Informatique 3A MNBif | Automne 2015

# Examen du 28 Janvier 2016

Durée : 2 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐
*Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐
*calculatrices scientifiques de base*

**Exercice 1.**
On considère la méthode point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ où

$$g(x) = \frac{3\,x}{8} + \frac{3\,A}{4\,x} - \frac{A^2}{8\,x^3}. \tag{1}$$

et $A$ est un réel strictement positif.

(1) Montrer qu'en $x^* = \sqrt{A}$, on a

$$g(x^*) = x^*, \quad g'(x^*) = 0, \quad g''(x^*) = 0. \tag{2}$$

(2) Que peut-on en déduire sur l'ordre de convergence de la méthode de point fixe étudiée ?

(3) Que faudrait-il calculer pour montrer que l'ordre de la méthode n'est pas strictement supérieur à 3 ?

(4) (a)

On donne dans le tableau 1 page suivante les résultats donnés par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - A$ ainsi que pour la méthode étudiée, dans le cas où $x_0 = 10.0$. Commentez ce tableau. Est-ce vraiment pertinent d'avoir une méthode d'ordre 3 au lieu de la méthode de Newton d'ordre 2 ?

(b)

Dans le tableau 2 page suivante, les résultats correspondent au choix de $x_0 = 0.5$. Est-ce que la méthode d'ordre 3 est intéressante ici ? Conclure.

**Exercice 2.**
On s'intéresse dans cet exercice à une approximation de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \cos\left(x^2\right)\, dx$

| $n$ | $x_n$ (Newton) | $x_n$ (Point fixe) |
|---|---|---|
| 0 | 10.000000000000000 | 10.000000000000000 |
| 1 | 5.450000000000000 | 4.414874999999999 |
| 2 | 3.550688073394496 | 3.066837267573971 |
| 3 | 3.042704026361998 | 3.000015785993758 |
| 4 | 3.000299673226795 | 3.000000000000000 |
| 5 | 3.000000014965846 | 3.000000000000000 |
| 6 | 3.000000000000000 | 3.000000000000000 |

Table 1. Itérations des la méthode de Newton et du point fixe défini par $g$

| $n$ | $x_n$ (Newton) | $x_n$ (Point fixe) |
|---|---|---|
| 0 | 0.500000000000000 | 0.500000000000000 |
| 1 | 9.250000000000000 | −67.312500000000000 |
| 2 | 5.111486486486487 | −25.342432853841665 |
| 3 | 3.436113368821565 | −9.769141931762647 |
| 4 | 3.027675872424740 | −4.343519490841783 |
| 5 | 3.000126492059709 | −3.059301442179473 |
| 6 | 3.000000002666595 | −3.000011086935536 |
| 7 | 3.000000000000000 | −3.000000000000000 |

Table 2. Itérations des la méthode de Newton et du point fixe défini par $g$

(1) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode du rectangle composite (à gauche [1]) sur 8 sous-intervalles.

(2) Majorer l'erreur commise. On rappelle que pour la méthode étudiée, celle-ci vaut

$$E = \frac{1}{2}h(B-A)f'(\eta).$$

où $[A, B]$ est l'intervalle d'intégration et $h$ le pas des sous-intervalles.

(3) Puisque l'on ne connait pas la valeur exacte, on pose, pour $h$ le pas considéré :

$$\varepsilon(h) = |I_{\mathrm{a}}(h) - I_{\mathrm{a}}(h/2)|$$

où $I_{\mathrm{a}}(h)$ et $I_{\mathrm{a}}(h/2)$ sont les approximations par la méthode des rectangles composites de l'intégrale $I$ correspondant respectivement aux pas $h$ et $h/2$.

1. la méthode des rectangles élémentaire à gauche sur un intervalle $[a, b]$ est rappelée :

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a).$$

(a) Montrer que
$$\varepsilon(h) \approx M h^{\alpha}, \tag{3}$$
où $M$ est une constante et $\alpha$ est l'ordre de la méthode.

(b) Quelle est la valeur de $\alpha$ ?

(c)

| $\log_{10}(h)$ | $\log_{10}(\varepsilon(h))$ |
|---|---|
| $-1.00000$ | $-1.48417$ |
| $-2.00000$ | $-2.52081$ |
| $-3.00000$ | $-3.52465$ |
| $-4.00000$ | $-4.52503$ |
| $-5.00000$ | $-5.52507$ |

TABLE 3. Valeurs des logarithmes en base 10 de $h$ et de $\varepsilon(h)$

Montrer en utilisant le tableau 3 et en faisant un graphique adéquat que l'on peut retrouver expérimentalement la veleur de $\alpha$.

**Exercice 3.**
On considère maintenant l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :
$$y'' + 5.y'.|y'| + 20.y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(1) Écrire le système d'équations ordinaires du premier ordre équivalent à l'équation ci-dessus.

(2) Appliquer le schéma d'Euler progressif pour calculer une approximation de $y(0.2)$ en prenant un pas de discrétisation $h = 0.1$.

(3) Quel esty l'odre de ce schéma d'Euler progressif ?

(4) Si on prenait maintenant $h = 0.5$ et qu'on recalculait une approximation de $y(0.2)$, quel serait le rapport entre l'erreur qui serait commise et l'erreur commise dans le calcul avec $h = 0.1$ ?

(5) peut-on choisir n'importe quelle valeur de $h$ ? Justifier votre réponse.

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`