Informatiquee 3A MNBif — Automne 2015

Corrigé de l'examen de TD du 10 Novembre 2015

Correction de l'exercice 1.
On renvoie aussi à la correction de l'exercice de TD 1.4, très proche de celui-ci !

(1) On sait d'après le cours qu'une méthode d'ordre p vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = C, \tag{1}$$

où $e_n = |x_n - x^*|$.

(2) On a vu en cours que le développement de Taylor de la fonction g sur $[x^*, x_n]$ s'écrit

$$g(x_n) = g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2}g''(x^*)(x_n - x^*)^2 + \frac{1}{3!}g^{(3)}(\xi_n)(x_n - x^*)^3,$$

ce qui implique, puisque $g(x^*) = x^*$ et $g'(x^*) = g''(x^*) = 0$,

$$e_{n+1} = |x_n - x^*| \leq \frac{1}{6}\max|g^{(3)}(\xi_n)|e_n^3.$$

Cela implique bien (1) On pourra par exemple consulter [BM03, Proposition 4.14 p. 150]. L'ordre est au moins 3.

(3) Il faudrait que l'on ne puisse pas faire le raisonnement précédent à l'ordre 4, c'est-à-dire que

$$g^{(3)}(x^*) \neq 0.$$

(4) Vu les nombres donnés dans les tableaux les résultats donnés dans le tableau 1 de l'énoncé, on constate que le nombre de chiffres exacts semble être multiplié par plus que 2 à chaque itération. La méthode semble donc être cubique.

(5)

On a tracé le graphique $(e_n, e_{n+1})_{n\in\{1,2,3\}}$, sur la figure 1. Numériquement, on a une corrélation égale à 0.9967036 et une pente égale à 2.5190219, ce qui confirme numériquement l'ordre strictement plus grand que 2 de cette méthode. L'ordre est donc 3.

Remarque 1. Notons que la méthode étudiée était en fait définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ avec

$$g(x) = \frac{1}{8}\left(3x + \frac{6A}{x} - \frac{A^2}{x^3}\right). \tag{2}$$

On renvoie à l'exercice 4.6 p. 174 et son corrigé p.304 de [BM03]. On y a montré que la méthode du point fixe convergeait vers $\sqrt{A}$ avec un ordre de convergence égal à 3. En fait, la méthode de Tchebycheff généralise cela : si on veut résooudre l'équation $f(x) = 0$, on peut définir la méthode de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ avec

$$g(x) = x - \left(1 + \frac{1}{2}L(x)\right)\frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{3a}$$

et

$$L(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}. \tag{3b}$$

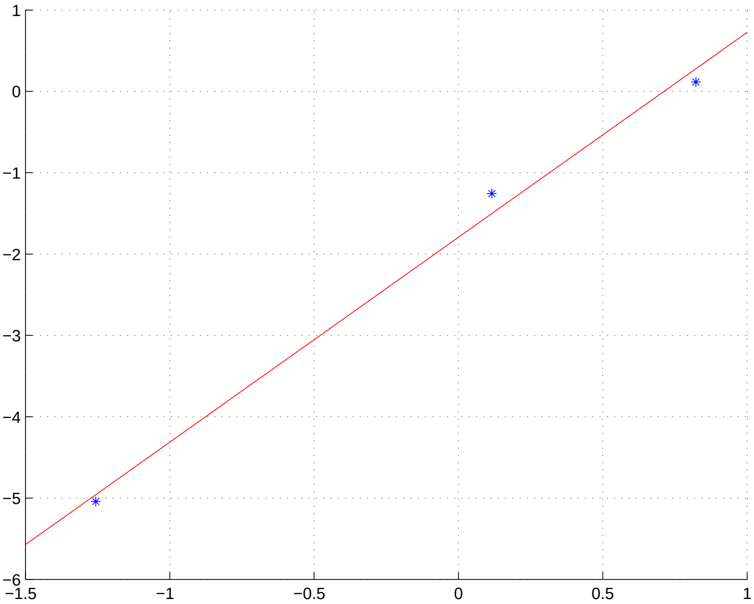

FIGURE 1. Nuage des points et la droite aux moindres carrés.

Dans ce cas, la méthode est d'ordre 3, au moins, dans le cas général. Pour plus de détails, voir par exemple [DGOG13].

Sous matlab, le script suivant vous permet de montrer que les trois premières dérivées de g sont nulles en la racine de f et que le cas particulier de la méthode (3) appliqué à $f(x) = x^2 - A$ redonne bien (2) !

```
nf=3;
% cas général
syms x xs;
F=sym('F(x)');
f=F-subs(F,x,xs);
L=f*diff(f,x,2)/(diff(f,x))^2;
g=x-(1+L/2)*f/diff(f,x);
gd=cell(1,4);
for i=0:3
    gd{i+1}=diff(g,x,i);
end
for i=0:nf
    disp(['g^(',int2str(i),')']);
    pretty(gd{i+1});
    pause;
end
for i=0:nf
    disp(['g^(',int2str(i),')(x^*)']);
    pretty(subs(gd{i+1},x,xs));
```

```
    pause;
end

% cas particulier
syms A;
f=x^2-A;
xs=sqrt(A);
L=f*diff(f,x,2)/(diff(f,x))^2;
g=x-(1+L/2)*f/diff(f,x);
gd=cell(1,4);
for i=0:3
    gd{i+1}=(expand(diff(g,x,i)));
end
for i=0:nf
    disp(['g^(',int2str(i),')']);
    pretty(gd{i+1});
    pause;
end
for i=0:nf
    disp(['g^(',int2str(i),')(x^*)']);
    pretty(subs(gd{i+1},x,xs));
    pause
end
gn=inline(vectorize(char(g)),'x','A');
fn=inline(vectorize(char(f)),'x','A');
```

Correction de l'exercice 2.

(1) Les différences divisées valent

$$f[x_0]=5,$$
$$f[x_0,x_1]=2,$$
$$f[x_0,x_1,x_2]=0,$$

(2) La dernière différence divisée est nulle, car le polynôme interpolateur est de degré 1 : les points sont alignés !

(3) On conclue grâce à la formule du cours sur le calcul de $\Pi_2 g(\alpha)=7.200000$.

Correction de l'exercice 3.

(1) La valeur exacte de I est $\sin(1)$ soit 0.841471.

(2) Comme d'habitude, on sait que l'erreur est majorée par Mh^α où α est l'ordre de la méthode. On a donc

$$\log_{10}(\varepsilon(h))\approx\alpha\log_{10}(h)+\log_{10}(M),$$

et le points alignés du graphique de l'énoncé forment un nuage de pente α, ici égale à 3.821107. L'ordre est donc 4.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[DGOG13] M. A. Diloné, M. García-Olivo et J. M. Gutiérrez. "A note on the semilocal convergence of Chebyshev's method". Dans : *Bull. Aust. Math. Soc.* 88.1 (2013), pages 98–105.