Informatique 3A MNBif — Automne 2015

Corrigé de l'examen du 28 Janvier 2016

Correction de l'exercice 1.
On renvoie aussi à la correction de l'exercice de TD 1.4 et à l'exercice 1 de l'examen de TD (2015), ainsi qu'à l'exercice 4.6 p. 174 et son corrigé p.304 de [BM03].

(1) On vérifie aisément qu'en $x^* = \sqrt{A}$, on a

$$g(x^*) = x^*, \quad g'(x^*) = 0, \quad g''(x^*) = 0. \tag{1}$$

(2) On en déduit que la méthode de convergence de la méthode de point fixe étudiée est au moins cubique.

(3) Il faudrait calculer $g'''(x^*)$ et montrer que cette quantité n'est pas nulle, ce qui montrerait que l'ordre de la méthode exactement 3. On peut montrer que cette dérivée vaut $3/A > 0$.

(4) (a)

On constate dans le tableau de l'énoncé que la méthode étudiée ici converge en effet plus vite que la méthode de Newton. Cependant, le gain n'est pas énormé, vu la rapidité déjà extrême de celle de Newton.

(b)

On constate dans le tableau de l'énoncé que la méthode étudiée converge ici vers $-\sqrt{A}$, contrairement à la méthode de Newton, qui tend, dans ce cas, encore vers $\sqrt{A}$. On peut montrer, que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la méthode de newton appliquée à $f(x) = x^2 - A$ est convergente vers $\sqrt{A}$. Voir par exemple [BM03, Exercice 4.4]. Finalement, compte tenu de cela et de ce qui précède, on préfère la méthode de Newton, qui converge pour tout x_0.

Correction de l'exercice 2.

(1) L'approximation de l'intégrale I en appliquant la méthode du rectangle composite (à gauche) sur 8 sous-intervalles est donnée par

$$I \approx -0.362297.$$

(2) On majore l'erreur commise : On rappelle que pour la méthode étudiée, celle-ci vaut

$$E = \frac{1}{2} h (B - A) f'(\eta). \tag{2}$$

de façon habituelle par

$$|E| \leq \frac{1}{2} h (B - A) \max_{x \in [A,B]} |f'(x)| .$$

Ici, on a

$$f'(x) = -2\, x \sin\left(x^2\right),$$

que l'on majore par

$$f'(x) = 2x \leq 2B$$

Bref, on a

$$|E| \leq \frac{1}{2} h (B - A) \times (2B) = hB(B - A)$$

soit numériquement

$$|E| \leq 2.000000\, h,$$

soit encore

$$|E| \leq 0.250000.$$

(3) (a) On peut réécrire (2) sous la forme

$$E \approx Q h^{\alpha},$$

où

$$\alpha = 1. \tag{3}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) &= \left|I_{\mathrm{a}}(h) - I_{\mathrm{a}}(h/2)\right|, \\
&\approx \left|(I - I_{\mathrm{a}}(h)) - (I - I_{\mathrm{a}}(h/2))\right|, \\
&\approx \left|(I - I_{\mathrm{a}}(h))\right| + \left|(I - I_{\mathrm{a}}(h/2))\right|, \\
&\approx Q h^{\alpha} + Q\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha}, \\
&\approx Q h^{\alpha}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

ce qui se met bien sous la forme

$$\varepsilon(h) \approx M h^{\alpha}, \tag{4}$$

où M est une constante et α est l'ordre de la méthode.

(b) D'après (3), on a $\alpha = 1$.

(c)

De (4), on tire

$$\log_{10}(\varepsilon(h)) \approx \alpha \log_{10}(h) + \log_{10}(M). \tag{5}$$

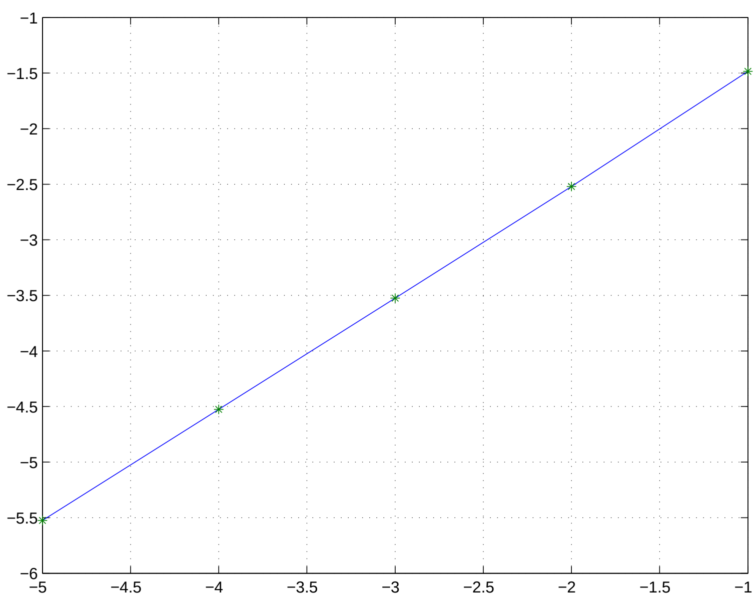

Figure 1. Graphique de l'erreur.

Grâce au tableau de l'énoncé, on peut donc faire le graphique de la figure 1 page ci-contre et par une mesure de pente, obtenir

$$\alpha = 1.008602 \approx 1$$

ce qui confirme (3).

Correction de l'exercice 3.
On considère maintenant l'équation différentielle d'ordre 2

$$y'' + 5.y'.|y'| + 20.y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(1) On pose les variables intermédiaires

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$$

Le système d'ordre 1 s'écrit alors

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -5y_2|y_2| - 20y_1 \end{cases}$$

(2) Soit $u_{1,n} = y_1(t_n)$ et $u_{2,n} = y_2(t_n)$

On a $t_0 = 0, u_{1,0} = 0$, $u_{2,0} = 1$, $f_1(t, u_1, u_2) = u_2$, $f_2(t, u_1, u_2) = -5u_2|u_2| - 20u_1$, et $h = 0.1$. On cherche alors $u_{1,2}$ approximation de $y(0.2)$ par Euler progressif :

– Itération 1 :

$$\begin{cases} u_{1,1} = u_{1,0} + hf_1(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0.1 \\ u_{2,1} = u_{2,0} + hf_2(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0.5 \end{cases}$$

– Itération 2 :

$$u_{1,2} = u_{1,1} + hf_1(t_0, u_{1,1}, u_{2,1}) = 0.15$$

On a donc $y(0.2) \approx 0.15$.

(3) Le schéma d'Euler progressif est d'ordre 1.

(4) On divise $h = 0.1$ par 2 pour arriver à 0.05. Le schéma étant d'ordre 1, l'erreur est aussi divisée par 2.

(5) On ne peut pas choisir n'importe quelle valeur de h : Euler progressif est stable à condition de bien choisir la valeur du pas h.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.