Informatique 3A MNBif — Automne 2015

Examen de TD du 10 Novembre 2015

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

n	x_n
0	20.000000000000000
1	7.873437500000001
2	3.879498587472647
3	3.173967982562518
4	3.162277739390106
5	3.162277660168379
6	3.162277660168380

Table 1. Valeurs des x_n

Une méthode numérique de point fixe définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ a donné les résultats donnés dans le tableau 1. On suppose que la méthode converge vers un point fixe x^* de g.

(1) Rappeler la définition de l'ordre de convergence d'une méthode numériquede point fixe.

(2) Sans faire le calcul complet, expliquer en quelques lignes, pourquoi la nullité de $g'(x^*)$ et de $g''(x^*)$ implique le fait que la méthode est d'ordre au moins 3.

(3) Que faudrait-il vérifier pour que la méthode soit d'ordre exactement 3 ?

(4) Est-ce que la méthode proposée vous semble quadratique ou cubique ?

(5)

On donne dans le tableau 2 page suivante le logarithme des erreurs $e_n = \log_{10}(|x_n - x^*|)$. En traçant le graphique $(e_n, e_{n+1})_{n\in\{1,2,3\}}$, proposer une estimation empirique de l'ordre de la méthode de point fixe.

n	$\log_{10}(\lvert x_n - x^*\rvert)$
0	1.22628
1	0.67313
2	-0.14435
3	-1.93217
4	-7.10116
5	-15.35253

Table 2. Logarithmes des erreurs

Exercice 2.
On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 7$:

$$f(x_0) = 2, \quad f(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 2.$$

(1) Construire le polynôme d'interpolation de degré 2, interpolant la fonction f aux nœuds x_0, x_1 et x_2.

(2) Pour $\alpha = 3.2$, donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Exercice 3.
On recherche l'approximation de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \cos(x)\, dx$. par une méthode d'intégration composite.

(1) Calculer la valeur exacte de I.

(2)

Pour différentes valeurs du pas h, on a calculé les erreurs d'intégration commises $\varepsilon(h) = |I - I_{\mathrm{a}}(h)|$ où $I_{\mathrm{a}}(h)$ est l'approximation de l'intégrale I.

Sur la figure 1 page ci-contre, le graphique représente un nuage de points ou chaque point a pour abscisse $\log_{10}(h)$ et pour ordonnée $\log_{10}(\varepsilon(h))$. Déduire de ce graphique, l'ordre de la méthode d'intégration. Justifiez-le !

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

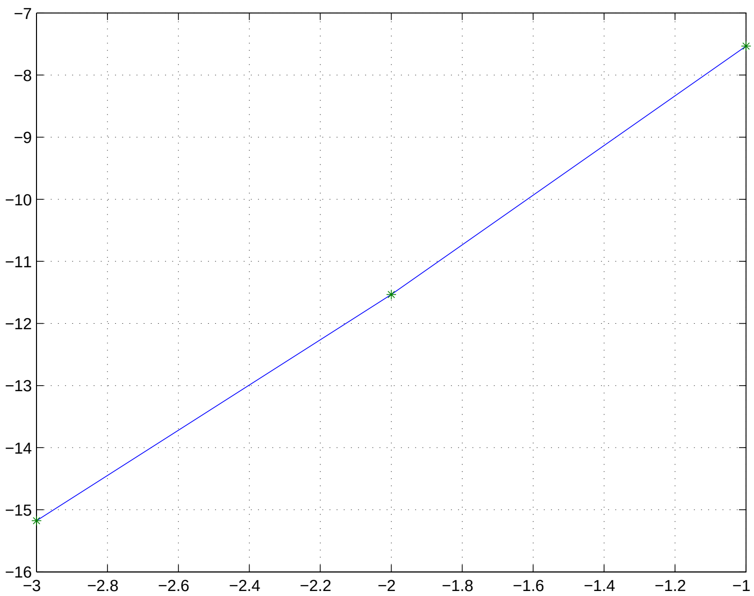

FIGURE 1. Graphique de l'erreur.