Mécanique 3A MNB | Automne 2014

Corrigé de l'examen de TD du 14 Janvier 2015

On pourra aussi consulter la fonction matlab qui a permis de calculer tous les éléments de ce corrigé, `examTDMNBA14.m`, présente sur le site à l'Url habituelle : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`
Pour avoir la correction du sujet *de votre groupe de TD*, vous taperez sous matlab :

examTDMNBA14 (1)

Correction de l'exercice 1.

(1) On calcule les différences divisées $f[a]$, $f[a,c]$ et $f[a,c,b]$ et on obtient

$$f[a] = f(a),$$
$$f[a,c] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$
$$f[a,c,b] = \left(\frac{f(c) - f(b)}{1/2\,a - 1/2\,b} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)(-1/2\,a + 1/2\,b)^{-1}.$$

On obtient alors les polynômes p_1 et p_2 donnés par

$$p_1(t) = \frac{(t-a)(f(b) - f(a))}{b-a} + f(a), \tag{1a}$$

$$p_2(t) = (t-a)\left((t-b)\left(\frac{f(c) - f(b)}{1/2\,a - 1/2\,b} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)(-1/2\,a + 1/2\,b)^{-1} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right) + f(a). \tag{1b}$$

(2) On intègre alors le polynôme p_1 sur $[a,b]$ et on obtient

$$\int_a^b p_1(t)dt = -1/2\,f(a)\,a - 1/2\,f(b)\,a + 1/2\,f(a)\,b + 1/2\,f(b)\,b,$$

soit encore en simplifiant

$$\int_a^b p_1(t)dt = (b-a)\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right),$$

qui constitue la formule d'intégration numérique du trapèze.

(3) On pose $h = (B-A)/N$ et pour $i \in \{0, ..., N\}$, $x_i = A + hi$. La formule d'intégration composite du trapèze sur l'intervalle $[A,B]$ où $A = 1$ et $B = 2$ avec N sous-intervalle est donnée par

$$I \approx \frac{h}{2}\big(F(A) + F(B)\big) + h\sum_{i=1}^{N-1} F(x_i),$$

(4) On obtient numériquement

$$I \approx 0.06766936.$$

La valeur exacte est donnée par

$$I = -\sin(1) + \sin(2) = 0.06782644, \tag{2}$$

qui correspond à une erreur égale à

$$E_r = 1.571\,10^{-4}, \tag{3}$$

(5) L'erreur d'intégration était rappelée en fin d'énoncé :

$$E = -h^2 \frac{B-A}{12} F''(\eta),$$

dont on majore la valeur absolue par

$$\widetilde{E} = Kh^\alpha (B-A) \sup_{t\in[A,B]} \left|F^{(\alpha)}(t)\right| = \frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^\alpha} \sup_{t\in[A,b]} \left|F^{(\alpha)}(t)\right|$$

où

$$K = \frac{1}{12}, \quad \alpha = 2.$$

Pour avoir une erreur inférieur à ε, il suffit donc que

$$\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^\alpha} \sup_{t\in[A,B]} \left|f^{(\alpha)}(t)\right| \leq \varepsilon$$

Vue la forme de F, toutes les dérivées de F sont majorées par 1 et il suffit donc que

$$\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^\alpha} \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$N \geq \sqrt[\alpha]{\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{\varepsilon}},$$

soit numériquement

$$N = 3.$$

Correction de l'exercice 2.

(1) On procède comme dans l'exercice de TD 2.3. On renvoie aussi à [BM03, Correction de l'exercice 3.2 p. 119 et 260, et TP 2.F p. 67].

On sait que les formules des différences divisées se généralisent quand des points d'interpolation se confondent avec des formules de récurrence identiques à celle du cadre du cours et des expressions en fonction de la dérivée de la fonction quand des points sont doubles.

Pour passer du polynôme d'interpolation aux points d'abscisses a, a et b, on utilise, p_1, le polynôme d'interpolation aux points d'abscisses a et b, déjà déterminé en exercice 1, auquel on rajoute le polynôme $f[a,b,a](x-a)(x-b)$.

On a, par ailleurs,

$$f[a,b,a] = f[a,a,b] = \frac{f[a,b]-f[a,a]}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\right).$$

On a donc

$$f[a,b,a] = \frac{1}{b-a}\left(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\right). \tag{4}$$

et on obtient alors le polynôme p_2 donné par

$$p_2(t) = p_1(t) + f[a,b,a](x-a)(x-b) \tag{5}$$

où $f[a,b,a]$est donné par (4) et p_1 est donné par (1).

(2) On sait que p_2 et f coïncident en valeur et en dérivée là où les points d'interpolation se dédoublent, c'est-à-dire en a. Avec un peu de courage, on peut déterminer à la main les résultats suivants

$$\begin{aligned} f(a) &= p_2(a) = f\,(a)\,, \\ f(b) &= p_2(b) = f\,(b)\,, \\ f'(a) &= p_2'(a) = \frac{d}{da} f\,(a)\,. \end{aligned}$$

(3) Compte tenu de (5) et des résultats obtenus dans l'exercice 1, on a

$$\int_a^b p_2(t)dt = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + f[a,b,a]\int_a^b (t-a)(t-b)dt,$$

ce qui fait apparaître une formule d'intégration numérique modifiée par rapport à celle de du trapèze. On a

$$\begin{aligned} f[a,b,a]\int_a^b (t-a)(t-b)dt &= \left(-\frac{-f\left(b\right)+f\left(a\right)-\left(\frac{d}{da}f\left(a\right)\right)a+\left(\frac{d}{da}f\left(a\right)\right)b}{\left(a-b\right)^2}\right)\left(-1/6\,b^3+1/6\,a^3+1/2\,ab^2-1/2\,ba^2\right), \\ &= \left(-1/6\,\left(a-b\right)\left(-f\left(b\right)+f\left(a\right)-\left(\frac{d}{da}f\left(a\right)\right)a+\left(\frac{d}{da}f\left(a\right)\right)b\right)\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^b p_2(t)dt = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + \frac{1}{6}(a-b)(f(b)-f(a)+af'(a)-bf'(a))$$

et donc après simplification

$$\int_a^b p_2(t)dt = \frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{6}f'(a)$$

(4) En sommant la formule sur les N sous-intervalles $[a,b]$ successivement égaux à $[x_i, x_{i+1}]$, pour $0 \leq i \leq N-1$, on obtient

$$I \approx \frac{2}{3}hF(A) + \frac{1}{3}hF(B) + h\sum_{i=1}^{N-1} F\left(x_i\right) + \frac{h^2}{6}\sum_{i=0}^{N-1} F'\left(x_i\right)$$

Si on applique cela pour approcher $\int_A^B F(t)dt$ où $A=1$, $B=2$ et $F(t)=\cos(t)$, on obtient numériquement

$$I \approx 0.06788790.$$

La valeur exacte est donnée par (2) et cela correspond donc à une erreur égale à

$$E_r = 6.145\,10^{-5}, \tag{6}$$

qui est plus faible que (3), ce qui semble normal, puisque l'on a ajouté un point d'intégration ! Cependant, il n'est pas évident que le rajout d'un point fasse grandir l'ordre de convergence d'une méthode d'intégration numérique, comme le montre le passage de la méthode du milieu à celle du trapèze ! Pour étudier correctement l'ordre de cette formule, il faut procéder en utilisant par exemple [BM03, Corollaire 3.4 et sections 3.2.1 et 3.2.2]. On peut aussi tracer un graphe log-log pour mesurer empiriquement la pente et en déduire l'ordre.

Voir la figure 1 page suivante. Par le calcul de la pente, on obtient un ordre égal à 3.00014, qui est bien strictement plus grand que l'ordre de la méthode des trapèzes (2) !

Pour montrer rigoureusement cet ordre 3, procédons comme dans [BM03, Corollaire 3.4 et sections 3.2.1 et 3.2.2].

On écrit que l'erreur d'intégration de la formule d'intégration élémentaire est égale à

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b F(a,b,a,t)(t-a)(t-b)(t-a)dt, \\ &= \int_a^b F(a,a,b,t)(t-a)^2(t-b)dt, \end{aligned}$$

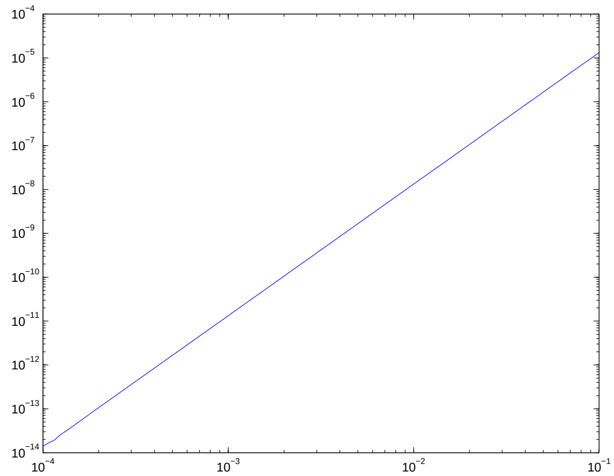

FIGURE 1. Le graphe log log pour l'estimation de l'ordre de la méthode des trapèzes modifiée.

et d'après [BM03, Corollaire 3.4], puisque $(t-a)^2(t-b)$ est de signe constant sur $[a,b]$

$$= \frac{F^3(\eta)}{3!}\int_a^b (t-a)^2(t-b)dt,$$

où $\eta \in]a,b[$. L'intégrale qui reste est déterminée par intégration par partie, comme dans [BM03, Correction de l'exercice 3.2 p. 260-261]

$$= -\frac{1}{6\times 3}F^3(\eta)\int_a^b (t-a)^3 dt,$$

$$= -\frac{1}{72}F^3(\eta)(b-a)^4$$

Donc,

$$E = -\frac{1}{72}F^3(\eta)(b-a)^4$$

Enfin, l'erreur d'intégration de la méthode composite se calcule grâce à cette formule et [BM03, lemme 3.25 p. 92] :

$$E = -\frac{1}{72}F^3(\eta)(B-A)h^3,$$

où $\eta \in [A,B]$ et l'ordre 3 est obtenu !

Références

[BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.