Mécanique 3A MNB | Automne 2019

Examen du 22 Janvier 2020

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques de base

Exercice 1.
On considère l'équation non linéaire

$$f(x) = \ln(x) - 2x + \frac{5}{2} = 0$$

sur l'intervalle $I = [1, 2]$.

(1) Montrer qu'il existe un zéro r pour la fonction $f(x)$ dans $[1, 2]$ et qu'il est unique.

(2) On se propose d'approcher ce zéro par la méthode de Newton. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ? Justifier votre réponse.

(3) Calculer les deux premiers itérés, x_1 et x_2, générés par cette méthode, en choisissant vous même le point d'initialisation x_0.

(4) Montrer qu'il existe une constante C, que vous définirez, telle que pour $x_0 \in [1, 2]$, point d'initialisation choisi, on ait

$$|x_{k+1} - r| \leq C\, |x_k - r|^2\,, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Sachant qu'on peut montrer que $C < 1/2$, en déduire une estimation de l'erreur qui est commise en arrêtant les itérations à x_4, dans le cas où on choisirait $x_0 = 3/2$.

Exercice 2.
On considère la formule de quadrature suivante pour approcher l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt$,

$$I(g) = \frac{2}{3}\left[2g\left(-\frac{1}{2}\right) - g(0) + 2g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

(1) Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

(2) Utiliser cette formule de quadrature pour approcher l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx$.

(3) Utiliser maintenant cette formule de quadrature pour approcher l'intégrale $\int_1^3 x\ln(x)dx$ (on pourra pour cela faire un changement de variable dans l'intégrale).

(4) On a appliqué la formule de quadrature composite, I_h, associée à la formule I introduite ici, pour approcher l'intégrale $\int_1^3 x\ln(x)dx$. Le tableau suivant montre l'erreur commise pour différentes valeurs de h, longueur de chaque sous-intervalle :

I_h	erreur
$h = 1$	2.284218×10^{-4}
$h = 0.5$	1.439331×10^{-5}
$h = 0.25$	9.033080×10^{-7}

Déduire de façon approximative l'ordre de convergence $q \in \mathbb{N}$ de cette formule composite.

Exercice 3.

(1) Application du schéma d'Euler progressif (ou explicite) à une équation différentielle d'ordre 1 : On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = -e^t y^2(t), \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

(a) Appliquer le schéma d'Euler progressif pour calculer une approximation de $y(0.2)$ en prenant un pas de discrétisation $h = 0.1$.

(b) Quel est l'ordre de ce schéma d'Euler progressif ? Peut-on choisir n'importe quelle valeur de h ? Justifier votre réponse.

(2) Application du schéma d'Euler progressif à une équation différentielle d'ordre 2 : On considère maintenant l'équation différentielle d'ordre 2 suivante

$$Mz''(t) + Bz'(t)\left|z'(t)\right| + kz(t) = 0, \qquad z(0) = 0, z'(0) = 1,$$

avec $M = 10$, $B = 50$, $k = 200$.

(a) Écrire le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre équivalent à l'équation ci-dessus.

(b) Appliquer le schéma d'Euler progressif pour calculer une approximation de $z(0.1)$ en prenant un pas de discrétisation $h = 0.1$.

Exercice 4.

Soit le système linéaire suivant : $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 8 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(1) Transformer ce système en un système triangulaire en utilisant une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global.

(2) En déduire la solution x du système $Ax = b$ en utilisant un algorithme de remontée ou de descente.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`