Informatiquee 3A MNBif — Automne 2016

Corrigé de l'examen de TD du 15 Novembre 2016

Correction de l'exercice 1.

(1) On vérifie que

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = -e^{-x}. \tag{1}$$

Ainsi, pour tout x dans I, on a

$$|g'(x)| = e^{-x} \leq e^{-0.1} \approx 0.90484.$$

ce qui permet donc d'écrire :

$$\exists k \in [0,1[, \quad \forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k, \tag{2}$$

où

$$k \approx 0.90484 \tag{3}$$

(2) (a) On admet que I est stable par g.

(b) On rappelle que l'on a montré (2).

Les deux hypothèses du théorème [1] B.1 ou B.2 de l'annexe B du corrigé de TD permettent donc d'affirmer d'une part que g a un unique point fixe α dans I et que toute suite définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α. De plus, on rappelle l'inégalité (B.3) de cette même annexe :

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|, \tag{4}$$

Cette inégalité n'est pas exploitable en l'état car on n'a pas d'encadrement sur $|x_0 - \alpha|$. Utilisons alors l'inégalité de l'énoncé :

$$\forall n, \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |g(x_0) - x_0|. \tag{5}$$

Ainsi, pour avoir $|x_n - \alpha| \leq \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{k^n}{1-k} |g(x_0) - x_0| \leq \varepsilon.$$

Si $g(x_0) - x_0 = 0$, c'est que x_0 est l'unique point fixe et il n'y a plus rien à faire que de prendre $n = 0$. Sinon, c'est équivalent à

$$n \ln k \leq \ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|}\right)$$

et donc

$$n \geq \frac{1}{\ln(k)} \ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|}\right) \tag{6}$$

Numériquement, pour $x_0 = 1$, on a

$$n = 135. \tag{7}$$

Cela est trop grand. On peut affiner le tir en partant de x_0, calculer par exemple les 6 premières itérations. On obtient

$$x_n \approx 0.579612336. \tag{8}$$

1. Le théorème B.2 est vrai même si I n'est pas borné ! En effet $g(I) \subset I$ et puisque g est continue, $g(I)$ est borné et on peut considérer que g est une application de $g(I)$ borné dans $g(I)$.

On admet que la majoration (2) est encore valable sur l'intervalle $\widetilde{I} = [x_n, +\infty[$ que cet intervalle est g stable et que l'on a donc, tout x dans I

$$|g'(x)| = e^{-x} \leq e^{-0.579612336} \approx 0.560115461,$$

ce qui est meilleur que (3). Enfin, si on applique de nouveau (5) mais avec cette valeur là et à partir de cette valeur de n, on a donc

$$\forall p \geq n, \quad |x_{n+p} - \alpha| \leq \frac{k^p}{1-k} |g(x_n) - x_n|, \tag{9}$$

et donc on obtient

$$p = 15. \tag{10}$$

À partir de cette valeur de p, on obtient donc

$$x_{n+p} \approx 0.567140781. \tag{11}$$

On peut aussi calculer la solution recherchée en tappant sous matlab :

```
fzero('exp(-x)-x=0',0)
```

ce qui donne

$$\alpha \approx 0.567143290. \tag{12}$$

Si, ensuite, *a posteriori*, on calcule $|\alpha - x_{n+p}|$, on obtient alors

$$\alpha \approx 2.5089\,10^{-6}, \tag{13}$$

ce qui est bien inférieur à $\varepsilon = 1.0\,10^{-5}$.

Correction de l'exercice 2.

(1) Grâce à l'algorithme pyramidal donné en cours, on calcule les différences divisées $(f[x_0], ..., f[x_0, ..., x_1])$, données par $(2, 3)$.

On en déduit donc le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 1}$ donné par

$$P(x) = 3\,x + 2. \tag{14}$$

(2) Si on rajoute le point (x_i, y_i) pour $i = 2$, on obtient les différences divisées $(f[x_0], ..., f[x_0, ..., x_2])$, données par $(2, 3, 0)$. Le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 2}$ est alors donné par

$$P(x) = 3\,x + 2, \tag{15}$$

identique au polynome donné par (14).

(3) Si on rajoute le point (x_i, y_i) pour $i = 3$ (en plus du point déjà rajouté), on obtient les différences divisées $(f[x_0], ..., f[x_0, ..., x_3])$, données par $(2, 3, 0, 0)$. Le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 4}$ est alors donné par

$$P(x) = 3\,x + 2, \tag{16}$$

identique au polynome donné par (14).

(4)

Voir la figure 1 page ci-contre.

On rappelle que le polynôme d'interpolation passant par $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ est de degré au plus n. Ici, les points (x_i, y_i) sont déjà tous alignés et vérifient donc

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad y_i = p(x_i), \tag{17}$$

où p est un polynôme de degré 1. Ainsi, à partir du moment ou l'on choisit assez de point le polynôme q est égal au polynôme d'interpolation P, ce qui explique que les polynômes calculés sont tous identiques. Cela est caractérisé par le fait que les différentes divivées supplémentaires sont toutes nulles.

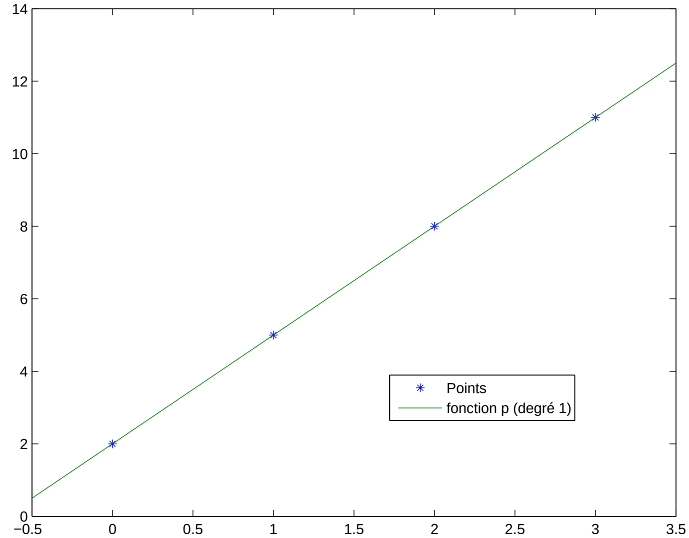

FIGURE 1. Les points (x_i, y_i) et la fonction polynomiale p.