition S.1.

(1) Sens (S.1a) $\Longrightarrow$ (S.1b)

Remarquons tout d'abord que si l'on applique (S.1a) à $a = b = 1$, on obtient :

$$F(1) = 2F(1) + F(1),$$

et donc

$$F(1) = 0. \tag{S.3}$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \neq 0$, assez petit, tel que $h/t > 0$ et $t + h > 0$. On a successivement, grâce à (S.1a)

$$\begin{aligned}
\frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \frac{F\left(t\left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) - F(t)}{h}, \\
&= \frac{F(t) + F\left(1 + \frac{h}{t}\right) - F(t)}{h}, \\
&= \frac{F\left(1 + \frac{h}{t}\right)}{h}, \\
&= \frac{1}{t} \frac{F\left(1 + \frac{h}{t}\right)}{\frac{h}{t}},
\end{aligned}$$

en utilisant (S.3) et en posant $u = h/t > 0$:

$$= \frac{1}{t}\frac{F(1+u) - F(1)}{u}.$$

D'après l'hypothèse sur F

$$\lim_{u\to 0} \frac{F(1+u) - F(1)}{u} = F'(1).$$

Ainsi, en posant $K = F'(1) \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{K}{t}.$$

Ainsi, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(t) = \frac{K}{t}. \tag{S.4}$$

De (S.3) et (S.4), on déduit (S.1b) (Voir par exemple [DB22, Annexe "La primitive est l'opération inverse de la dérivation (sous forme d'exercice)"]).

(2) Sens (S.1b) $\Longrightarrow$ (S.1a)

Réciproquement, considérons F définie par (S.1b).

Nous proposons deux preuves.

(a) Remarquons que tout d'abord que pour tout $b > 0$, on a successivment, en faisant le changement de variable $v = u/b$ (à b constant) dans l'intégrale, qui implique $u = bv$ et donc $du = bdv$:

$$\begin{aligned} F(b) &= K\int_1^b \frac{du}{u}, \\ &= K\int_{1/b}^1 \frac{bdv}{bv}, \\ &= -K\int_1^{1/b} \frac{dv}{v}, \\ &= -F\left(\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F\left(\frac{1}{b}\right) = -F(b). \tag{S.5}$$

De même, on écrit en faisant le changement de variable $v = u/b$ (à b constant)

$$\begin{aligned} F(ab) &= \int_1^{ab} \frac{du}{u}, \\ &= K \int_{1/b}^{a} \frac{bdv}{bv}, \\ &= K \int_{1/b}^{a} \frac{du}{u}, \\ &= K \left(\int_{1/b}^{1} \frac{du}{u} + \int_1^a \frac{du}{u} \right), \\ &= K \left(-\int_1^{1/b} \frac{du}{u} + \int_1^a \frac{du}{u} \right), \\ &= K \left(-F\left(\frac{1}{b}\right) + F(a) \right), \end{aligned}$$

et d'après (S.5) :

$$= F(a) + F(b).$$

(b) Plus rapidement, si (S.1b), est vrai, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{K}{x}. \tag{S.6}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Définissons la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = F(ax) - F(x). \tag{S.7}$$

D'après (S.6), on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= aF'(ax) - F'(x), \\ &= K \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc, il existe une constante K_a (qui dépend de a *a priori*) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = K_a. \tag{S.8}$$

Pour $x = 1$, on déduit donc de (S.7) que

$$K_a = f(1) = F(a) - F(1).$$

D'après (S.1b), $F(1) = 0$ et donc $K_a = F(a)$. Ainsi, d'après (S.7) et (S.8),

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(a) = F(ax) - F(x),$$

et donc, finalement

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ax) = F(a) + F(x).$$

□

Remarque S.3. Si l'on considère désormais (S.1) (avec $K = 1$) comme définition du logarithme, on a donc la définition suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(t) = \int_1^t \frac{du}{u}. \tag{S.9}$$

La question se pose de montrer tous les résultats des chapitres 14 page 112 et 15 page 113, puisque les définitions (certes équivalentes) ne sont plus les mêmes. Voir l'exercice de TD 14.9.

S.2. Règle à calcul

S.3. Diagrammes log-log

S.3.1. Représentation de données

S.3.2. Identification de paramètres

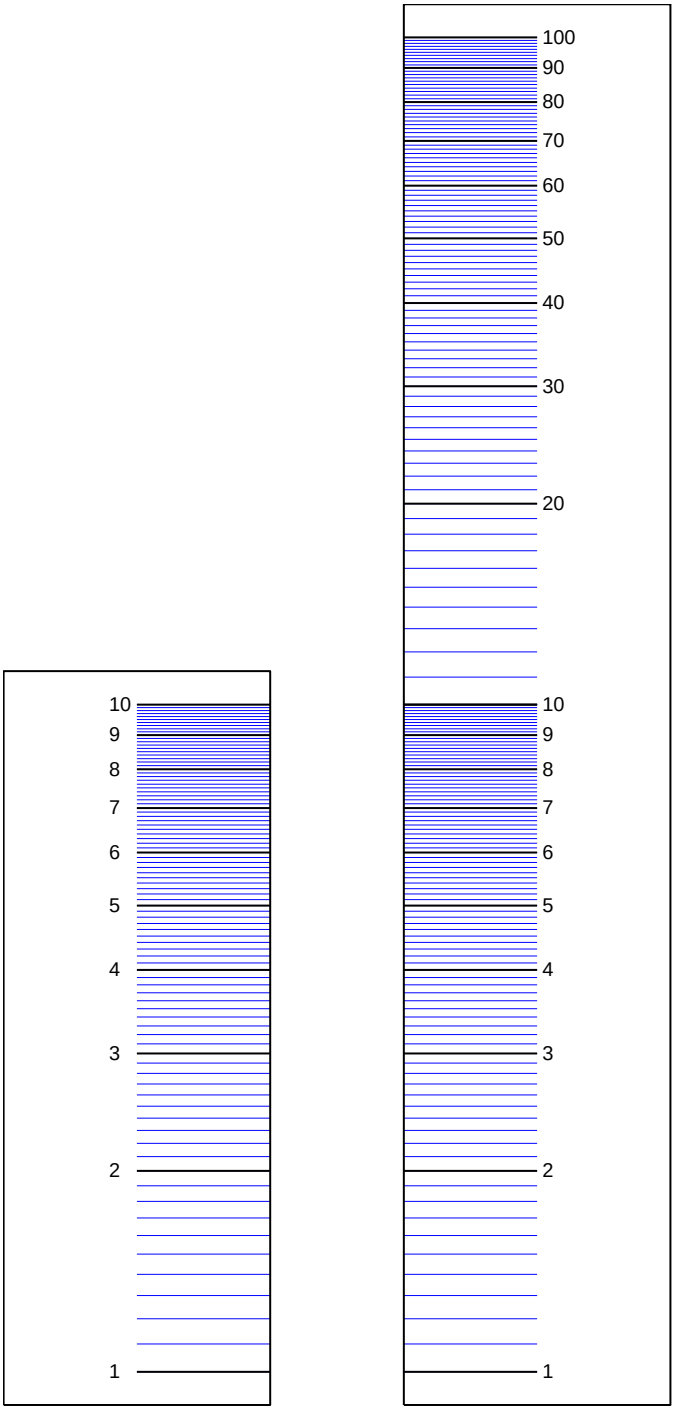


FIGURE S.1. Les deux axes gradués d'une règles à calcul (mobiles l'un par rapport à l'autre).

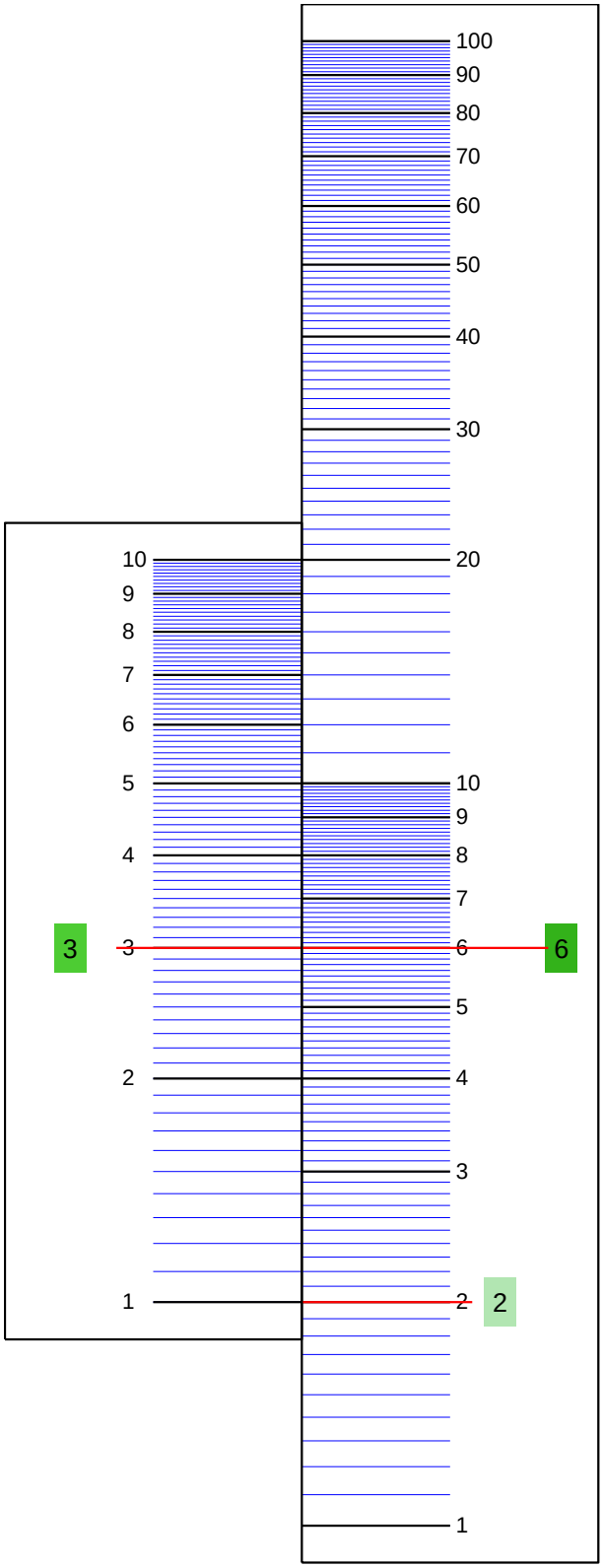


FIGURE S.2. Les deux axes gradués d'une règles à calcul et exemple de la multiplication de 2 par 3.

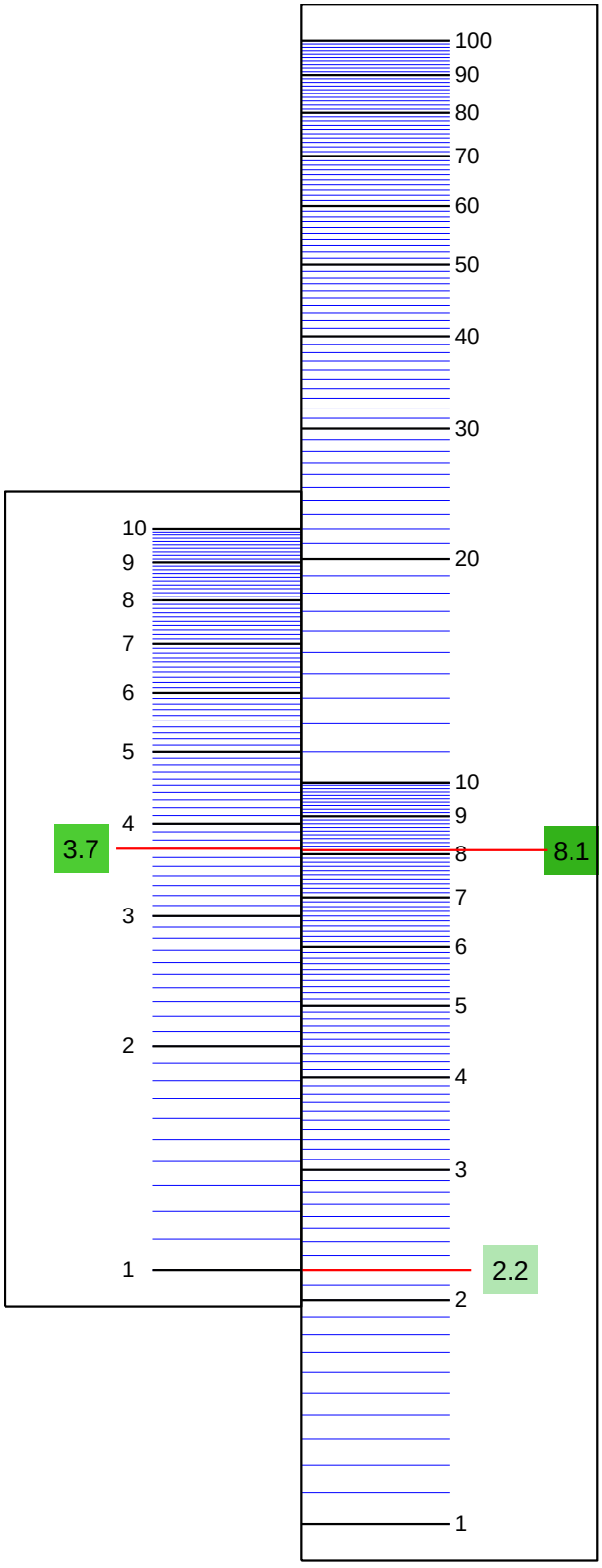


FIGURE S.3. Les deux axes gradués d'une règles à calcul et exemple de la multiplication de 2,2 par 3,7.

Annexe T

Deux équations fonctionnelles (redéfinition de l'exponentielle et du logarithme

En cours de rédaction

T.1. Introduction

Bibliographie

[Bas11a] J. Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.* Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT25. 2011. 180 pages.

[Bas11b] J. Bastien. *Mathématiques : Applications.* Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2011. 158 pages.

[Bas12] J. Bastien. *Introduction à la statistisque descriptive.* Notes de cours de statistiques du M1 APA de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique M1 APA. 2012. 127 pages.

[Bas14] J. Bastien. *Savoir se méfier des ordinateurs et de la science.* Transparents de l'UE Zététique de l'INSA de Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/INSA/index.html`. 2014. 38 pages.

[Bas18] J. Bastien. *Biomécanique du mouvement.* Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca. 2018. 93 pages.

[Bas21a] J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2021. 23 pages.

[Bas21b] J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2021. 91 pages.

[Bas22a] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[Bas22b] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.* Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 269 pages.

[Bas24a] J. Bastien. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios.* Transparents de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2024. 106 pages.

[Bas24b] J. Bastien. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios.* Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2024. 7 pages.

[Bas24c] J. Bastien. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2024. 6 pages.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[Car84] J.-C. Carrega. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4e étage). Paris : Hermann, 1984.

[Cia82] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Paris : Masson, 1982, pages xii+279.

[CN03] T. Clopeau et D. Naima. *Pré-recquis mathématiques. Notes de cours.* Polytech Lyon, 2003.

[DB21] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2021. 288 pages.

[DB22] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 326 pages.

[Jan22] C. Jan. *Cours de Mathématiques Supérieures.* Lycée du Parc. 2022.

[Lim] A. d. Limoge. "Ressources pour le lycée". disponible sur `http://pedagogie.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/ressources_pour_le_lycee.pdf`.

[Mon90] J.-M. Monier. *Analyse, tome 1 (mathématiques supérieures).* Dunod, 1990.

[RDO87] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 4. Séries et équations différentielles.* 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 RAM, 4e étage). Paris : Masson, 1987, pages VIII+314.

[RDO88] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse*. 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.

[RDO93] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4e étage). Masson, Paris, 1993, pages viii+440.

[Rid17] F. Ridde. *Cours de Mathématiques Supérieures*. Lycée du Parc. 2017.

[Sch01] M. Schatzmann. *Analyse numérique, une approche mathématique, Cours et exercices*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.07 SCH, 4e étage). Dunod, 2001.

[Vél03] J. Vélu. *Mathématiques générales : cours et exercices corrigés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 VEL, 4e étage). Paris : Dunod, 2003.