

CORRIGÉS DES TRAVAUX DIRIGÉS DE L'UE MPISIR

Systèmes Industriels et Robotique 3A

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

2024-2025, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 15 janvier 2025

Le lien original de ce document est le suivant :

<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/TDcorMPISIR.pdf>

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Liste des Travaux Dirigés

Correction du Travaux Dirigés 1. Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et développements limités	1
Notions de continuité, limite	1
Dérivation	1
Développements limités	2
Applications en MNB (étude de fonctions)	15
Développements limités (exercices facultatifs)	16
Étude de fonctions (exercices facultatifs)	17
Exercices pratiques (exercices facultatifs)	19
Correction du Travaux Dirigés 2. Équations différentielles ordinaires	42
Équations différentielles ordinaires d'ordre un et deux à coefficients constants	42
Autres types d'équations différentielles ordinaires	56
Correction du Travaux Dirigés 3. Interpolation polynômiale	58
Exercices facultatifs	68
Correction du Travaux Dirigés 4. Intégration numérique	75
Correction du Travaux Dirigés 5. Transformées de Laplace	79
Annexe A. Simulations numériques sur l'erreur d'interpolation	80
Bibliographie	87

Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et développements limités

Ces corrigés sont issus et adaptés de [Bas22a, correction de TD 1] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/TDcorMFI.pdf>.

Notions de continuité, limite

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.1.

Deux façons de faire :

- (1) On peut écrire $h = x - 1$, qui tend vers zéro quand x tend vers 1, puis $x = h + 1$ et

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \frac{(h + 1)^3 - 1}{h}, \\ &= \frac{1}{h} (h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 1), \\ &= 3 + 3h + h^2,\end{aligned}$$

qui tend donc vers 3.

- (2) Si on pose $f(x) = x^3$, on a donc à calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

qui tend vers $f'(1) = 3$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.2. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.3. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.4. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.5. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.6. Non rédigée

Dérivation

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.7. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.8. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.9. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.10. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.11. Non rédigée

Développements limités

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.12.

- (1) La partie principale du développement limité est égale à

$$1/2 - 1/4 x,$$

et donc la limite recherchée vaut :

$$1/2.$$

- (2) La partie principale du développement limité est égale à

$$\pi^{-1} - 2 \frac{x - 1/2}{\pi} - 1/3 \pi (x - 1/2)^2,$$

et donc la limite recherchée vaut :

$$\pi^{-1}.$$

- (3) On a une forme indéterminée puisque

$$f(x) = \exp \left(\ln x \left(\frac{1}{\ln(e^x - 1)} \right) \right), \quad (1.1)$$

Or $\frac{1}{\ln(e^x - 1)}$ tend vers 0 et $\ln x$ vers $-\infty$.

On a successivement, d'après (1.1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp \left(\frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} \right), \\ &= \exp \left(\frac{1}{\frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}} \right), \\ &= \exp \left(\frac{1}{\frac{\ln(e^x(1 - e^{-x}))}{\ln x}} \right), \\ &= \exp \left(\frac{1}{\frac{\ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x})}{\ln x}} \right), \\ &= \exp \left(\frac{1}{\frac{\ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x})}{\ln x}} \right), \\ &= \exp \left(\frac{1}{\frac{\ln(x) + \ln(1 - e^{-x})}{\ln x}} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{1 + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{\ln x}} \right). \quad (1.2)$$

On a aussi, d'après les développements limités usuels de l'annexe A page 87 du cours :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1 - e^{-x})}{\ln x} &= \frac{\ln(1 - (1 - x + o(x)))}{\ln x}, \\ &= \frac{\ln(x + o(x))}{\ln x}, \\ &= \frac{\ln(x(1 + o(1)))}{\ln x}, \\ &= \frac{\ln(x) + \ln(1 + o(1))}{\ln x}, \\ &= 1 + \frac{\ln(1 + o(1))}{\ln x},\end{aligned}$$

qui tend vers $1 + 0/(-\infty) = 1$ et d'après (1.2)

$$f(x) \rightarrow e.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.13.

Posons, pour tout cet exercice,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}. \quad (1.3)$$

Le domaine de définition de $\mathcal{F}$ est égal à $D_{\mathcal{F}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(1) Notons tout d'abord que l'on a affaire à une forme indéterminée.

En effet, notons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x). \quad (1.4)$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2). \quad (1.5)$$

Ainsi, si x tend vers 1, $2/(1 - x^2)$ est du signe de $1 - x$ et tend donc vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si x tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positive). Il est de même de $3/(1 - x^3)$. On a donc une forme indéterminée puisque la limite vaut $\infty - \infty$ (resp. $-\infty + \infty$) si x tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positives).

Utilisons les développements limités.

On pose

$$h = x - 1 \quad (1.6)$$

qui tend vers 0, quand x tend vers 1.

Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}\frac{2}{1 - x^2} &= \frac{2}{1 - (h + 1)^2}, \\ &= \frac{2}{1 - h^2 - 2h - 1}, \\ &= -\frac{2}{h^2 + 2h}, \\ &= -\frac{2}{2h \left(1 + \frac{h}{2}\right)},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{2}{1 - x^2} = -\frac{1}{h} \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-1} \quad (1.7)$$

On utilise le développement limité de $u \mapsto 1/(1 + u) = (1 + u)^{-1}$, (voir par exemple l'annexe A page 87 du cours), qui fournit, quand u tend zéro :

$$(1 + u)^{-1} = 1 - u + o(u). \quad (1.8)$$

Si on l'applique à $u = h/2$, qui tend vers zéro, on a

$$\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-1} = 1 - \frac{h}{2} + o\left(\frac{h}{2}\right) = 1 - \frac{h}{2} + o(h),$$

et donc, d'après (1.7) (on rappelle que h est défini par (1.6))

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{h} \left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right), \quad (1.9)$$

On fait de même avec le second terme

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-x^3} &= \frac{3}{1-(h+1)^3}, \\ &= \frac{3}{1-h^3-3h^2-3h-1}, \\ &= -\frac{3}{h^3+3h^2+3h}, \\ &= -\frac{3}{3h\left(\frac{h^2}{3}+h+1\right)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{3}{1-x^3} = -\frac{1}{h} \left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right)^{-1} \quad (1.10)$$

Si on applique (1.8) à $u = h + \frac{h^2}{3}$, qui tend vers zéro, on a successivement

$$\begin{aligned} \left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right)^{-1} &= (1+u)^{-1}, \\ &= 1 - u + o(u), \\ &= 1 - \left(h + \frac{h^2}{3}\right) + o\left(h + \frac{h^2}{3}\right), \\ &= 1 - h - \frac{h^2}{3} + o(h), \end{aligned}$$

en négligeant les termes h^2 devant $o(h)$:

$$= 1 - h + o(h),$$

et donc, d'après (1.10),

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{3}{1-x^3} = -\frac{1}{h} (1 - h + o(h)) \quad (1.11)$$

D'après (1.9) et (1.11), on a successivement

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) &= -\frac{1}{h} \left(1 - \frac{h}{2} + o(h) - (1 - h + o(h))\right), \\ &= -\frac{1}{h} \left(-\frac{h}{2} + o(h) + h + o(h)\right), \\ &= -\frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} + o(h)\right), \\ &= -\left(\frac{1}{2} + o(1)\right), \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

expression qui tend vers $-1/2$. On a donc finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \mathcal{F}(x) = -\frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

(2) Sans ces développements limités, on peut aussi s'en sortir.

(a) On a successivement grâce à (1.4) et (1.5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}, \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{2}{1+x} - \frac{3}{x^2+x+1} \right), \\ &= \frac{1}{(1-x)(1+x)(x^2+x+1)} (2(x^2+x+1) - 3(1+x)), \\ &= \frac{1}{(1-x)(1+x)(x^2+x+1)} (2x^2+2x+2-3x-3), \\ &= \frac{1}{(1-x)(1+x)(x^2+x+1)} (2x^2-x-1). \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) = -\frac{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}{2x^2-x-1}. \quad (1.13)$$

On remarque que le polynôme $2x^2-x-1$ s'annule en $x=1$ et on a donc $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{(1-x)(1+x)(x^2+x+1)},$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) = -\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(1+x)(x^2+x+1)},$$

On a transformé la forme indéterminée $\pm\infty - \pm\infty$ par une forme indéterminée $0/0$ et on n'a rien résolu du tout ... sauf si on simplifie en haut et en bas de la fraction par $x-1$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) = -\frac{2x+1}{(1+x)(x^2+x+1)},$$

et, en $x=1$,

$$-\frac{2x+1}{(1+x)(x^2+x+1)} = -\frac{3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2},$$

et on retrouve bien (1.12).

(b) Une autre façon de procéder est d'utiliser la règle de l'Hospital (voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_L'H%C3%B4pital), rappelée ici :

PROPOSITION 1.1 (Règle de l'Hospital). *Soit I un intervalle dont l'intérieur contient a . Si f et g sont deux fonctions définies sur I , dérivable en a , telles que*

$$f(a) = g(a) = 0, \quad (1.14)$$

et

$$g'(a) \neq 0, \quad (1.15)$$

alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (1.16)$$

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que grâce à l'équation (1.16) page 5 du cours, on a au voisinage de a et d'après l'hypothèse (1.14)

$$\begin{aligned} g(x) &= g(a) + (x - a)g'(a) + (x - a)\varepsilon(x), \\ &= (x - a)(g'(a) + \varepsilon(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) \text{ est du signe de } (x - a)(g'(a) + \varepsilon(x)). \quad (1.17)$$

Si x est différent de a , $(x - a)$ est non nul. Par ailleurs, d'après (1.15)

$$\lim_{x \rightarrow a} g'(a) + \varepsilon(x) = g'(a) \neq 0,$$

Ainsi, pour x suffisamment proche de a , $g'(a) + \varepsilon(x)$ est non nul. Bref, d'après (1.17) pour x suffisamment proche de a et différent de a , $g(x)$ est non nul. On peut donc s'intéresser à la fonction $f(x)/g(x)$ au voisinage de a , pour $x \neq a$.

Il suffit ensuite d'écrire, pour $x \in I \setminus \{a\}$, d'après (1.14)

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}, \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}, \end{aligned}$$

expression qui tend vers $f'(a)/g'(a)$, par définition. $\square$

Si on reprend l'expression de $\mathcal{F}(x)$ fournie par (1.13), on a avec les notations de la proposition (1.1)

$$f(x) = 2x^2 - x - 1,$$

et donc

$$f'(x) = 4x - 1,$$

et

$$f'(1) = 3 \quad (1.18)$$

On a aussi

$$g(x) = -(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1),$$

et donc

$$g'(x) = -(x + 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)((x + 1)(x^2 + x + 1))',$$

et

$$g'(1) = -6. \quad (1.19)$$

Ainsi, proposition 1.1 et (1.19) et (1.18) implique que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{3}{6}, \quad (1.20)$$

ce qui implique bien (1.12).

- (c) Une dernière façon de procéder est d'utiliser la règle de l'Hospital généralisée : (voir aussi https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_L%27H%C3%B4pital ou [RDO88, section 4.3.4 3]), rappelée ici :

PROPOSITION 1.2 (Règle de l'Hospital (généralisation)). *Soit I un intervalle dont l'intérieur contient a . Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et telles que g' ne s'annule pas vérifiant (1.14) et*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in [-\infty, \infty], \quad (1.21)$$

alors, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \quad (1.22)$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que le lemme de Rolle (rappelé plus bas et admis, voir lemme 1.3) l'hypothèse entraîne :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad g(x) = 0. \quad (1.23)$$

D'après la généralisation du théorème des accroissements finis (voir [RDO88, section 4.3.4 3]), pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ par exemple (en prenant $x > a$), il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(c_x)}{g(c_x)}. \quad (1.24)$$

En passant à la limite $x \rightarrow a$, on a $c_x \rightarrow a$ et donc (1.21) et (1.24) entraîne :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

On fait de même si $x < a$.

LEMME 1.3 (Lemme de Rolle). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors*

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0. \quad (1.25)$$

DÉMONSTRATION. Voir [RDO88, section 4.3.4 1)].

□

□

Ainsi, si on suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = l \in [-\infty, \infty],$$

avec $g^{(n)}$ ne s'annule pas, alors d'après la proposition 1.2, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = l.$$

On recommence $n - 1$ fois et on conclut par

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Appliquons cela dans notre exemple avec $n = 2$. Si on utilise (1.3) directement sans factoriser, on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) &= -\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1}\right), \\ &= -\frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)} (2(x^3-1) - 3(x^2-1)), \\ &= -\frac{1}{x^5-x^3-x^2+1} (2x^3-2-3x^2+3),\end{aligned}$$

et donc, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^3 + 3x^2 - 1, \\ g(x) &= x^5 - x^3 - x^2 + 1,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}f(1) &= 0, \\ g(1) &= 0.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}f'(x) &= -6x^2 + 6x, \\ g'(x) &= 5x^4 - 3x^2 - 2x,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f'(1) &= 0, \\ g'(1) &= 0.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}f''(x) &= -12x + 6, \\ g''(x) &= 20x^3 - 6x - 2.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f''(1) &= -6, \\ g''(1) &= 12.\end{aligned}$$

Le résultat nous montre donc bien (1.12).

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.14.

La correction est très proche de la correction de l'exercice 1.13 page 3, à laquelle on se référera.

Posons, pour tout cet exercice,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} \quad (1.26)$$

Le domaine de définition de $\mathcal{F}$ est égal à $D_{\mathcal{F}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- (1) Notons tout d'abord que l'on a affaire à une forme indéterminée. Nous avons toujours les équations (1.4) et (1.5). De plus, quand x tend vers 1, $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ tend vers 1 et ne modifie pas le signe de $\frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$. Ainsi, si x tend vers 1, $2/(1-x^2)$ est du signe de $1-x$ et tend donc vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si x tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positive). Il est de même de $\frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$. On a donc une forme indéterminée puisque la limite vaut $\infty - \infty$ (resp. $-\infty + \infty$) si x tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positives).

Utilisons les développements limités comme dans la question 1 page 3 de l'exercice 1.13. On considère h défini par (1.6).

Comme dans l'exercice 1.13, on détermine le développement limité de $\frac{2}{1-x^2}$. Voir équation (1.9).

Pour le second facteur, on utilise l'expression donnée par (1.11). Il reste à obtenir le développement de $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en h . On écrit

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi(h+1)}{2}\right), \\ &= \sin\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

et d'après les formules usuelles, on a donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\end{aligned}$$

On utilise les développements limités usuels de l'annexe A du cours et on a donc

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 + o\left(\frac{\pi h}{2}\right) = 1 + o(h),$$

et d'après l'équation (1.11), on a donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} &= -\frac{1}{h} (1-h+o(h)) (1+o(h)), \\ &= -\frac{1}{h} (1+o(h) - h - ho(h) + o(h) + o(h)o(h)), \\ &= -\frac{1}{h} (1-h+o(h))\end{aligned}$$

et on retrouve donc un résultat identique à (1.11)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} = -\frac{1}{h} (1-h+o(h)) \quad (1.27)$$

On finit exactement comme dans la question 1 page 3 de l'exercice 1.13 et on obtient de nouveau (1.12).

(2) Sans ces développements limités, on peut aussi s'en sortir, mais non dans tous les cas.

- (a) Ici, le calcul du point 2a page 5 n'est plus valable car l'expression n'est plus polynômiale et ne se factorise plus.
- (b) Pour la même raison, la première version de l'utilisation de la règle de l'Hospital du point 2b page 5 n'est plus valable ici.
- (c) En revanche, la seconde version de l'utilisation de la règle de l'Hospital du point 2c page 6 est valable ici. Comme dans ce calcul, on détermine $\mathcal{F}(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathcal{F}(x) &= -\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^3-1}\right), \\ &= -\frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)} \left(2(x^3-1) - 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) (x^2-1)\right), \\ &= -\frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)} \left(2x^3 - 2 - 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) x^2 + 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

et donc, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) x^2 - 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2, \\ g(x) &= x^5 - x^3 - x^2 + 1, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ g(1) &= 0. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) x^2 + 6 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) x - \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \\ g'(x) &= 5x^4 - 3x^2 - 2x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0, \\ g'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -12x - \frac{3\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) x^2 + 6\pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) x + 6 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{3\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \\ g''(x) &= 20x^3 - 6x - 2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f''(1) &= -6, \\ g''(1) &= 12, \end{aligned}$$

et on conclut comme dans la question 2c page 6 de l'exercice 1.13

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.15.

On écrit, grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de $\cos$ en zéro à l'ordre 4 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4).$$

et donc

$$\cos x = 1 + u,$$

où

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4), \quad (1.28)$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit, ensuite grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de $\ln(1+u)$ en zéro à l'ordre 4 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \quad (1.29)$$

Remplaçons u par son expression en fonction de x :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4) \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4) \right)^3 - \frac{1}{4} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4) \right)^4. \end{aligned} \quad (1.30)$$

On calcule le terme quadratique $-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4)\right)^2$ en ne conservant que l'unique terme d'ordre inférieur à 4 :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^4)\right)^2 = -\frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Les autres termes (de puissance 3 et 4) ne contiennent que des termes d'ordre supérieurs à 5 et donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

et donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4), \quad (1.31)$$

qui ne contient bien que des termes pairs puisque la fonction étudiée est paire.

REMARQUE 1.4. En fait, un dl à l'ordre 2 du logarithme suffisait ! On remplace (1.29) par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On remarque aussi que, d'après (1.28), on a $o(u^2) = o(x^4)$. Ainsi, compte tenu de tout cela, (1.30) est remplacé par

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4),$$

et on conclut comme précédemment.

Vérifions enfin tout cela avec matlab. On obtient bien en tapant

```
syms x;
pretty(taylor(log(cos(x)), 5));
```

$$\ln(\cos(x)) = -1/2 x^2 - 1/12 x^4 + o(x^4),$$

ce qui est bien conforme à (1.31).

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.16.

On obtient successivement les différentes parties principales :

$$1/6 x^2 - \frac{1}{180} x^4;$$

$$\frac{x}{e} - \frac{x^2}{(e)^2} + 7/6 \frac{x^3}{(e)^3};$$

$$1 - 1/2 x + 1/12 x^2 - \frac{1}{720} x^4;$$

$$e - 1/2 e x^2 + 1/6 e x^4 - \frac{31}{720} e x^6;$$

$$4 + (4 + 4 \ln(2))(x-2) + \left(3 + 4 \ln(2) + 2 (\ln(2))^2\right)(x-2)^2 + \left(3/2 + 3 \ln(2) + 2 (\ln(2))^2 + 2/3 (\ln(2))^3\right)(x-2)^3.$$

Les calculs détaillés sont les suivants :

(1) On écrit la définition du sinh :

$$\sinh(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2},$$

et on admet que le DL à l'ordre 5 en zéro est donné par la formule de l'annexe A :

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

et donc, pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sinh(x)}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4),$$

soit encore

$$\ln\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right) = \ln(1+u),$$

avec

$$u = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4),$$

expression qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On peut écrire d'après la formule de l'annexe A :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4),$$

expression dans laquelle u est remplacée par son expression en fonction de x , ce qui donne

$$\ln\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^4 + o(x^4).$$

Cela donne le résultat en développant tout et en ne conservant que les termes en $1, \dots, x^4$.

(2) Non rédigé.

(3) Non rédigé.

(4) Non rédigé.

(5) Non rédigé.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.17. Non rédigée

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.18.

Donnons les deux méthodes proposées.

(1) On utilise la formule habituelle du cours

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{6}(x-a)^3 f'''(a) + \frac{1}{24}(x-a)^4 f^{(4)}(a) + o((x-a)^4),$$

et donc, pour $a = \pi/4$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 f''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right).$$

Puis, on écrit successivement

$$\begin{aligned} f(a) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ f'(a) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ f''(a) &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ f'''(a) &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ f^{(4)}(a) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

et donc, finalement :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right).$$

(2) On pose $x = \pi/4 + h$ où h tend vers zéro et on utilise la formule

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

qui est habituelle. On en déduit que, pour $x = \pi/4 + h$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(h + \frac{\pi}{4}\right), \\ &= \sin h \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos h \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin h + \cos h). \end{aligned}$$

Enfin, on utilise les développements limités (en zéro) de l'annexe A du cours à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \sin h &= h - \frac{h^3}{6} + o(h^4), \\ \cos h &= 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o(h^4), \end{aligned}$$

qui, réinjectés dans l'expression de $f(x)$, donnent

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right),$$

ce qui est naturellement identique à l'expression obtenue ci-dessous en remplaçant h par $x - \pi/4$.

Vérifions cela avec matlab. On obtient bien en tapant

```
syms x;
pretty(taylor(sin(x), pi/4, 5));
```

$$\sin x = 1/2\sqrt{2} + 1/2\sqrt{2}(x - 1/4\pi) - 1/4\sqrt{2}(x - 1/4\pi)^2 - 1/12\sqrt{2}(x - 1/4\pi)^3 + 1/48\sqrt{2}(x - 1/4\pi)^4 + o\left((x - \frac{\pi}{4})^4\right).$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.19.

Donnons deux façons de faire.

(1) La première consiste à calculer les quatre premiers termes de $(1+x)^m$ puis les quatre premiers termes du développement limité de $(1-x)^{-m}$ à l'ordre 4 en zéro (voir annexe A du cours) puis de multiplier les deux facteurs. On obtient en effet, dans un premier temps :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)x^3 + \frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)x^4 + o(x^4). \quad (1.32)$$

Si on applique (1.32) en remplaçant m par $-m$, on a

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{1}{2}(-m)(-m-1)x^2 + \frac{1}{6}(-m)(-m-1)(-m-2)x^3 + \frac{1}{24}(-m)(-m-1)(-m-2)(-m-3)x^4 + o(x^4),$$

et donc

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{1}{2}m(m+1)x^2 - \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)x^3 + \frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)x^4 + o(x^4),$$

et puis en changeant x en $-x$:

$$(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{1}{2}m(m+1)x^2 + \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)x^3 + \frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)x^4 + o(x^4). \quad (1.33)$$

Il ne reste plus qu'à multiplier les deux équations (1.32) et (1.33), en ne conservant que les termes d'ordre inférieur à 4. On obtient successivement le terme

- constant

- d'ordre 1 :

$$mx + mx = 2mx.$$

- d'ordre 2 :

$$\left(\frac{1}{2}m(m-1) + m^2 + \frac{1}{2}m(m+1)\right)x^2 = \frac{1}{2}(m^2 - m + 2m^2 + m^2 + m)x^2 = 2m^2x^2$$

- d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}m(m+1)(m+2) + \frac{1}{2}m^2(m+1) + \frac{1}{2}m^2(m-1) + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\right)x^3, \\ &= \frac{1}{6}(m(m+1)(m+2) + 3m^2(m+1) + 3m^2(m-1) + m(m-1)(m-2))x^3, \\ &= \frac{1}{6}(m(m^2 + 3m + 2) + 3m^3 + 3m^2 + 3m^3 - 3m^2 + m(m^2 - 3m + 2))x^3, \\ &= \frac{1}{6}(m^3 + 3m^2 + 2m + 3m^3 + 3m^2 + 3m^3 - 3m^2 + m^3 - 3m^2 + 2m)x^3, \\ &= \frac{1}{6}(8m^3 + 4m)x^3, \\ &= \frac{1}{3}(4m^3 + 2m)x^3. \end{aligned}$$

- d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3) + \frac{1}{6}m^2(m+1)(m+2) + \frac{1}{2}m(m+1) \times \frac{1}{2}m(m-1) + \dots \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{6}m^2(m-1)(m-2) + \frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)\right)x^4 \end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{1}{24}((m+1)(m^2 + 5m + 6) + (m-1)(m^2 - 5m + 6) + 4m^2(m^2 + 3m + 2 + m^2 - 3m + 2) + 6m(m^2 - 1))x^4$$

soit encore après calculs

$$\frac{1}{3}(2m^4 + 4m^2)x^4$$

En regroupant tous ces termes, on obtient

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m = 1 + 2mx + 2m^2x^2 + \frac{4m^3 + 2m}{3}x^3 + \frac{2m^4 + 4m^2}{3}x^4 + o(x^4). \quad (1.34)$$

Vérifions cela avec matlab.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m = 1 + 2mx + 2m^2x^2 + 4/3x^3m^3 + 2/3x^3m + 2/3x^4m^4 + 4/3x^4m^2.$$

- (2) La seconde, plus rapide, consiste à ne pas calculer le produit en écrivant pour tout réel α

$$(1+x)^\alpha = e^{(\alpha \ln(1+x))},$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m &= e^{m \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}, \\ &= e^{m(\ln(1+x) - \ln(1-x))} \end{aligned}$$

On écrit en zéro

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

et donc

$$m(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + o(x^4) \quad (1.35)$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit enfin en zéro

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4),$$

et donc pour $u = 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + o(x^4)$, (1.35) donne

$$\begin{aligned}e^{m(\ln(1+x) - \ln(1-x))} &= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{24}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^4 + o(x^4), \\ &= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + 2m^2x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + \frac{4m^3}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^3 + \frac{2m^4}{3}x^4\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^4 + o(x^4), \\ &= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + 2m^2x^2\left(1 + \frac{2}{3}x^2\right) + \frac{4m^3}{3}x^3 + \frac{2m^4}{3}x^4 + o(x^4), \\ &= 1 + 2mx + 2m^2x^2 + \left(\frac{2m}{3} + \frac{4m^3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{4m^2}{3} + \frac{2m^4}{3}\right)x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

ce qui redonne (1.34).

Vérifions cela avec matlab.

$$\begin{aligned}m(\ln(1+x) - \ln(1-x)) &= 2mx + 2/3 x^3 m + o(x^4), \\ e^{m(\ln(1+x) - \ln(1-x))} &= 1 + 2mx + 2m^2x^2 + 4/3 x^3 m^3 + 2/3 x^3 m + 2/3 x^4 m^4 + 4/3 x^4 m^2 + o(x^4).\end{aligned}$$

Applications en MNB (étude de fonctions)

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.20.

(1) La dérivée de la fonction f vaut

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2,$$

strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = -7 < 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-7, \infty]$ et n'a donc qu'une seule racine sur $\mathbb{R}_+$.

(2) On vérifie que les deux équations ont une solution unique.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.21.

(1) La fonction f est définie sur son domaine $D_f = [1, +\infty[$ et de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et on a après calcul :

$$f'(x) = -\frac{3x(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})}{2(x^2+1)^3}.$$

On peut le vérifier sous matlab par acquis de conscience :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3/2 \frac{x(x^2-5-2x)}{\sqrt{x+1}(x^2+1)^{5/2}}, \\ (x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6}) &= x^2-5-2x,\end{aligned}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et sur $[1 + \sqrt{6}, +\infty[$ et que f est strictement croissante sur $[0, 1 + \sqrt{6}]$. On a

$$f(-1) = 0,$$

$$f(0) = -2,$$

$$f(\sqrt{6} + 1) = \frac{\sqrt{\sqrt{6} + 2}(-1 + \sqrt{6})}{((\sqrt{6} + 1)^2 + 1)^{3/2}} \approx 0.06600,$$

$$f(\infty) = 0.$$

- (2) Ainsi, f n'admet qu'une seule racine sur $[-1, 0]$, égale à -1 et une seule autre racine, notée α dans $]0, 1 + \sqrt{6}[\approx]0, 3.44949[$.

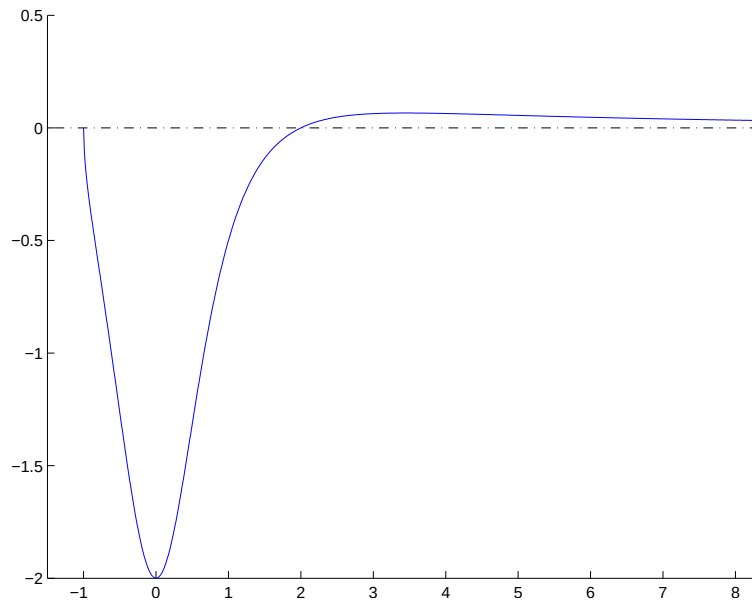


FIGURE 1.1. Le graphe de la fonction f .

Voir aussi le graphique de la fonction f sur la figure 1.1. La racine α est approchée grâce à la fonction `fzeros` de matlab : on trouve

$$\alpha \approx 2.000000000000.$$

Ainsi, on a $\alpha = 2$ puisque $f(2) = 0$.

- (3) Cela était en fait immédiat puisque f est nulle ssi $\sqrt{x+1}(x-2)$ soit donc $x = -1$ ou $x = 2$!

Développements limités (exercices facultatifs)

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.22.

Exercice 1237 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par legall 1998/09/01

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.23.

Exercice 1237 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par legall 1998/09/01

$$\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^7)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.24.

Exercice 1237 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par legall 1998/09/01

$$(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.25.

Exercice 1237 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par legall 1998/09/01

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.26.

Exercice 1237 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par legall 1998/09/01

$$\sin^6 x = x^6 + o(x^6)$$

Étude de fonctions (exercices facultatifs)

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.27.

(1) (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2},$$

qui ne s'annule qu'en x_0 définie par

$$x_0 = e.$$

(b) Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. On a aussi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0, \\ f(e) &= e^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit aisément le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et le graphe de f . Voir figure 1.2.

(2) (a) De ce qui précède, on déduit que f est injective sur $]0, e]$ et sur $[e, +\infty[$. Ainsi, s'il existe $x, y > 0$ tels que $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a nécessairement (par exemple, en supposant $x < y$) $x \in]0, e]$ et $y \in [e, +\infty[$. En effet, si ce n'était le cas, on aurait soit $x, y \in]0, e]$, soit $x, y \in [e, +\infty[$, ce qui n'est pas possible, vu le caractère injectif de f sur $]0, e]$ ou sur $[e, +\infty[$. Puisque $y > e$, on a $\ln(y)/y > e$ et donc $\ln(x)/x > 0$ et donc $\ln(x) > 0$ et donc $x \in]1, e]$. Bref, on a

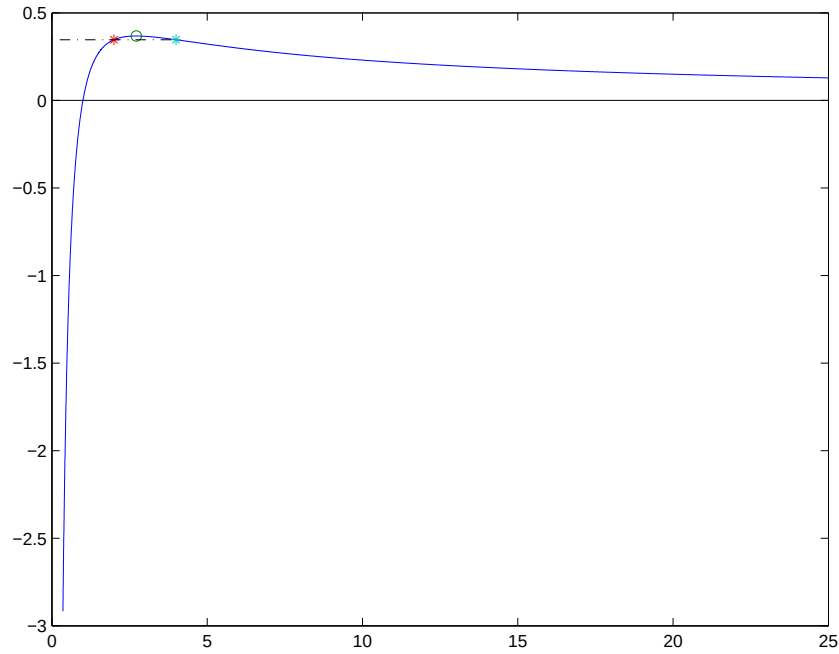
$$x \in]1, e[\text{ et } y > e. \quad (1.36)$$

(b) Cherchons maintenant x entier, qui ne peut être que 2 ($e \approx 2.7$). On a $f(x) = \ln(x)/x \in]0, 1/e[$. D'après l'étude de f , on peut affirmer qu'il existe un unique $y > e$ tel que $f(y) = f(x)$. Or on remarque que

$$\frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

et donc

$$x = 2 \text{ et } y = 4. \quad (1.37)$$

FIGURE 1.2. La fonction f

(3) Supposons que

$$(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p^q = q^p. \quad (1.38)$$

Il est clair que $p = q \in \mathbb{N}^*$ fournit une solution de (1.38). Supposons maintenant que $p \neq q$ avec par exemple $p < q$. (1.38) est équivalent à

$$\ln(p^q) = \ln(q^p),$$

ce qui est équivalent à

$$q \ln(p) = p \ln(q),$$

et donc

$$p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(q)}{q}. \quad (1.39)$$

On a donc

$$p, q \in \mathbb{N}^*, \quad p < q, \quad f(p) = f(q), \quad (1.40)$$

avec

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}. \quad (1.41)$$

D'après les deux points 1 et 2, on a alors nécessairement $p = 2$ et $q = 4$. Bref, les solutions de (1.38) sont les couples (p, p) où p appartient à $\mathbb{N}^*$ et $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.28.

Exercice 5102-2) issu de <http://exo7.emath.fr/>, par rouget 2010/06/30

On notera $\mathcal{C}$ le graphe de f .

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \geq 1$ et donc $f(x)$ existe et $f(x) \geq 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x \mapsto \cosh x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, f est strictement

croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. f est paire et donc f' est impaire. Par suite, $f'(0) = 0$ et $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Etude en $+\infty$.

Pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1 + e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy) , la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x ,

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathcal{C}$.

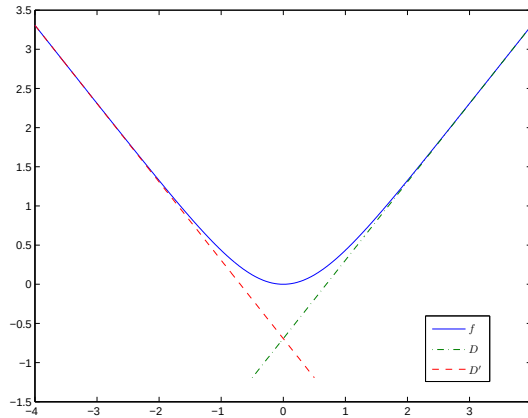


FIGURE 1.3. Le graphe de la fonction f .

Voir la figure 1.3.

Exercices pratiques (exercices facultatifs)

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.29.

- (1) Si les femmes gagnent 24 % que les hommes, cela signifie que le salaire moyen d'une femme vaut α fois celui d'un homme où

$$\alpha = 1 - \frac{24}{100} = 0.76.$$

Ainsi, le salaire d'un homme est égal à β fois celui d'une femme où

$$\beta = \frac{1}{\alpha},$$

ce qui correspond à un pourcentage égal à

$$p = 100(\beta - 1) = 100\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

soit numériquement

$$p = 31.58,$$

ce qui est différent de 24 %.

(2) De façon générale, d'après les calculs précédents, on a

$$p = 100 \left(\frac{1}{1 - n/100} - 1 \right), \quad (1.42)$$

où n est le pourcentage correspondant à la perte de salaire féminin et p la hausse de salaire masculin. On peut écrire le développement limité suivant au voisinage de zéro :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + o(x),$$

et donc d'après (1.42) :

$$\begin{aligned} p &= 100 \left(1 + \frac{n}{100} - 1 + o\left(\frac{n}{100}\right) \right), \\ &= n + o\left(\frac{n}{100}\right), \end{aligned}$$

et donc si n est "petit" devant 100, on a

$$p \approx n.$$

Par exemple, pour un pourcentage n égal à 1, on a d'après (1.42) :

$$p = 1.0101,$$

ce qui est bien proche de 1.

(3) On a rigoureusement l'égalité $p = n$ ssi

$$n = 100 \left(\frac{1}{1 - n/100} - 1 \right),$$

ce qui est équivalent à

$$N = \frac{1}{1 - N} - 1, \quad (1.43)$$

où $N = n/100$. Enfin, (1.43) est équivalent à

$$1 + N = \frac{1}{1 - N},$$

et donc à

$$(1 - N)(1 + N) = 1,$$

c'est-à-dire

$$N^2 = 0,$$

et donc

$$n = 0,$$

ce qui correspond à une société parfaitement égalitaire !

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.30.

Cet exercice est un cas particulier de l'exercice 1.31.

- On suppose naturellement que $a > 0$.
- Le volume d'un parallélépipède est égal au produit de la surface de base (ici, carré de côté $2a - 2x$) par sa hauteur x . On a donc ici

$$v(x) = x(2x - 2a)^2. \quad (1.44)$$

où x décrit l'intervalle $[0, a]$.

- On peut remarquer que si x appartient à $]0, a[$, alors $v(x)$ est strictement positif et que $v(0)$ et $v(a)$ sont nuls. Ainsi, v étant continue sur $[0, a]$, elle admet nécessairement un maximum strictement positif (non nécessairement en unique point *a priori*) que nous allons déterminer.

- De l'expression (1.44), on déduit l'expression de la dérivée $v'(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 4((x-a)^2 + 2x(x-a)), \\ &= 4(x^2 - 2ax + a^2 + 2x^2 - 2ax), \end{aligned}$$

et donc

$$v'(x) = 4(3x^2 - 4ax + a^2) \quad (1.45)$$

- Ici, on cherche donc les racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 4ax + a^2 = 0. \quad (1.46)$$

Appliquons les formules du discriminant réduit : les racines de $ax^2 + 2b'x + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac, \\ x &= \frac{1}{a}(-b' \pm \sqrt{\Delta'}). \end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser les formules habituelles équivalentes : les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac, \\ x &= \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta}). \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant les formules du discriminant réduit,

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2a)^2 - 3a^2, \\ &= 4a^2 - 3a^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta = a^2 > 0. \quad (1.47)$$

Ainsi, les deux racines distinctes de (1.46), sont données par

$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad (1.48a)$$

$$x_2 = a, \quad (1.48b)$$

avec

$$0 < x_1 < a = x_2. \quad (1.49)$$

REMARQUE 1.5. On aurait pu obtenir les racines de v' plus rapidement, en remarquant que, selon (1.44), on a

$$\begin{aligned} v'(x) &= 4((x-a)^2 + 2(x-a)x), \\ &= 4(x-a)(x-a+2x), \\ &= 4(x-a)(3x-a). \end{aligned}$$

•

D'après (1.49), il suffit donc d'étudier les signes de v' sur l'intervalle $[0, a]$ qui contient x_1 . On sait que v' donné par (1.45) est négatif entre les racines x_1 et x_2 et positif à l'extérieur. En particulier, v' est positif sur $[0, a/3]$ et négatif sur $[a/3, a]$.

On obtient donc le tableau de variation 1.1 pour le volume $v(x)$. On en déduit que ce volume est maximal pour x donné par x_1 , c'est-à-dire par (1.48a). De (1.44), on déduit l'expression du volume maximal :

$$v_{\max} = \frac{16}{27}a^3.$$

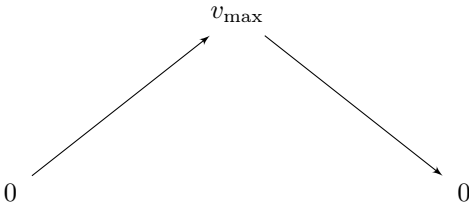
x	0	$\frac{a}{3}$	a
signe de $v'(x)$	+	0	−
$v(x)$			

TABLE 1.1. Tableau de variation de v

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.31.

Cet exercice est la généralisation de l'exercice 1.29. Si on choisit $l = L = a$, on en retrouve les résultats.

- On suppose donc que

$$0 < l \leq L. \quad (1.50)$$

- Le volume d'un parallélépipède est égal au produit de la surface de base (ici, rectangle de largeur $2l - 2x$ et de longueur $2l - 2x$) par sa hauteur x . On a donc ici

$$v(x) = 4x(L - x)(l - x). \quad (1.51)$$

où x décrit l'intervalle $[0, l]$.

- On peut remarquer que si x appartient à $]0, l[$, alors $v(x)$ est strictement positif et que $v(0)$ et $v(l)$ sont nuls. Ainsi, v étant continue sur $[0, l]$, elle admet nécessairement un maximum strictement positif (non nécessairement en unique point *a priori*) que nous allons déterminer.
- De l'expression (1.51), on déduit l'expression de la dérivée $v'(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 4((x - L)(x - l) + (x - l)x + (x - L)x), \\ &= 4(x^2 - (l + L)x + lL + x^2 - lx + x^2 - Lx), \end{aligned}$$

et donc

$$v'(x) = 4(3x^2 - 2(l + L)x + lL). \quad (1.52)$$

- Ici, on cherche donc les racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 2(l + L)x + lL = 0. \quad (1.53)$$

Appliquons les formules du discriminant réduit : les racines de $ax^2 + 2b'x + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac, \\ x &= \frac{1}{a}(-b' \pm \sqrt{\Delta'}). \end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser les formules habituelles équivalentes : les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$x = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{\Delta} \right).$$

On a donc, en utilisant les formules du discriminant réduit,

$$\Delta' = (l + L)^2 - 3lL,$$

$$= l^2 + 2lL + L^2 - 3lL,$$

et donc

$$\Delta' = l^2 + L^2 - lL. \quad (1.54)$$

Vérifions que

$$l^2 + L^2 - lL > 0. \quad (1.55)$$

On a supposé (1.50), ce qui implique $lL \leq L^2$ et donc $-lL \geq -L^2$ et ainsi

$$l^2 + L^2 - lL \geq l^2 + L^2 - L^2 = l^2 > 0.$$

Ainsi, les deux racines distinctes de (1.53), sont données par

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \right), \quad (1.56a)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \left(l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \right), \quad (1.56b)$$

avec (puisque $\Delta > 0$)

$$x_1 < x_2. \quad (1.57)$$

• Vérifions que

$$0 < x_1 < l \leq x_2. \quad (1.58)$$

— On a tout d'abord $x_1 > 0$, puisque c'est successivement équivalent à :

$$\frac{1}{3} \left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \right) > 0 \iff l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} > 0,$$

$$\iff l + L > \sqrt{l^2 + L^2 - lL},$$

et on peut élever au carré car tout est positif

$$\iff (l + L)^2 > l^2 + L^2 - lL,$$

$$\iff l^2 + 2lL + L^2 > l^2 + L^2 - lL,$$

$$\iff 3lL > 0,$$

ce qui est vrai.

— On a ensuite $x_1 < l$, puisque c'est successivement équivalent à :

$$\frac{1}{3} \left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \right) < l \iff l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} < 3l,$$

$$\iff l + L - 3l < \sqrt{l^2 + L^2 - lL},$$

$$\iff L - 2l < \sqrt{l^2 + L^2 - lL}.$$

Si $L - 2l \leq 0$, c'est vrai, puisque $\sqrt{l^2 + L^2 - lL} > 0 \geq L - 2l$. Sinon, on a $L - 2l > 0$ et $L > 2l$ et, puisque tout est positif, on peut élever au carré et on obtient successivement

$$\begin{aligned}(L - 2l)^2 < l^2 + L^2 - lL &\iff L^2 - 4lL + 4l^2 < l^2 + L^2 - lL, \\ &\iff -4lL + 4l^2 < l^2 - lL, \\ &\iff 0 < -3l^2 + 3lL, \\ &\iff 0 < 3l(L - l), \\ &\iff 0 < l(L - l),\end{aligned}$$

ce qui est vrai car $l > 0$ et $L > l$, ce qui provient de $L > 2l > l$.

— On a tout ensuite $x_2 \geq l$, puisque c'est successivement équivalent à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \left(l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \right) \geq l &\iff l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \geq 3l, \\ &\iff \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \geq 2l - L.\end{aligned}$$

Comme précédemment, si $2l - L \leq 0$, c'est vrai. Sinon, on a $2l - L > 0$ et puisque tout est positif, on peut élever au carré et on obtient successivement

$$\begin{aligned}l^2 + L^2 - lL \geq 4l^2 - 4lL + L^2 &\iff -3l^2 + 3lL \geq 0, \\ &\iff 3l(-l + L) \geq 0,\end{aligned}$$

ce qui est vrai grâce à (1.50).

•

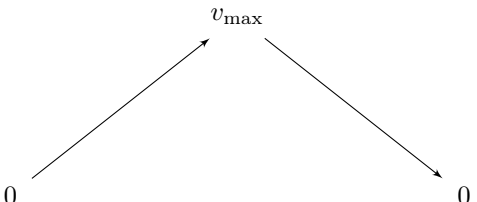
x	0	x_1	l
signe de $v'(x)$	+	0	-
$v(x)$			

TABLE 1.2. Tableau de variation de v

D'après (1.58), il suffit donc d'étudier le signe de v' sur l'intervalle $[0, l]$ qui contient x_1 , x_2 étant à l'extérieur de cet intervalle. On sait que v' donné par (1.52) est négatif entre les racines x_1 et x_2 et positif à l'extérieur. En particulier, v' est positif sur $[0, x_1]$ et négatif sur $[x_1, l]$.

On obtient donc le tableau de variation 1.2 pour le volume $v(x)$. On en déduit que ce volume est maximal pour x donné par x_1 , c'est-à-dire par (1.56a). De (1.51), on déduit l'expression du volume maximal :

$$v_{\max} = \frac{4}{27} \left(L + l - \sqrt{\Delta'} \right) \left(L - 2l - \sqrt{\Delta'} \right) \left(l - 2L - \sqrt{\Delta'} \right),$$

où Δ' est donné par (1.54).

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.32.

Exercice issu de [Mac17].

On pourra voir par exemple <https://lasoutdp1719.wordpress.com/2018/03/26/lemboutissage/>

- (1) Avant emboutissage, la feuille est de surface S et de volume $\mathcal{V} = eS$ où l'épaisseur e est constante. Après emboutissage, le volume vaut $\mathcal{V}' \approx e'S'$ où e' est la nouvelle épaisseur (supposée constante) et S' est la surface de la feuille (déformée). Par hypothèse, on a $e = e'$ et $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. On a donc $S = S'$ et ainsi la surface reste constante.
- (2)

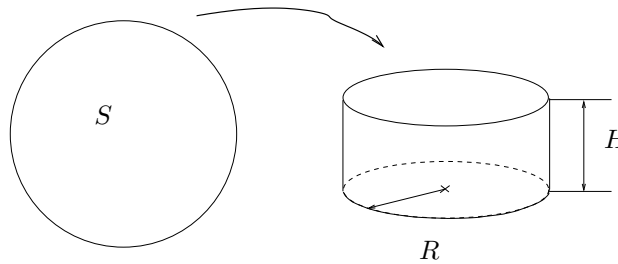


FIGURE 1.4. Transformation d'une surface circulaire (de surface S) en une casserole de hauteur H et de rayon R (emboutissage).

Après emboutissage, on a (voir figure 1.4) :

$$S = \underbrace{2\pi R \times H}_{\text{aire d'un rectangle de longueur } L = 2\pi R \text{ et de largeur } H} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{aire d'un cercle de rayon } R},$$

et donc

$$S = 2\pi RH + \pi R^2; \quad (1.59)$$

Le volume de la casserole vaut

$$v = \underbrace{\pi R^2}_{\text{aire d'un cercle de rayon } R} \times H,$$

et donc

$$v = \pi R^2 H. \quad (1.60)$$

On écrit cela sous la forme suivante, grâce à (1.59)

$$v = 2\pi RH \times \frac{R}{2} = (S - \pi R^2) \frac{R}{2}. \quad (1.61)$$

v est donc une fonction de R qui doit vérifier

$$\begin{aligned} R &\geq 0, \\ v &\geq 0, \end{aligned}$$

soit donc $R \geq 0$ et

$$S - \pi R^2 \geq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$0 \leq R \leq \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad (1.62)$$

On étudie donc la fonction v sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right]$. Notons que si x appartient à $\left]0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right[$, alors v est strictement positif et que $v(0)$ et $v\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$ sont nuls. Ainsi, v étant continue sur $\left[0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right]$, elle

admet nécessairement un maximum strictement positif (non nécessairement en unique point *a priori*) que nous allons déterminer. Cette fonction est dérivable et on a (en dérivant par rapport à R) :

$$\begin{aligned} v'(R) &= \left((S - \pi R^2) \frac{R}{2} \right)', \\ &= -2\pi R \frac{R}{2} + \left((S - \pi R^2) \frac{1}{2} \right), \\ &= -\pi R^2 + \frac{S}{2} - \frac{1}{2}\pi R^2, \end{aligned}$$

et donc

$$v'(R) = \frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi R^2. \quad (1.63)$$

La dérivée est nulle ssi

$$\frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi R^2 = 0$$

ce qui est équivalent à

$$R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

On vérifie que v' est strictement positive sur $]0, \sqrt{\frac{S}{3\pi}}[$ et strictement négative sur $]\sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \sqrt{\frac{S}{\pi}}[$ ce qui

R	0	$\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$	$\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
signe de v'	+	0	-
v	0	$v_{\max}$	0

TABLE 1.3. Tableau de variation de v

nous donne le tableau de variation 1.3. Le volume maximal est donné par

$$v_{\max} = v \left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right),$$

et donc

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \left(S - \pi \frac{S}{3\pi} \right) \frac{R}{2}, \\ &= \left(S - \frac{S}{3} \right) \frac{R}{2}, \\ &= \frac{2S}{3} \frac{R}{2}, \\ &= \frac{RS}{3}, \\ &= \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \end{aligned}$$

et donc

$$v_{\max} = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.33.

Exercice issu de [Mac17].

On pourra aussi consulter <https://xavier.hubaut.info/coursmath/2de/bison.htm>

- (1) (a) Si on considère les lois horaires d'un véhicule (évoluant le long d'un axe horizontal) d'accélération constante $-a$ (voir par exemple [Bas18, Chapitre 8]), on obtient pour l'accélération de la voiture, pour tout $t \geq 0$:

$$a(t) = -a,$$

et puisque que l'on suppose qu'au début du mouvement, la vitesse vaut v :

$$v(t) = -at + v,$$

et puisque que l'on suppose qu'au début du mouvement, l'abscisse est nulle :

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + vt.$$

L'instant t où le véhicule s'arrête correspond à $v(t) = 0$ soit $t = t_0 = v/a$ et donc

$$x(t_0) = -\frac{1}{2}a \frac{v^2}{a^2} + \frac{v^2}{a},$$

ce qui donne bien :

$$x(t_0) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}. \quad (1.64)$$

- (b) En négligeant les frottements de l'air, la seule force horizontale exercée sur la voiture est la force exercée par le sol sur les pneus, de norme F , et le PFD nous donne, pour une voiture à 4 roues et de masse M :

$$4F = Ma,$$

et donc

$$F = \frac{1}{4}Ma.$$

- (2) Pendant la durée τ , la voiture, animée de la vitesse v a parcouru la distance τv . On fait la somme de cette distance et de $x(t_0)$ donnée par (1.64). La distance λ qui sépare deux voitures est donc donnée par

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} + \tau v. \quad (1.65)$$



FIGURE 1.5. La file de voiture

(3) (a)

Nous devons compter le nombre de voitures qui passent par unité de temps. Soit donc Δt un intervalle de temps donné. Compter les voitures en un point donné est équivalent à se déplacer à la vitesse v par rapport à une file de voiture arrêtée. La distance entre deux voitures, compte tenu de la longueur moyenne d'une voiture égale à l , vaut $l + \lambda$. Pendant cet intervalle de temps donné, l'observateur a parcouru la distance $v\Delta t$. Une voiture "occupe" la place $l + \lambda$; donc le nombre de voiture est égal à $v\Delta t / (l + \lambda)$. En divisant cela par Δt et en utilisant (1.65), on obtient donc :

$$D(v) = \frac{v}{\frac{1}{2} \frac{v^2}{a} + \tau v + l}. \quad (1.66)$$

On observe que

$$D(0) = \lim_{v \rightarrow +\infty} D(v) = 0, \quad (1.67)$$

ce qui est conforme à l'intuition.

(b) Notons que si x appartient à $\mathbb{R}_+^*$, alors D est strictement positif et que l'on a (1.67). Ainsi, D étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut montrer que cela implique qu'elle admet nécessairement un maximum strictement positif (non nécessairement en unique point *a priori*) que nous allons déterminer.

L'application $v \mapsto D(v)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\begin{aligned} D'(v) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{v^2}{a} + \tau v + l - v \left(\frac{v}{a} + \tau \right)}{\left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{a} + \tau v + l \right)^2}, \\ &= \frac{l - \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}}{\left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{a} + \tau v + l \right)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$D'(v) \text{ est du signe de } l - \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}. \quad (1.68)$$

Ainsi, D' s'annule pour

$$v_0 = \sqrt{2al}, \quad (1.69)$$

est strictement positive sur $[0, v_0[$ et est strictement négative sur $]v_0, +\infty[$. On a aussi l'expression du début maximal donné par

$$\begin{aligned} D_{\max} &= D(v_0), \\ &= \frac{\sqrt{2al}}{2l + \sqrt{2al}\tau}, \end{aligned}$$

soit

$$D_{\max} = \frac{1}{\tau + \frac{2l}{\sqrt{2al}}}. \quad (1.70)$$

Voir le tableau de variation 1.4.

(c) Non corrigé

(4) Non corrigé

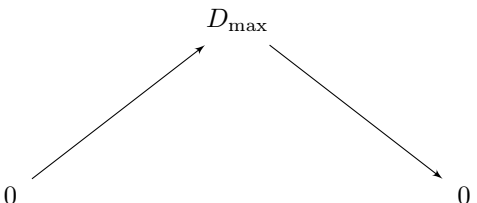
R	0	$\sqrt{2al}$	$+\infty$
signe de D'	+	0	-
D			

TABLE 1.4. Tableau de variation de D

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.34.

Exercice donné à l'examen du 13 novembre 2019.

La formule démontrée et d'autres mesures de la rotondité de la terre se trouvent sur

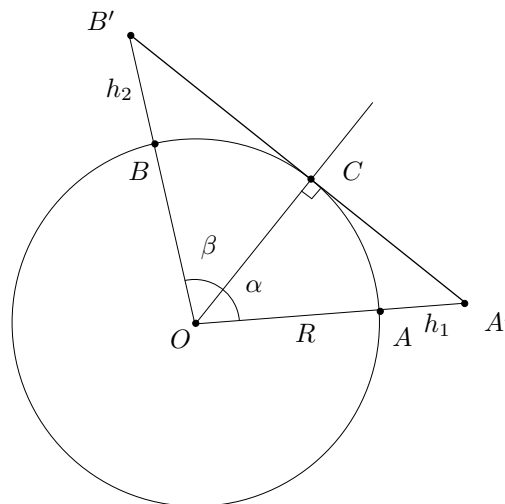
https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_terrestre

On pourra aussi consulter les url suivantes, sur des problèmes analogues :

<https://www.astuces-pratiques.fr/high-tech/une-preuve-etonnante-de-la-rotondite-de-la-terre>

<http://www.rts.ch/decouverte/sciences-et-environnement/maths-physique-chimie/probleme-du-mois/6709742-la-traversee-du-lac-leman-en-ligne-droite.html>

REMARQUE 1.6. Démontrons la formule donnée dans l'énoncé.

FIGURE 1.6. La terre, le points d'observation A et le point observé B .

Deux points A (Évian) et B (Lausanne) se trouvent à la distance d (sur la sphère). On se trouve à la distance h_1 au dessus de l'eau. Voir figure (1.6). Notons que la distance l correspondant à la distance entre A et C (sur la sphère) est la distance à laquelle se trouve l'horizon observable.

Dans le triangle rectangle OCA' , on a la relation

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + h_1}, \quad (1.71)$$

et puisque le nombre $R/(R + h_1)$ est dans $]0, 1[$ et α dans $]0, \pi/2[$, on a

$$\alpha = \arccos \frac{R}{R + h_1}. \quad (1.72)$$

Par définition de l , on a

$$l = R\alpha. \quad (1.73)$$

De (1.72) et (1.73), on déduit donc

$$l = R \arccos \frac{R}{R + h_1}. \quad (1.74)$$

Cette formule fournit la distance à laquelle se trouve l'horizon observable.

Avec les données de l'énoncé on obtient

$$l = 7.9863 \text{ km}. \quad (1.75)$$

Cette distance est bien inférieure à la distance d de l'énoncé et la suite du raisonnement est donc valide.

De l'autre côté de l'horizon, on obtient des formules analogues. (1.71) devient

$$\cos \beta = \frac{R}{R + h_2}, \quad (1.76)$$

et donc

$$R + h_2 = \frac{R}{\cos \beta},$$

et donc

$$h_2 = R \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right), \quad (1.77)$$

qui est positif. On a aussi, en notant L , la distance sur la sphère entre C et B :

$$l + L = d,$$

D'après la valeur de l , donnée par (1.75), dont on a remarqué qu'elle est inférieure à d , on a bien $L \geq 0$. On a aussi

$$L = R\beta.$$

En utilisant (1.74), on a

$$\beta = \frac{L}{R} = \frac{d - l}{R} = \frac{d}{R} - \arccos \frac{R}{R + h_1}.$$

Ainsi, grâce à (1.77), on obtient finalement

$$h_2 = R \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{d}{R} - \arccos \frac{R}{R + h_1} \right)} - 1 \right), \quad (1.78)$$

Avec les données de l'énoncé on obtient

$$h_2 = 1.5971 \text{ m}. \quad (1.79)$$

Cet effet s'observe réellement au bord du lac : on ne voit pas le bas de la digue en face ! C'est plus dur à observer sur la photo de l'énoncé.

- (1) (a) (i) La fonction $\cos$ définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et la fonction réciproque est $\arccos$, définie de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Cependant, la dérivée de cette fonction, donnée par

$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

n'est pas définie en $y = 1$. On ne peut donc écrire de développement limité de $\arccos$ en $y = 1$.

- (ii) Cependant, on peut former un développement asymptotique de la façon suivante. On écrit

$$\forall y \in [0, 1], \quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad (x = \arccos y \iff y = \cos(x)). \quad (1.80)$$

On peut écrire le développement limité usuel de $\cos$ au voisinage de $x = 0$ sous la forme

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \quad (1.81)$$

On écrit aussi

$$\forall y \in [0, 1], \quad y = 1 - u, \quad \text{où } u \in [0, 1], \quad (1.82)$$

et

$$y \rightarrow 1 \iff u \rightarrow 0. \quad (1.83)$$

On a donc d'après (1.80),

$$1 - u = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

et donc

$$u = \frac{x^2}{2} - o(x^2) = \frac{x^2}{2} (1 - \varepsilon(x)),$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. Nous noterons de façon générique toute telle fonction. Nous obtenons alors

$$x^2 = 2u(1 - \varepsilon(x))^{-1} = 2u(1 + \varepsilon(x)),$$

et puisque x et u sont positifs, on obtient

$$x = \sqrt{2u} \sqrt{1 + \varepsilon(x)} = \sqrt{2u} (1 + \varepsilon(x)),$$

ce qui permet de conclure en remplaçant $\varepsilon(x)$ par $\varepsilon(y)$ qui tend vers zéro quand x tend vers 0 et donc quand y tend vers 1.

On en déduit finalement le résultat suivant :

$$\forall y \in [0, 1], \quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad \left(x = \arccos y \implies x = \sqrt{2(1-y)}(1 + \varepsilon(y)), \right) \quad (1.84a)$$

avec

$$\lim_{y \rightarrow 1} \varepsilon(y) = 0. \quad (1.84b)$$

Nous nous servons de cela comme approximation et nous noterons de façon abusive :

$$\forall y \in [0, 1], \quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad \left(x = \arccos y \implies x \approx \sqrt{2(1-y)}, \right) \quad (1.85)$$

cette équation étant d'autant plus vraie que x est proche de zéro ou y proche de 1. Tous les développements limités intervenant plus loin seront, de la même façon, remplacés par des approximations où les termes en o sont négligés.

(b) On constate que h_1 est négligeable devant R de sorte que

$$\frac{R}{R+h_1} = \left(\frac{R+h_1}{R} \right)^{-1}$$

et donc

$$\frac{R}{R+h_1} = (1+\eta)^{-1}, \quad (1.86)$$

avec

$$\eta = \frac{h_1}{R} \text{ négligeable devant } 1. \quad (1.87)$$

Puisque l'on a

$$\frac{R}{R+h_1} = (1+\eta)^{-1} = 1 - \eta + o(\eta),$$

on a donc

$$\frac{R}{R+h_1} \approx 1 - \eta$$

et donc

$$\frac{R}{R+h_1} \approx 1 - \frac{h_1}{R}. \quad (1.88)$$

Ainsi, d'après (1.85)

$$\arccos\left(\frac{R}{R+h_1}\right) \approx \sqrt{2\left(1 - \left(1 - \frac{h_1}{R}\right)\right)} \approx \sqrt{\frac{2h_1}{R}}.$$

L'expression de h_2 (1.78) fournit donc

$$h_2 \approx R \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)} - 1 \right), \quad (1.89)$$

On continue les développements limités d'ordre 1 et leur remplacement par des approximations. On écrit, au voisinage de zéro

$$(1+v)^{-1} = 1 - v + o(v) \approx 1 - v,$$

$$\cos(w) = 1 - \frac{1}{2}w^2 + o(w^2) \approx 1 - \frac{1}{2}w^2.$$

Ainsi, puisque $\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}}$ est négligeable devant 1, on a d'après (1.89),

$$\begin{aligned}
 h_2 &\approx R \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \right)} - 1 \right), \\
 &\approx R \left(\left(\cos \left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \right) \right)^{-1} - 1 \right), \\
 &\approx R \left(\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \right)^2 \right)^{-1} - 1 \right), \\
 &\approx R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \right)^2 - 1 \right), \\
 &\approx \frac{R}{2} \left(\frac{d}{R} - \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \right)^2,
 \end{aligned}$$

et donc, après simplification

$$h_2 = \frac{1}{2R} \left(d - \sqrt{2h_1 R} \right)^2. \quad (1.90)$$

Avec cette approximation, on obtient numériquement

$$h_2 = 1.5971 \text{ m}, \quad (1.91)$$

ce qui est apparemment identique à (1.79). L'écart entre les deux distances (en m.) est très faible :

$$\varepsilon = 2.178 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (1.92)$$

REMARQUE 1.7. On peut tracer h_2 pour d décrivant l'intervalle $[l, l + \lambda]$, où l est donnée par (1.74), et pour laquelle, h_2 est nul.

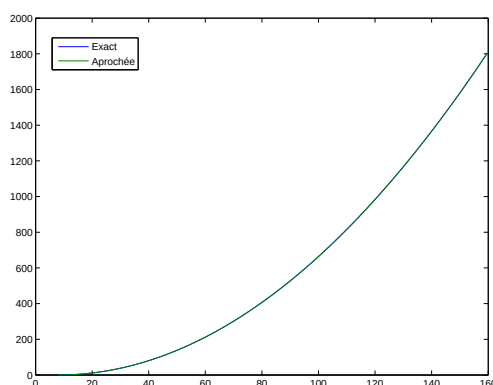


FIGURE 1.7. La courbe $h_2(d)$ (exacte et approchée).

Voir la figure 1.7, sur laquelle on constate que les valeurs exacte et approchée donnent les mêmes courbes.

- (2) Citons deux extraits différents issus et adaptés de <https://planet-terre.ens-lyon.fr/article/Terre-ronde-Eratosthene.xml> correspondant à deux mesures du périmètre de la Terre.

(a)

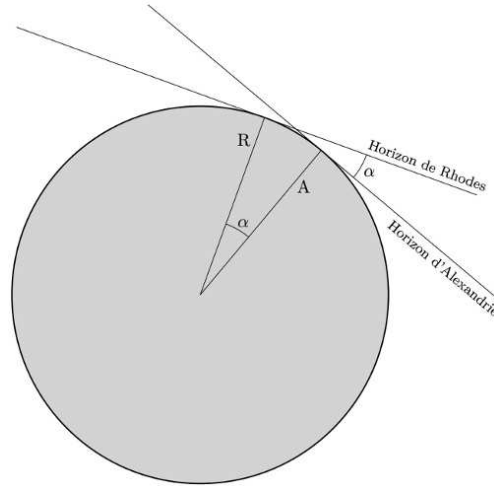


FIGURE 1.8. Principe de la mesure de la circonférence terrestre par Posidonius.

Voir la figure 1.8.

L'estimation de la taille de la Terre est effectivement tentée par les grecs en observant l'heure de lever des étoiles dans deux lieux supposés sur le même méridien, Rhodes ($36^{\circ}10'00''$ N, $28^{\circ}0'0''$ E) et Alexandrie ($31^{\circ}11'53''$ N, $29^{\circ}55'9''$ E). L'étoile Canopus se prête particulièrement bien à ce calcul. Lorsqu'elle culmine à 0° à Rhodes (brève apparition et disparition sur le même point de l'horizon), elle culmine alors à $7,5^{\circ}$ à Alexandrie à cette même date. Les deux cités sont donc séparées par $1/48$ ème ($7,5/360$) de circonférence terrestre. Ce calcul basé sur l'observation de Canopus est attribué au stoïcien Posidonius d'Apamée (135-51 av. J.-C.) par un autre philosophe stoïcien, Cléomède.

On rappelle que l'on a effet les formules suivantes, en notant l la distance entre les deux villes, L le périmètre de la Terre, R le rayon terrestre et α l'angle $7,5^{\circ}$, exprimé en radian :

$$l = \alpha R,$$

$$L = 2\pi R$$

ce qui fournit par division

$$L = l \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (1.93)$$

ou, si α est exprimé en degrés :

$$L = l \frac{360}{\alpha}. \quad (1.94)$$

Ici, on a donc, avec $l = 40000/48 = 833$ km :

$$L = 833 \times \frac{360}{7,5}$$

soit

$$L = 40\,983 \text{ km}. \quad (1.95)$$

Cela suppose connue bien sûr la distance entre les deux villes !

(b)

L'importance des travaux d'Archimède (287–212 av. J.-C.) tient à ce que, en raisonnant en ingénieur pour développer des mathématiques appliquées à des problèmes pratiques, il a pu s'affranchir de la distinction épistémè / technè et de l'interdiction tacite d'user des mathématiques pour expliquer les phénomènes naturels. Archimède est notamment l'un des savants qui proposent une valeur à la circonférence de la Terre, qu'il estime à 300 000 stades (soit 47 250 km en se basant sur le stade égyptien de 157,5 m). Ses manuscrits seront édités par Ératosthène (v. 276 -v. 194 av. J.-C.), précepteur du roi Ptolémée IV et conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie à l'âge de 40 ans. Bien que l'on ne connaisse que quelques fragments de l'œuvre scientifique d'Ératosthène, il serait l'initiateur de la division du globe par un système de lignes méridiennes et latitudinales. C'est surtout à lui que l'on attribue, à la suite de Cléomède, le calcul d'une valeur correcte de la circonférence terrestre, par le raisonnement et la mesure résumés sur la figure 1.9.

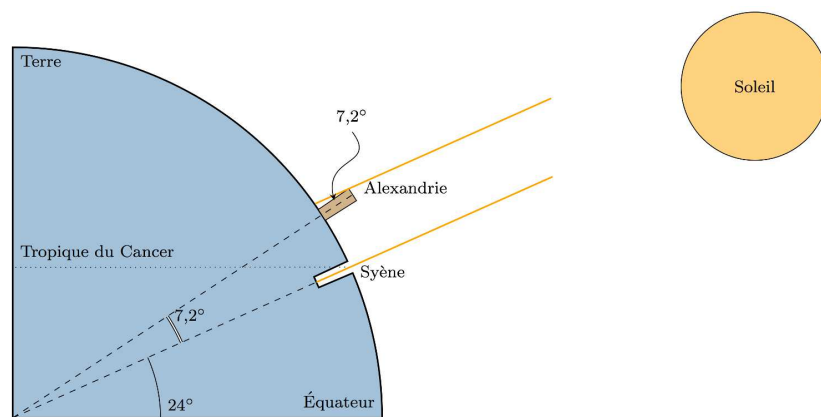


FIGURE 1.9. Principe de la mesure de la circonférence terrestre par Ératosthène.

Ce raisonnement est le suivant (voir aussi la figure 1.9. :

- Ératosthène considère que Syène (positionnée sur le tropique du Cancer) et Alexandrie sont alignées sur le même méridien, ce que l'on sait aujourd'hui très approximatif (Syène se situe à $32^{\circ}53'31''\text{E}$, Alexandrie à $29^{\circ}55'9''\text{E}$, soit 3° de différence, c'est-à-dire 12 minutes de décalage horaire).
- Les rayons du Soleil sont supposés parallèles en raison de l'éloignement de l'astre (cette hypothèse est majeure, puisqu'un Soleil de petite taille et peu éloigné d'une Terre plate produirait aussi des rayons inclinés à Alexandrie : le raisonnement d'Eratosthène est donc "chargé de théorie", celle d'une Terre sphérique) ; les droites qui coupent ces droites parallèles donnent des angles alternes égaux.
- Considérant que les arcs qui sous-tendent des angles égaux sont semblables, Ératosthène mesure l'angle de l'ombre du gnomon à Alexandrie à l'heure où, à Syène, le Soleil au zénith éclaire le fond d'un puits.

Le gnomon (voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Gnomon>) est ici un simple baton planté dans le sol, permettant ici la mesure de l'angle $\alpha = 7,2^{\circ}$. Là-encore, on utilise la formule (1.94) et la distance connue entre les deux villes Alexandrie et Syène.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.35.

(1) Grâce au cours, on obtient

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est même valable à l'ordre 3 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

(2) On en déduit quand x est "proche de 0" :

$$\begin{aligned}\sin(x) &\approx S(x), \\ \cos(x) &\approx C(x),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}S(x) &= x - \frac{1}{6}x^3, \\ C(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2,\end{aligned}$$

On utilise cela pour approcher les valeurs de $\cos(10^{-3})$ et $\sin(10^{-3})$

(3) Numériquement, on trouve :

$$\begin{aligned}C(x) &= 9.999995000000000 \times 10^{-1}, \\ \cos x &= 9.999995000000417 \times 10^{-1}, \\ |\cos x - C(x)| &= 4.1633 \times 10^{-14}, \\ S(x) &= 9.999998333333334 \times 10^{-4}, \\ \sin x &= 9.999998333333417 \times 10^{-4}, \\ |\sin x - S(x)| &= 8.2399 \times 10^{-18},\end{aligned}$$

ce qui confirme les faibles écarts.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.36.

REMARQUE 1.8. Les sources matlab cités dans ce corrigé sont disponibles sur http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/approximation_sinus_cosinus.zip.

(1) (a) On applique la formule de Taylor Lagrange en zéro à l'ordre $2n+1$ à la fonction $\cos$ à l'ordre $2n+2$ à la fonction $\sin$:

$$\begin{cases} \cos x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}, \\ \sin x = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi')}{(2n+3)!}, \end{cases} \quad (1.96)$$

où ξ et ξ' appartiennent à $]0, x[$ (ou $]x, 0[$). En zéro, les dérivées d'ordre pair de la fonction cosinus valent ± 1 et ses dérivées d'ordre impair sont nulles. De même, en zéro, les dérivées d'ordre impair de la fonction sinus valent ± 1 et ses dérivées d'ordre pair sont nulles. Les dérivées des fonctions

sinus et cosinus sont majorées par un. On en déduit donc les formules usuelles : pour tout entier n et pour tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \quad (1.97)$$

où

$$R_n^c \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad R_n^s \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}. \quad (1.98)$$

REMARQUE 1.9. On peut aussi démontrer les majorations des restes (1.98) en écrivant que les fonctions sinus et cosinus sont développables en série entière, qu'elles constituent des séries alternées et que le reste est inférieur en valeur absolue au premier terme négligé.

(b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases} \quad (1.99)$$

Selon (1.98), on a

$$|\cos x - C_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad |\sin x - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}. \quad (1.100)$$

ce qui signifie que, pour tout n et pour tout x , $C_n(x)$ et $S_n(x)$ constituent des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ avec une erreur respectivement inférieure à $(|x|^{2n+2})/(2n+2)!$ et $(|x|^{2n+3})/(2n+3)!$.

(2) On suppose dans toute cette question que $x = 10^{-3}$.

(a) En partant de $n = 0$, on essaye différentes valeurs de n de façon à obtenir

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-9}, \quad \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 10^{-9} \quad (1.101)$$

On obtient

$$n_1 = 1. \quad (1.102)$$

(b) Pour $n = n_1 = 1$, on a

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!}. \end{cases} \quad (1.103)$$

(c) On obtient numériquement pour $x = 10^{-3}$

$$C_n(x) = 9.999995000000000 \times 10^{-1}, \quad (1.104)$$

$$\cos x = 9.999995000000417 \times 10^{-1}, \quad (1.105)$$

$$|\cos x - C_n(x)| = 4.1633 \times 10^{-14}, \quad (1.106)$$

$$S_n(x) = 9.999998333333334 \times 10^{-4}, \quad (1.107)$$

$$\sin x = 9.999998333333417 \times 10^{-4}, \quad (1.108)$$

$$|\sin x - S_n(x)| = 8.2399 \times 10^{-18}. \quad (1.109)$$

Ces calculs ont été réalisés sous matlab.

On pourra utiliser le script fourni `calculloc`. Voir aussi les fonctions matlab (qui sont appelées par `calculloc`), `determinnloc`, `approxncos`, `approxnsin`, `dlncos` et `dlncos`.

Les égalités (1.106) et (1.109) nous confirment que l'erreur commise est bien inférieure à 10^{-9} .

(3) On suppose dans toute cette question que $x \in [0, \pi/4]$.

(a) Puisque $|x| \leq \pi/4$, les inégalités

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}, \quad \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}.$$

sont vraies si les inégalités suivantes sont vraies :

$$\frac{1}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!}, \quad \frac{|x|}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!}.$$

La seconde inégalité est équivalente à

$$|x| \leq 2n+3,$$

ce qui est vrai puisque $|x| \leq \pi/4 \leq 3 \leq 2n+3$. On a donc, pour tout $x \in [0, \pi/4]$,

$$\boxed{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}}, \quad (1.110a)$$

$$\boxed{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}}. \quad (1.110b)$$

(b) On vérifie numériquement que pour $n_2 = 5$, on a

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n_2+2} \frac{1}{(2n_2+2)!} \leq 10^{-9}.$$

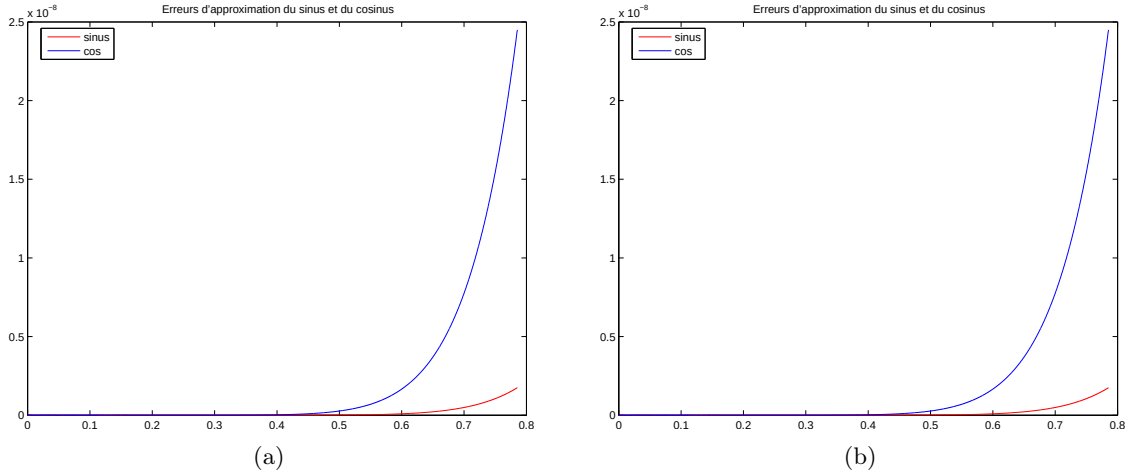
Grâce à (1.97), (1.98) et (1.110), on a donc pour $n = n_2 = 5$, pour tout $x \in [0, \pi/4]$

$$\boxed{\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases}} \quad (1.111)$$

(c) Pour $n = n_2 = 5$, on a

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}. \end{cases} \quad (1.112)$$

x	$ \cos x - C_n(x) $	$ \sin x - S_n(x) $
10^{-3}	0	0
$\pi/7$	1.3922×10^{-13}	4.8294×10^{-15}
$\pi/4$	1.1462×10^{-10}	6.9280×10^{-12}

TABLE 1.5. Les erreurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ pour $n = n_2 = 5$ et $x \in \{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$.FIGURE 1.10. les courbes $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ sur $[0, \pi/4]$ n étant choisi de telle sorte que l'erreur soit majorée par $\varepsilon = 10^{-3}$ (figure (a)) et $\varepsilon = 10^{-6}$ (figure (b)).

Dans le tableau 1.5 ont été indiquées les erreurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ pour $x \in \{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$ (calculs réalisés sous matlab).

On pourra utiliser le script fourni `calculglob`. Voir aussi les fonctions matlab (qui sont appelées par `calculglob`), `determinnglob`, `approxncos`, `approxnsin`, `dlnccos` et `dlnccos`.

Ces erreurs sont bien inférieures à 10^{-9} ; on constate aussi que, plus x est petit, plus l'erreur est petite.

On peut s'intéresser au tracé des fonctions qui, pour n fixé, associe à $x \in [0, \pi/4]$ les valeurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$.

Voir figures 1.10. Sur ces figures, on a choisi n de façon que l'erreur soit majorée par $\varepsilon > 0$.

On a plutôt l'habitude de tracer le logarithme en base 10 de cette erreur, ce qui permet de "dilater" l'échelle. Voir les figures 1.11, où on a choisi n de façon que l'erreur soit majorée par $\varepsilon > 0$ (Voir aussi tableau 1.6). On constate que l'erreur ne descend pas en deçà de 10^{-16} , qui correspond au zéro machine (sous matlab).

On pourra aussi consulter la fonction qui a fournit ce graphe (`tracelogerreursincos`) ainsi que la valeur de n correspondant à la valeur de ε (donné dans le tableau 1.6).

- (d) Dans la question 2, nous avons choisi n pour que $C_n(x)$ et $S_n(x)$ fournissent des approximations de $\cos x$ et $\sin x$ à x fixé. Nous constatons que $n = 1$ suffisait (pour une erreur majorée par 10^{-9}). En revanche dans la question 3, pour la même précision, il fallait prendre $n = 5$, plus élevé. Cela s'explique par le fait que dans le second cas, la majoration est valable pour tout élément x de $[0, \pi/4]$ (on parle de majoration uniforme) et donc plus stricte. De façon numérique, dans le premier cas, le fait que x soit "très petit" explique la petite valeur de n : dans le reste $|x|^{2n+2}/((2n+2)!)$ et

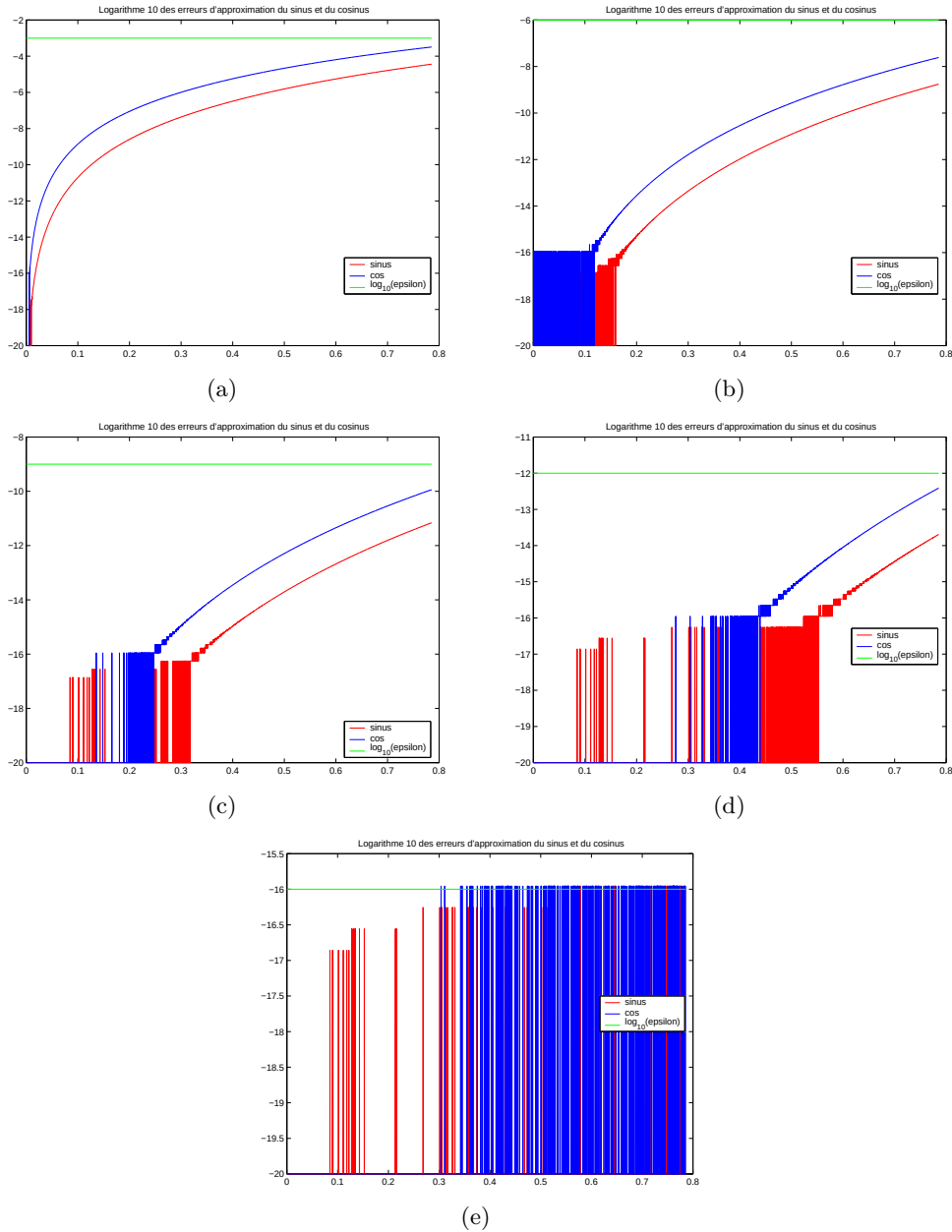


FIGURE 1.11. les courbes $\log_{10}(|\cos x - C_n(x)|)$ et $\log_{10}(|\sin x - S_n(x)|)$ sur $[0, \pi/4]$ n étant choisi de telle sorte que l'erreur soit majorée par $\varepsilon = 10^{-3}$ (figure (a)), $\varepsilon = 10^{-6}$ (figure (b)), $\varepsilon = 10^{-9}$ (figure (c)), $\varepsilon = 10^{-12}$ (figure (d)) et $\varepsilon = 10^{-16}$ (figure (e)).

$|x|^{2n+3}/((2n+3)!)$, quand n grandit, $|x|^{2n+2}$ et $|x|^{2n+3}$ tend très vite vers zéro. En revanche, dans le second cas, le reste $|x|^{2n+2}/((2n+2)!)$ est remplacé par $(\pi/4)^{2n+2}/((2n+2)!)$ et $(\pi/4)^{2n+2}$ tend vers zéro moins vite que $|x|^{2n+2}$.

- (4) (a) La majoration d'erreur proposée en question 3 n'est valable que pour $x \in [0, \pi/4]$. Si x appartient à $\mathbb{R}$, les propriétés de périodicité et de symétrie permettent de ramener le calcul au calcul du sinus et du cosinus sur $[0, \pi/4]$:

ε	n
10^{-3}	2
10^{-6}	4
10^{-9}	5
10^{-12}	6
10^{-16}	8

TABLE 1.6. Valeurs des entiers n qui permettent une erreur inférieure à ε sur $[0, \pi/4]$.

- si $x \in \mathbb{R}$, on ramène, par périodicité, au calcul sur $[0, 2\pi[$ (voir ensuite cas suivant) ;
- si $x \in [\pi, 2\pi[$, on ramène, par symétrie autour de π , au calcul de sur $[0, \pi[$ (voir ensuite cas suivant) ; si $x \in [0, \pi[$, voir cas suivant ;
- si $x \in [\pi/2, \pi[$, on ramène, par symétrie autour de $\pi/2$, au calcul de sur $[0, \pi/2[$ (voir ensuite cas suivant) ; si $x \in [0, \pi/2[$, voir cas suivant ;
- si $x \in [\pi/4, \pi/2[$, on ramène, par symétrie autour de $\pi/4$, au calcul de sur $[0, \pi/4[$ et c'est fini ! si $x \in [0, \pi/4[$, c'est fini !

(b)

x	$ \cos x - C_n(x) $	$ \sin x - S_n(x) $
$\pi/3$	8.8506×10^{-13}	3.5693×10^{-14}
3.2	1.2490×10^{-16}	0
6	2.2204×10^{-16}	5.5511×10^{-16}

TABLE 1.7. Les erreurs $|\sin x - S_n(x)|$ et $|\cos x - C_n(x)|$ pour $n = n_2 = 5$ et $x \in \{\pi/3, 3.2, 6\}$.

Dans le tableau 1.7 ont été indiquées les erreurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ pour $x \in \{\pi/3, 3.2, 6\}$ (calculs réalisés sous matlab).

Ces erreurs sont bien inférieures à 10^{-9} .

On laisse vérifier au lecteur, que si on ne prend pas la précaution de se ramener à l'intervalle $[0, \pi/4]$, les approximations proposées ne satisfont plus une erreur inférieure à 10^{-9} .

Équations différentielles ordinaires

Ces corrigés sont issus et adaptés de [Bas22a, correction de TD 6].

Équations différentielles ordinaires d'ordre un et deux à coefficients constants

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre un

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.1.

On obtient successivement :

(1)

$$y = 6 \frac{e^{-3/2 t}}{e^{-6}},$$

(2)

$$y = y_0 e^{-\frac{b(-t_0+t)}{a}},$$

(3)

$$y = \left(\int_{t_0}^t f(s) e^{\frac{bs}{a}} ds + y_0 e^{\frac{bt_0}{a}} a \right) e^{-\frac{bt}{a}} a^{-1}. \quad (2.1)$$

La formule (2.1), établie ici par matlab symbolique est appelée formule de Duhamel. On pourra consulter par exemple l'équation (2.15) du cours.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.2.

- (1) (a) La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle de l'énoncé est donnée par

$$y_g(t) = C e^{2t}, \quad (2.2)$$

où C est une constante.

Pour résoudre l'équation différentielle de l'énoncé en cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme, on choisit ce polynôme du second degré sous la forme

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C,$$

que l'on réinjecte dans l'équation différentielle de l'énoncé, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 &= -y_p'(t) + 2y_p(t), \\ &= -(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C), \\ &= 2At^2 + (2B - 2A)t + 2C - B, \end{aligned}$$

ce qui fournit, par identification des deux polynômes, le système (triangulaire) de trois équations linéaires en A , B et C que l'on résoud facilement. On obtient

$$A = 1/2,$$

$$B = 1,$$

$$C = 1,$$

et donc

$$y_p(t) = 1/2 t^2 + t + 1. \quad (2.3)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle de l'énoncé est donnée par la somme de (2.2) et (2.3), soit

$$y(t) = Ce^{2t} + (1/2 t^2 + t + 1), \quad (2.4)$$

où C est une constante.

- (b) Pour résoudre l'équation différentielle de l'énoncé en utilisant la variation de la constante, on dérive (2.2) en supposant que C devient une fonction. On a donc

$$y(t) = C(t)e^{2t}, \quad (2.5)$$

et donc

$$y'(t) = C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t},$$

et donc, d'après (2.5), il vient en réinjectant tout cela dans l'équation différentielle de l'énoncé :

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 &= -(C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t}) + 2C(t)e^{2t}, \\ &= -C'(t)e^{2t} - 2C(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t}, \end{aligned}$$

ce qui fournit donc

$$-C'(t)e^{2t} = 1 + t + t^2,$$

et donc

$$C'(t) = -e^{-2t} (1 + t + t^2). \quad (2.6)$$

On peut donc écrire, en prenant par exemple la primitive du second membre de (2.6) qui s'annule en $t = 0$:

$$C(t) = c - \int_0^t (1 + u + u^2) e^{-2u} du, \quad (2.7)$$

où c est une "vraie" constante. On calcule l'intégrale de cette équation en faisant une double intégration par partie, pour abaisser le degré polynôme qui est devant l'exponentielle et on obtient

$$\int_0^t (1 + u + u^2) e^{-2u} du = 1 - e^{-2t} - e^{-2t}t - 1/2 e^{-2t}t^2, \quad (2.8)$$

et donc, d'après (2.7)

$$C(t) = c - 1 + e^{-2t} + e^{-2t}t + 1/2 e^{-2t}t^2,$$

et, en réinjectant dans (2.5), on obtient

$$y(t) = (c - 1 + e^{-2t} + e^{-2t}t + 1/2 e^{-2t}t^2) e^{2t},$$

ce qui donne :

$$y(t) = ce^{2t} - e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2. \quad (2.9)$$

où c est une constante et donc

$$y(t) = (c - 1)e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2. \quad (2.10)$$

- (2) Si on compare les deux solutions obtenues aux questions (1a) et (1b), définies par (2.4) et (2.10), elles semblent être *a priori* différentes. La constante $c - 1$ de (2.10) peut être renommée C et on obtient donc bien la solution donnée par (2.4) (où C est une constante).

REMARQUE 2.1. Notons que, comme dans la question (1b), l'expression de y donnée par (2.9) fait apparaître y comme la somme de deux termes :

- ce^{2t} qui est la solution générale de l'EHA (donnée par (2.2))
- $-e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2$, qui est une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

Une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé est aussi donnée par $1 + t + 1/2 t^2$ puisque $-e^{2t}$ est solution de l'EHA ! Autrement dit, on retrouve aussi la solution donnée par (2.4) (où C est une constante). Bref, la méthode de la variation de la constante fournit des solutions particulières, "à une exponentielle près", elle-même solution de l'EHA.

- (3) Si on considère y défini par (2.4) et qu'on écrit la condition initiale de l'énoncé, on obtient

$$2 = y(1) = Ce^2 + (5/2),$$

et donc

$$C = (2 - 5/2)e^{-2} = -\frac{1}{2}e^{-2},$$

et donc

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + (1/2 t^2 + t + 1),$$

Définir la solution correspondant à la condition initiale $y(1) = 2$. Si on utilisait l'expression donnée par (2.10), on aurait naturellement exactement la même expression !

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.3.

On obtient

- (1) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-3/2 t};$$

(c est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche une fonction particulière sous la forme Ke^t où K est une constante et si on réinjecte cette fonction dans l'équation différentielle, on obtient une équation en K (après simplification par l'exponentielle) que l'on résoud.} :

$$y_p(t) = 1/5 e^t;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_g + y_p$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-3/2 t} + 1/5 e^t;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c , ce qui donne

$$y(t) = (2 - 1/5 e^1) e^{3/2 t} e^{-3/2} + 1/5 e^t.$$

- (2) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-3/2 t};$$

(c est une constante quelconque), la solution générale de l'équation différentielle obtenue par la méthode de la variation de la constante {Plus précisément, cette double intégration par partie fournira une équation contenant la valeur de la primitive recherchée ou l'intégrale recherchée se calculera très facilement en passant en notation exponentielle complexe.} :

$$y(t) = ce^{-3/2 t} + 3/13 \cos(t) + 2/13 \sin(t).$$

Ici, on pourrait déterminer la valeur de c grâce à la condition initiale.

- (3) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-3/2t};$$

(c est une constante quelconque), la solution générale de l'équation différentielle obtenue par la méthode de la variation de la constante {Plus précisément, cette double intégration par partie fournira une équation contenant la valeur de la primitive recherchée ou l'intégrale recherchée se calculera très facilement en passant en notation exponentielle complexe.} :

$$y(t) = ce^{-3/2t} + 3/13 \cos(t) + 2/13 \sin(t);$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c , ce qui donne

$$y(t) = (a - 3/13)e^{-3/2t} + 3/13 \cos(t) + 2/13 \sin(t).$$

- (4) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-t};$$

(c est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 2 du type $At^2 + Bt + C$ et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de trois équations en A , B et C que l'on résoud.} :

$$y_p(t) = 1 - t + t^2;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_g + y_p$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-t} + 1 - t + t^2.$$

Ici, on pourrait déterminer la valeur de c grâce à la condition initiale.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.4.

- (1) On obtient la même solution que celle déjà calculée dans le point 1 page précédente de l'exercice 2.3.
- (2) On obtient la même solution que celle déjà calculée dans le point 3 de l'exercice 2.3. On achevera le calcul par une double intégration par partie ou on passera en notation exponentielle complexe comme dans le point 3 de l'exercice 2.3.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.5.

On cherchera une solution particulière sous la forme $\hat{y}(t) = Ke^{\gamma t}$ où K est un réel. On a

$$\hat{y}'(t) = K\gamma e^{\gamma t},$$

et si on réinjecte $\hat{y}$ et $\hat{y}'$ dans l'équation différentielle de l'énoncé, on obtient

$$aK\gamma e^{\gamma t} + bKe^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$

et donc

$$e^{\gamma t}(aK\gamma + bK - 1) = 0.$$

Comme $e^{\gamma t}$ est non nul, on a donc

$$aK\gamma + bK - 1 = 0$$

soit

$$K(a\gamma + b) = 1 \tag{2.11}$$

Puisque $a \neq 0$, nous avons deux cas possibles.

(1) Si

$$\gamma \neq -\frac{b}{a}. \quad (2.12)$$

alors, la seule solution de (2.11) est donnée par

$$K = \frac{1}{a\gamma + b}. \quad (2.13)$$

Ainsi, on a

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{a\gamma + b} e^{\gamma t}. \quad (2.14)$$

À cette solution particulière, il faut ajouter la générale de l'équation différentielle homogène associée, qui est

$$y_g(t) = ce^{-b/at} \quad (2.15)$$

où c est une constante. La solution est donc donnée par

$$y(t) = ce^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a\gamma + b} e^{\gamma t}, \quad (2.16)$$

c étant déterminée par la condition initiale.

(2) Si

$$\gamma = -\frac{b}{a}. \quad (2.17)$$

alors, (2.11) n'a pas de solution et la recherche de la solution particulière ne marche pas ici.

Proposons deux méthodes :

(a) On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. On utilise (2.15) en supposant que c est une fonction. On a donc

$$y(t) = c(t)e^{-\frac{b}{a}t}, \quad (2.18)$$

et

$$y'(t) = c'(t)e^{-\frac{b}{a}t} - \frac{b}{a}c(t)e^{-\frac{b}{a}t}$$

et si on réinjecte dans l'équation différentielle, on a donc

$$e^{\gamma t} = e^{-\frac{b}{a}t} = ac'(t)e^{-\frac{b}{a}t} - a\frac{b}{a}c(t)e^{-\frac{b}{a}t} + bc(t)e^{-\frac{b}{a}t}$$

et donc

$$ac'(t)e^{-\frac{b}{a}t} = e^{-\frac{b}{a}t}$$

d'où

$$c'(t) = \frac{1}{a},$$

et

$$c(t) = \frac{t}{a} + c,$$

où c est une (vraie) constante. Ainsi, d'après (2.18), on a

$$y(t) = \left(\frac{t}{a} + c\right) e^{-\frac{b}{a}t}, \quad (2.19)$$

c étant déterminée par la condition initiale.

- (b) On peut aussi rechercher une solution particulière $\widehat{y}(t) = (\alpha t + \beta) e^{\gamma t}$ où α et β sont deux réels. On a

$$\widehat{y}'(t) = (\gamma(\alpha t + \beta) + \alpha) e^{\gamma t},$$

et si on réinjecte $\widehat{y}$ et $\widehat{y}'$ dans l'équation différentielle de l'énoncé, on obtient

$$(a\gamma\alpha t + a\gamma\beta + a\alpha + b\alpha t + b\beta) e^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$

et donc,

$$(\alpha t(a\gamma + b) + \beta(a\gamma + b) + a\alpha) e^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$

et puisque $a\gamma + b = 0$ (d'après (2.17)), on a

$$(a\alpha) e^{\gamma t} = e^{\alpha t}$$

et donc

$$a\alpha = 1,$$

soit encore,

$$\alpha = \frac{1}{a}.$$

Ainsi, en choisissant β (non déterminé) nul, on a

$$\widehat{y}(t) = \frac{t}{a} e^{\gamma t} = \frac{t}{a} e^{-b/at},$$

et en y ajoutant la solution générale de l'EHA donnée par (2.15), on a

$$\widehat{y}(t) = \frac{t}{a} e^{-b/at} + c e^{-b/at},$$

et on retrouve donc (2.19).

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.6.

Pour déterminer l'unique solution de l'équation différentielle

$$ay' + by = 0, \tag{2.20}$$

où a est un réel non nul et b un réel quelconque, on utilise la même méthode que [Bas22b, section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf> rédigée ci-dessous.

On considère la fonction C définie par

$$C(t) = e^{\frac{b}{a}t} y(t). \tag{2.21}$$

On a alors successivement

$$\begin{aligned} C'(t) &= \left(e^{\frac{b}{a}t} y(t) \right)', \\ &= \frac{b}{a} e^{\frac{b}{a}t} y(t) + e^{\frac{b}{a}t} y'(t), \end{aligned}$$

et donc

$$C'(t) = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}t} (ay'(t) + by(t)). \tag{2.22}$$

Ainsi, d'après (2.22), y est solution de (2.20) ssi

$$C'(t) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$z(t) = c,$$

où c est une constante. D'après (2.21), c'est donc équivalent à

$$y(t) = c e^{-\frac{b}{a}t}.$$

Modèles démographiques

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.7.

(1) (a) D'après l'équation (2.4) du cours, on a

$$N(t) = Ce^{rt},$$

où C est une constante déterminée par la condition initiale (2.2b) de l'énoncé qui donne

$$N_0 = Ce^{rt_0},$$

puis

$$C = N_0 e^{-rt_0}$$

et

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N_0 e^{-rt_0} e^{rt},$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0) e^{r(t-t_0)}. \quad (2.23)$$

(b) On a clairement les résultats suivants :

(i) Si $r < 0$, N est positive et décroissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$;(ii) Si $r = 0$, N est constante (et égale à N_0) ;(iii) Si $r > 0$, N est positive et croissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$;

(c) (i) D'après la définition (1.10) du cours de la dérivée, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t).$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}. \quad (2.24)$$

(ii) D'après l'équation (2.2a) de l'énoncé, $\frac{N'(t)}{N(t)}$ vaut r et on a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = r. \quad (2.25)$$

REMARQUE 2.2. On pouvait aussi remarquer que, d'après (2.23) :

$$\begin{aligned} \frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)} &= \frac{N(t_0)e^{r(t+h-t_0)} - N(t_0)e^{r(t-t_0)}}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\ &= \frac{(N(t_0)e^{r(t-t_0)})(e^{rh} - 1)}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\ &= \frac{e^{rh} - 1}{h}. \end{aligned}$$

Cela tend vers la dérivée de la fonction $h \mapsto e^{rh}$ en zéro qui vaut r . On peut aussi utiliser le développement limité de l'annexe A du cours et écrire, de façon strictement équivalente quand h tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \frac{e^{rh} - 1}{h} &= \frac{1 + rh + o(h) - 1}{h}, \\ &= \frac{rh + o(h)}{h}, \\ &= r + o(1), \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = r,$$

et on retrouve (2.25).

◇

D'après (2.25), l'équation différentielle (2.2a) de l'énoncé traduit donc un modèle où le taux de croissance instantané défini par (2.24) est constant, situation déjà rencontrée dans l'exercice de TD 2.13 (avec $r < 0$) ou [Bas22c, l'exercice de TD 11.7] (avec $r > 0$).

(2) (a) Si $b = 0$, l'équation différentielle (2.4) de l'énoncé est identique à l'équation différentielle (2.2) de l'énoncé. On renvoie donc à la correction de la question 1 dans ce cas-là.

(b) (i) Si on suppose que N est constante et vérifie la condition initiale (2.2b) de l'énoncé, on a $N = N_0$ et on a donc

$$0 = N'(t) = aN_0 \left(1 - \frac{N_0}{K}\right).$$

et donc, puisque N_0 est non nulle, on a $1 - \frac{N_0}{K} = 0$ et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = K. \quad (2.26)$$

(ii) Puisque N ne s'annule pas, on peut poser $v' = 1/N$. On a alors $v' = -N'/N^2$ puis, en utilisant l'équation différentielle (2.5) de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{aN}{N^2} \left(1 - \frac{N}{K}\right), \\ &= -a \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K}\right), \\ &= -av + \frac{a}{K}, \end{aligned}$$

et on obtient donc bien l'équation différentielle (2.6) de l'énoncé.

(iii) On résout l'équation (2.6) de l'énoncé exactement comme dans l'exemple 2.5 page 19 du cours. La solution de l'équation homogène associée $v' + av = 0$ est donnée par $v(t) = Ce^{-at}$. La solution constante de l'équation différentielle (2.6) de l'énoncé est donnée par $av = \frac{a}{K}$, soit $v = 1/K$ et donc la somme de ces deux applications fournit la solution de l'équation différentielle (2.6) de l'énoncé :

$$v(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{K},$$

(iv) Donc, en revenant à $N = 1/v$, on a

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{1}{K}}. \quad (2.27)$$

La condition initiale (2.2b) de l'énoncé donne

$$N_0 = \frac{1}{Ce^{-at_0} + \frac{1}{K}}.$$

et donc, il vient

$$C = e^{at_0} \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)$$

et en réinjectant dans (2.27), on a

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at}e^{at_0} \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{K}},$$

ce qui est équivalent à l'équation (2.8) de l'énoncé.

(v)(A) Si on fait l'hypothèse (2.9) de l'énoncé, alors

$$\frac{K}{N_0} - 1 > 0, \quad (2.28)$$

et ainsi que le dénominateur de la fonction N est donc toujours strictement positif et N est donc définie sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 2.3. Contrairement au cadre du cours, où les solutions des équations différentielles sont définies sur $\mathbb{R}$, il faut le vérifier ici car ce n'est pas acquis, vu que l'on n'est pas dans le cadre de la section 2.2 du cours. Notons par exemple que si l'on ne fait pas l'hypothèse (2.9) de l'énoncé, la solution n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$.

◇

(B) Il n'est pas nécessaire de dériver N . D'après (2.28), la fonction $t \mapsto 1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}$ est décroissante et ainsi N est strictement croissante. De plus, il est aisé de constater que N tend vers K quand t tend vers l'infini.

(C) D'après (2.24) et l'équation (2.5) de l'énoncé, le taux de croissance r n'est plus constant comme dans la question 1, mais est donné par

$$r(N) = a \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

D'après ce qui précède, $r(t)$ est décroissant et passe de la valeur $aN \left(1 - \frac{N_0}{K}\right)$ à une limite égale à zéro.

Les deux équations différentielles (des questions 1 et 2) de cet exercice définissent respectivement les deux modèles (continus) de Malthus et de Verhulst, qui seront utilisés dans [Bas24a; Bas24b]. Dans ces références, d'autres propriétés sont données sur la fonction N étudiée dans la question 2.

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre deux

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.8.

On obtient

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & y(t) = C1 e^{2t} + C2 e^t, \\ \text{b)} \quad & y(t) = e^t (C1 \sin(t) + C2 \cos(t)), \\ \text{c)} \quad & y(t) = 2 e^{-t} (1 + t). \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.9.

On obtient

$$y(t) = e^t \left(\int e^t \int 3 e^{-2t} \sin t(t) + e^{-2t} \cos(t) dt + e^t C1 dt + C2 \right).$$

On pourra ensuite passer en complexe pour trouver simplement une primitive de la fonction à déterminer.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.10.

(1) On obtient

$$y = C1 e^{-3t} + C2 e^{1/2t}.$$

(2) On obtient

$$y = e^{-3t} C2 + e^{1/2t} C1 - \frac{47}{3} - 8t - 2t^2 - 1/3 t^3.$$

(3) On obtient

$$y = -\frac{13}{21} e^{-3t} + \frac{114}{7} e^{1/2t} - \frac{47}{3} - 8t - 2t^2 - 1/3 t^3.$$

Exercices sur la demi-vie et autres

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.11.

On pourra consulter les corrections des exercices 2.12 et 2.13.

Voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Période_radioactive

- De façon formelle, au bout d'une demi-vie, le nombre N est divisé par 2, donc au bout de deux demi-vies, il est divisé par 4. Autrement dit, au bout de deux demi-vie, seul 25% du nombre initial est présent.
- Montrons cela plus rigoureusement.

Notons $N(t)$ et, sans perte de généralité, $t = 0$ l'instant initial où $N = N(0) = N_0$. La résolution classique de $N'(t) = -\lambda N(t)$ (voir par exemple [Bas22b, chapitre 5]) fournit :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.29)$$

Or, la demi-vie, notée $t_{1/2}$, correspond à

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2},$$

ce qui donne

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2},$$

et donc, en utilisant (2.29)

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

Au bout de $t = 2t_{1/2}$, on a donc

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(2t_{1/2})} = N_0 (e^{-\lambda t_{1/2}})^2,$$

et donc, grâce à (2.30)

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{N_0}{4}.$$

On obtient donc 1/4 soit 25% du nombre initial est présent.

REMARQUE 2.4. Remarquons que (2.30) est équivalent à

$$-\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

soit encore

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (2.31)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.12.

On pourra consulter les corrections des exercices 2.11 et 2.13.

La grandeur x vérifie

$$x'(t) = \lambda x(t) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Notons, sans perte de généralité, $t = 0$ l'instant initial où $x = x(0) = x_0$. La résolution classique (voir par exemple [Bas22b, chapitre 5]) fournit :

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}. \quad (2.32)$$

Le temps nécessaire pour doubler est la durée T telle que

$$x(T) = 2x_0 = x_0 e^{\lambda T},$$

ce qui donne

$$e^{\lambda T} = 2,$$

et donc

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

ce qui réinjecté dans (2.32) donne

$$x(t) = x_0 e^{\frac{(\ln 2)t}{T}}. \quad (2.33)$$

Déterminons le temps τ pour que la grandeur triple :

$$x(\tau) = 3x_0 = x_0 e^{\frac{(\ln 2)\tau}{T}}.$$

ce qui donne

$$e^{\frac{(\ln 2)\tau}{T}} = 3,$$

et donc

$$\frac{(\ln 2)\tau}{T} = \ln 3,$$

et donc

$$\tau = \frac{T \ln 3}{\ln 2}.$$

Numériquement, on a $\tau \approx 15,8$ ans.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.13.

Exercice issu de [Mac17].

On pourra consulter les corrections des exercices 2.11 et 2.12.

On pourra consulter :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Décroissance_exponentielle

https://fr.wikipedia.org/wiki/Période_radioactive

https://fr.wikipedia.org/wiki/Carbone_14

- (1) Voir le résultat déjà établi dans la remarque 2.4, rappelé ici :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (2.34)$$

- (2) Le nombre $n(t)$ de désintégrations par seconde (ici Δt vaut une seconde), mesurable expérimentalement, vérifie, à l'instant t :

$$n(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{-\Delta t} \approx -N'(t),$$

et donc

$$n(t) = \lambda N(t).$$

soit encore

$$n(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.35)$$

On a de même

$$n(0) = \lambda N_0. \quad (2.36)$$

En divisant (2.36) par (2.35), on a donc

$$\frac{n(0)}{n(t)} = e^{\lambda t}, \quad (2.37)$$

qui est égal au nombre

$$\gamma = \frac{816}{560}, \quad (2.38)$$

connu. De (2.31), (2.38), (2.37), on déduit

$$e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t} = \gamma,$$

et donc

$$t = \frac{\ln(\gamma)}{\ln 2} t_{1/2}.$$

Numériquement, $t \approx 3\,025$ ans.

Applications à la mécanique

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.14.

Non corrigé

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.15 (Résolution du flambement dans le cas raisonnant).

Sous matlab la résolution de l'edo sans condition aux bords donne :

$$v = \sin(\omega x) C_2 + \cos(\omega x) C_1 - 1/2 \frac{K \cos(\omega x) x}{\omega}.$$

Pour chercher

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.16.

Cet exercice a été donné en examen (Automne 2022).

- (1) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-3t};$$

(c est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 3 du type $at^3 + bt^2 + ct + d$ et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de quatre équations en a, b, c et d que l'on résoud.} :

$$y_p(t) = 2/9 + 1/3 t + 1/3 t^3;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_g + y_p$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-3t} + 2/9 + 1/3 t + 1/3 t^3;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c , ce qui donne

$$y(t) = -\frac{23}{9} e^{-3t} + 2/9 + 1/3 t + 1/3 t^3.$$

- (2) (a) Il est très facile d'inventer une équation différentielle¹ partant de sa solution. On suppose donc connus $t_0, y_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ et $\hat{y}$ une fonction vérifiant

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \quad (2.39a)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (2.39b)$$

La fonction f est tout simplement donnée par (2.39a), lue à "l'envers", puisque vérifiée par $\hat{y}$:

$$f(t) = \hat{y}'(t) + a\hat{y}(t). \quad (2.40)$$

1. linéaire d'ordre un à coefficients constants pour être précis.

- (b) Si f est connue, on résout donc l'équation différentielle (2.39). On détermine d'abord y_g , la solution générale de l'équation homogène associée à (2.39a) donnée donc par

$$y_g(t) = Ce^{-at}. \quad (2.41)$$

Ensuite, il faut déterminer la solution de (2.39). Naturellement, même si elle est possible, la méthode de la variation de la constante est à proscrire, puisque l'on connaît une solution particulière de (2.39), justement donnée par $\hat{y}$, connue ! On sait donc que y la solution de (2.39) est donnée par

$$y(t) = Ce^{-at} + \hat{y}(t). \quad (2.42)$$

On utilise enfin la condition initiale (2.39b)

$$y_0 = y(t_0) = Ce^{-at_0} + \hat{y}(t_0),$$

et puisque $\hat{y}$ vérifie aussi (2.39b), on a donc

$$y_0 = Ce^{-at_0} + \hat{y}(t_0) = Ce^{-at_0} + y_0,$$

et donc

$$0 = Ce^{-at_0},$$

d'où

$$C = 0,$$

et d'après (2.42),

$$y(t) = \hat{y}(t), \quad (2.43)$$

ce qui est tout à fait normal !

- (c) Concluons par trois exemples.

EXEMPLE 2.5. Si on se donne

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ t_0 &= 1, \\ \hat{y}(t) &= 1 + t + t^3, \end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0 = 3,$$

et, d'après (2.40),

$$f(t) = 3t^2 + 3 + 2t^3 + 2t,$$

et la résolution de l'équation différentielle (2.39) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} y'(t) + 2y(t) &= 3t^2 + 3 + 2t^3 + 2t, \\ y(1) &= 3, \end{aligned}$$

redonne bien y !

EXEMPLE 2.6. Si on se donne

$$\begin{aligned} a &= -3, \\ t_0 &= 2, \\ \hat{y}(t) &= 2 \cos(t), \end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0 = 2 \cos(2),$$

et, d'après (2.40),

$$f(t) = -2 \sin(t) - 6 \cos(t),$$

et la résolution de l'équation différentielle (2.39) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} y'(t) - 3y(t) &= -2 \sin(t) - 6 \cos(t), \\ y(2) &= 2 \cos(2), \end{aligned}$$

redonne bien y !

EXEMPLE 2.7. Si on se donne

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ t_0 &= 2, \\ \widehat{y}(t) &= -\frac{23}{9} e^6 e^{-3t} + 2/9 + 1/3 t + 1/3 t^3, \end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0 = 1,$$

et, d'après (2.40),

$$f(t) = 1 + t^2 + t + t^3,$$

et la résolution de l'équation différentielle (2.39) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= 1 + t^2 + t + t^3, \\ y(2) &= 1, \end{aligned}$$

redonne bien y !

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.17.

Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [\tau, +\infty[, \quad 2ty'(t) - y(t) = 0. \quad (2.44)$$

On a deux façons de procéder.

- (1) Soit, on raisonne comme dans [Bas22b, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un"] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI>.

pdf, en écrivant et en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned}
 2ty(t)' - y(t) = 0 &\iff \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{2t}, \\
 &\iff (\ln |y|)' = \left(\frac{1}{2} \ln |t|\right)', \\
 &\iff (\ln |y|)' = (\ln \sqrt{t})', \\
 &\iff \ln(y) = c + \ln \sqrt{t}, \\
 &\iff y = e^{c + \ln \sqrt{t}}, \\
 &\iff y = e^c e^{\ln \sqrt{t}}, \\
 &\iff y = c\sqrt{t}
 \end{aligned}$$

où $K = e^c$. On a donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \quad (2.45)$$

- (2) Soit on applique directement le résultat de [Bas22b, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>. On sait, d'après le cours, en notant $a(t) = 2t$ et $b(t) = -1$, que y est solution de (2.44) ssi

$$y(t) = ce^{-\alpha(t)}$$

où c est un réel et α une primitive de $b/a = -1/(2t)$, soit

$$\alpha(t) = -1/2 \ln |t| = -1/2 \ln t = -\ln \sqrt{t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 y(t) &= ce^{-\alpha(t)}, \\
 &= ce^{\ln \sqrt{t}},
 \end{aligned}$$

et donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \quad (2.46)$$

où c est un réel quelconque.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.18.

Non corrigé

Autres types d'équations différentielles ordinaires

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.19.

Équation différentielle à variable séparable. Solution $y(t) = Cx^2 - 1$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.20.

Non corrigé

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.21.

Solution $y(x) = Ce^{-x^3}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.22 (Équation de Bernoulli).

- (1) Si $z = y^{1-n}$, on a

$$z' = (1-n)y'y^{-n}. \quad (2.47)$$

Là où y ne s'annule pas et si n est différent de 1, ce qui est bien l'hypothèse faite, l'équation

$$y'(t) = ay(t) + by^n(t), \quad (2.48)$$

est équivalente à

$$(1-n)y^{-n}(t)y'(t) = a(1-n)y^{-n}(t)y(t) + b(1-n)y^{-n}(t)y^n(t),$$

et, d'après (2.47),

$$z'(t) = a(1-n)y^{-n+1}(t) + b(1-n),$$

soit donc, encore à l'équation différentielle :

$$z'(t) = a(1-n)z(t) + b(1-n). \quad (2.49)$$

Ainsi, on a transformé l'équation différentielle non linéaire de l'énoncé en équation différentielle linéaire (2.49), qui se réécrit

$$z'(t) = \alpha z(t) + \beta, \quad (2.50)$$

où $\alpha = a(1-n)$ et $\beta = b(1-n)$. On peut finir en utilisant la formule de Duhamel de l'exercice de TD 2.1, question 3, ou en utilisant le fait qu'une solution particulière de (2.50) est une constante K , égale à $-\beta/\alpha = -b/a$ et donc la solution générale de (2.50) est donnée par

$$z(t) = Ce^{a(1-n)t} - \frac{b}{a}. \quad (2.51)$$

- (2) On en déduit alors $y = z^{1/(1-n)}$ en vérifiant *a posteriori* qu'avec un choix correct de conditions initiales, z est strictement positive.
- (3) Le cas $n = 0$ correspond l'équation différentielle déjà linéaire, cas pas très intéressant :

$$y' = ay + b. \quad (2.52)$$

Le cas $n = 1$ correspond à une équation différentielle déjà linéaire, cas pas très intéressant. Il donnerait

$$z' = az + b, \quad (2.53)$$

ce qui est l'équation de départ.

Interpolation polynômiale

Ces exercices sont issus (et adaptés) de [Bas22d, énoncés du TD 2] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MNBmater/TDMNBmater.pdf> et [Bas22e, corrections du TD 2] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/MNBmater/TDcorMNBmater.pdf>

Pour tous les calculs de polynôme d'interpolation par la méthode de Newton, on consultera la définition 3.19 page 41 du cours.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.1.

(1) Ici, on a $n = 1$.

Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 1) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.1)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x - 8)}{(3 - 8)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 3)}{(8 - 3)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = -1/5 x + 8/5, \quad (3.2a)$$

$$l_1(x) = 1/5 x - 3/5. \quad (3.2b)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_n(g)(x) = \sum_{i=0}^n g(x_i) l_i(x). \quad (3.3)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g(x_0) l_0(x) + g(x_1) l_1(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = 4/5 x - \frac{22}{5}. \quad (3.4)$$

Pour $\alpha = 7,500\,000$, on obtient alors :

$$\Pi_n(g)(\alpha) = 1,600\,000, \quad (3.5)$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Sur la figure 3.1, ont été tracés les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 et le polynôme interpolateur.

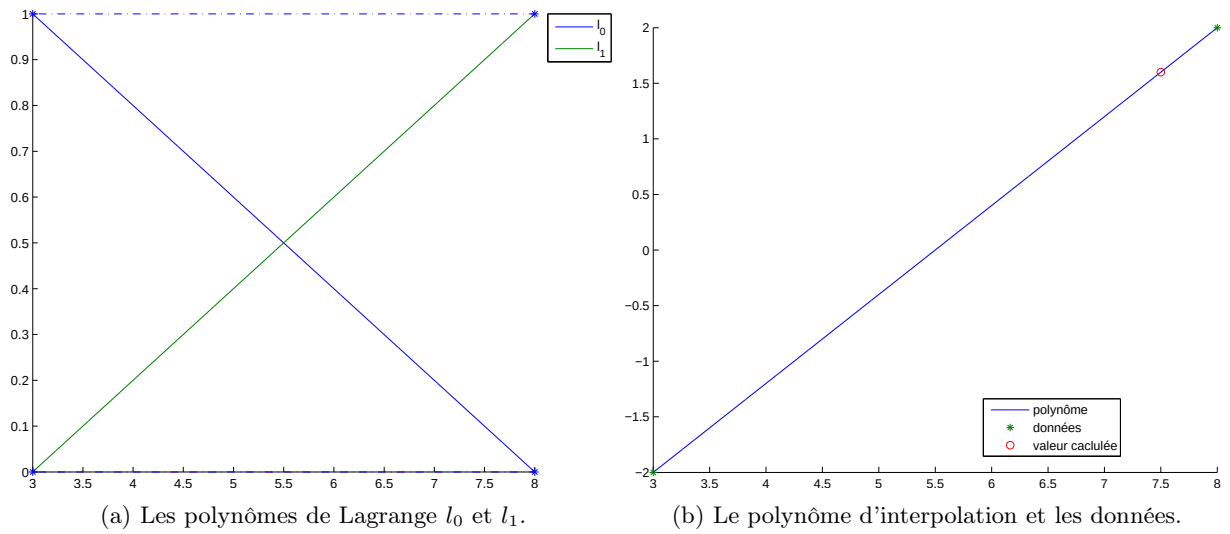


FIGURE 3.1. L'interpolation de Lagrange.

(2) Ici, on a $n = 2$.

Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule (3.1). On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-8)(x-5)}{(3-8)(3-5)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(8-3)(8-5)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-3)(x-8)}{(5-3)(5-8)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/10 x^2 - \frac{13}{10} x + 4, \quad (3.6a)$$

$$l_1(x) = 1/15 x^2 - \frac{8}{15} x + 1, \quad (3.6b)$$

$$l_2(x) = -1/6 x^2 + \frac{11}{6} x - 4. \quad (3.6c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule (3.3). Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = -\frac{7}{30} x^2 + \frac{101}{30} x - 10. \quad (3.7)$$

Pour $\alpha = 7,500\,000$, on obtient alors :

$$\Pi_n(g)(\alpha) = 2,125\,000, \quad (3.8)$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Sur la figure 3.2, ont été tracés les polynômes de Lagrange l_0 , l_1 et l_2 et le polynôme interpolateur.

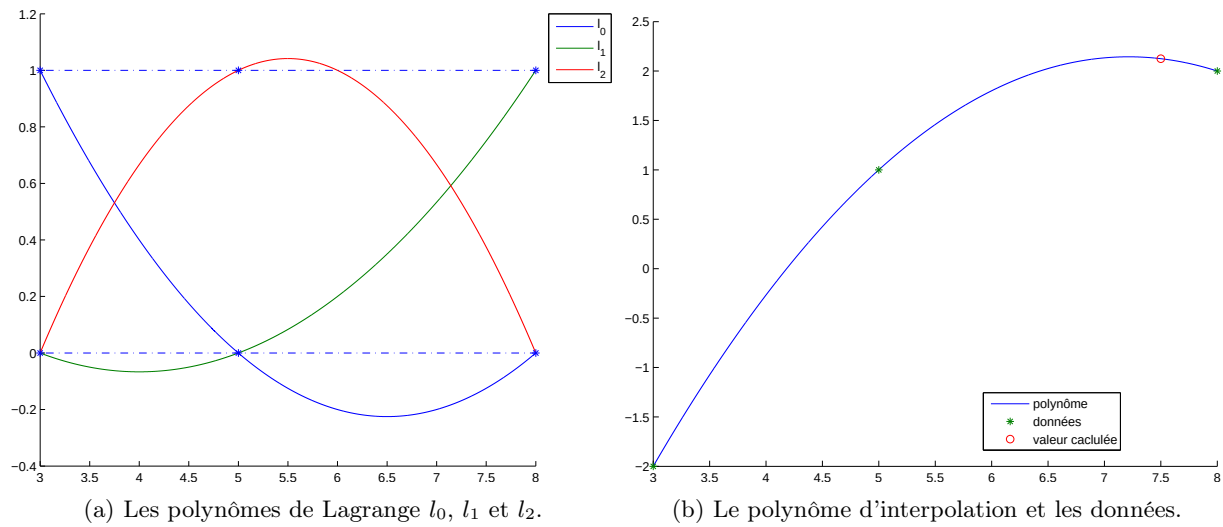


FIGURE 3.2. L'interpolation de Lagrange.

$x_i \setminus k$	0	1
$x_0 = 3$	-2	
$x_1 = 8$	2	4/5

TABLE 3.1. Différences divisées de g .

(3) (a) Ici, on a $n = 1$.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 3.1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_n(g)(x) = \sum_{i=0}^n g[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (3.9)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0).$$

On a

$$x - x_0 = x - 3,$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = 4/5 x - \frac{22}{5}. \quad (3.10)$$

Pour $\alpha = 7,500\,000$, on retrouve alors la valeur donnée par (3.5).

(b)

Ici, on a $n = 2$. On n'est pas obligé de reprendre tous les calculs. Il suffit de rajouter le point x_2 dans le tableau des différences divisées et la valeur correspondante $g(x_2)$, comme le montre le tableau

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 3$	-2		
		$4/5$	
$x_1 = 8$	2		$-\frac{7}{30}$
		$1/3$	
$x_2 = 5$	1		

TABLE 3.2. Différences divisées de g .

3.2. Ensuite, on utilise la formule (3.9), pour passer de $n - 1$ à n ; il suffit de rajouter le polynôme $g[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$ au polynôme $\Pi_{n-1}(g)$ pour obtenir le polynôme $\Pi_n(g)$. On obtient le polynôme ci-dessus.

Pour $\alpha = 7,500\,000$, on retrouve alors la valeur donnée par (3.8).

- (4) La seconde solution est plus rapide, car fait appel aux calculs précédents, ce qui était le but poursuivi par « l'inventeur des différences divisées », Isaac Newton. On pourra consulter par exemple <http://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi2.pdf>

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.2.

- (1) D'après le théorème 3.28 du polycopié de cours, on a, pour des nœuds équirépartis de l'intervalle $[a, b]$

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (3.11)$$

La dérivée n -ième de f est majorée, en valeur absolue, par $1/3^n$. D'où

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)n^{n+1}3^{n+1}},$$

soit encore

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)(3n)^{n+1}}. \quad (3.12)$$

- (2) On sait que cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous proposons deux méthodes légèrement différentes.

- (a) De façon brutale, on détermine à la main, le plus petit n tel que cette quantité soit inférieure à $\varepsilon = 10^{-4}$. C'est-à-dire, on teste successivement $n = 1, n = 2, \dots$. On trouve

$$n = 3. \quad (3.13)$$

- (b) De façon plus subtile, remarquons que l'on a successivement les majorations suivantes : pour tout n entier, on a

$$\begin{aligned} 4(n+1)(3n)^{n+1} &\geq 4(3n)^{n+1}, \\ &= 4 \times 3^{n+1} n^{n+1}, \\ &= 12 \times 3^n n^{n+1}, \\ &\geq 12 \times 3^n n^n, \\ &= 12 \times (3n)^n, \end{aligned}$$

et donc l'inégalité

$$\frac{1}{4(n+1)(3n)^{n+1}} \leq \varepsilon \quad (3.14)$$

est vraie si

$$\frac{1}{12(3n)^n} \leq \varepsilon, \quad (3.15)$$

ce qui est équivalent à

$$(3n)^n \geq \frac{1}{12\varepsilon},$$

et donc à

$$(3n)^{3n} \geq \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

Par croissance, il suffit donc de trouver le plus petit entier n_0 tel que

$$(3n_0)^{3n_0} = \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

D'après la section E.3 de l'annexe E page 95 du cours cela est équivalent à

$$x = \frac{\ln z}{W(\ln z)},$$

où

$$x = 3n_0 \text{ et } z = \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

On trouve donc, dans $\mathbb{R}$:

$$n_0 = \frac{\ln z}{3W(\ln z)},$$

soit numériquement :

$$n_0 = 3.0417459.$$

et donc, dans $\mathbb{N}$:

$$n_0 = 4,$$

ce qui est un peu plus grand que la valeur donnée par (3.13), ce qui est normal car on a raisonné en condition suffisante, en remplaçant l'inégalité (3.14) par l'inégalité (3.15) moins forte. Au final, cette méthode est plus pessimiste !

(3) Tous les résultats sont identiques pour la fonction g .

REMARQUE 3.1. Dans cet exercice, on a montré que l'erreur d'interpolation entre f et son polynôme d'interpolation p_n , défini par $n+1$ points équirépartis est donnée par (3.11) dans le cas général et par (3.12) dans le cas particulier étudié.

Ainsi, cette erreur tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Attention, ce résultat n'est vrai qu'en théorie ; en pratique, du fait des arrondis de calculs, l'erreur d'interpolation entre f et p_n ne tend pas vers zéro quand n grandit.

De plus, dans [BM03, Exercice 2.3 p. 53 et 239 et TP 2.D p. 65], nous avons mis en avant le fait que l'on peut évaluer numériquement le polynôme p_n de trois façons :

(1) en utilisant la forme de Newton donnée par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}), \quad (3.16)$$

et l'algorithme d'évaluation de Horner ¹

(2) en utilisant sa forme canonique ²

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i ; \quad (3.18)$$

(3) en utilisant son écriture dans la base des polynômes de Lagrange l_i

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad (3.19)$$

où

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.20)$$

L'erreur est intrinsèquement liée à l'utilisation d'un calculateur par le cumul d'imprécisions liées aux arrondis. Cependant, les trois méthodes n'ont pas la même sensibilité numérique. Nous donnons en annexe A deux simulations numériques mettant cela en évidence sur les fonctions f et g définies dans l'énoncé.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.3.

D'après le théorème 3.25 du polycopié de cours, on a, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}] = [ih, (i+1)h]$,

$$E_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}).$$

Sur $[0, 1]$, on peut majorer brutalement chacun des produits $(x - x_i)$ par h et donc $|(x - x_i)(x - x_{i+1})|$ par h^2 . On peut aussi être plus précis et montrer que la fonction $x \mapsto (a - x)(b - x)$ a un maximum égal à $\frac{(a-b)^2}{4}$. On majore donc $|(x - x_i)(x - x_{i+1})|$ par $h^2/4$. On a donc

$$|E_1(x)| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |f^{(2)}(\xi)| \frac{h^2}{2 \times 4} = \max_{\xi \in [0,1]} |f^{(2)}(\xi)| \frac{h^2}{8}.$$

On peut aussi retrouver cette formule grâce au théorème 3.32 du polycopié de cours. Par ailleurs, on a

$$f^{(2)}(x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2). \quad (3.21)$$

On peut utiliser brutalement l'inégalité triangulaire

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (3.22)$$

On écrit donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(2)}(x)| \leq 2 \left| e^{-x^2} \right| |2x^2 - 1|, \quad (3.23)$$

ce qui donne

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(2)}(x)| \leq 2e^{-x^2} |2x^2 - 1|, \quad (3.24)$$

1. qui consiste en fait à évaluer $p_n(x)$ de la façon suivante : si on note $a_0 = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$, $a_2 = f[x_0, x_1, x_2], \dots$, $a_n = f[x_0, \dots, x_n]$, alors on calcule p_n défini par (3.16) de la façon suivante (dans cet ordre, sans exprimer ce qui suit dans la base canonique) :

$$p_1(x) = a_0 + (x - x_0)a_1, \quad (3.17a)$$

si $n = 1$,

$$p_2(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)a_2), \quad (3.17b)$$

si $n = 2$ et de façon plus générale :

$$p_n(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 + (x - x_3)(\dots(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n))))), \quad (3.17c)$$

de façon, entre autres, à diminuer le nombre d'opérations à effectuer, notamment le calcul des produits $(x - x_0)\dots(x - x_i)$. (voir [BM03, Algorithme 2.1 d'Horner p. 38 et TP 2.A p. 61])

2. que l'on obtient grâce à la forme de Newton et par exemple [BM03, Exercice 2.7 p. 56, Algorithme 6.1 p. 246].

et donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2 \left| 2x^2 - 1 \right|, \quad (3.25)$$

dont on déduit, grâce à (3.22),

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2 \left(\left| 2x^2 \right| + \left| -1 \right| \right), \quad (3.26)$$

et donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2 \left(2x^2 + 1 \right), \quad (3.27)$$

et enfin, puisque sur $[0, 1]$, $x^2 \leq 1$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2(2 + 1) = 6, \quad (3.28)$$

et un majorant M de $\left| f^{(2)}(x) \right|$ sur $[0, 1]$ est donné par

$$M = 6, \quad (3.29)$$

Bref

$$\left| E_1(x) \right| \leq \frac{3}{4} h^2.$$

Ainsi, pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$, il suffit que

$$\frac{3}{4} h^2 \leq \varepsilon,$$

soit

$$h \leq \sqrt{\frac{4}{3} \varepsilon}, \quad (3.30)$$

soit encore

$$\frac{1}{N} \leq \sqrt{\frac{4}{3} \varepsilon}.$$

On a donc

$$N \geq \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}} = 1224.744871.$$

Puisque N est entier, on choisit

$$N = 1225. \quad (3.31)$$

REMARQUE 3.2. On peut améliorer la valeur de M donnée par (3.29) de trois façons.

- (1) Comme l'a remarqué M. Thioliere en 2018, il suffit de reprendre l'inégalité (3.23). D'une part, on utilise le fait que $x \mapsto 2x^2 - 1$ est croissante sur $[0, 1]$ et qu'elle vaut -1 en 0 et 1 en 1 ; cette fonction est donc comprise entre -1 et 1 et en valeur absolue, elle est donc majorée par 1. On a donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| 2x^2 - 1 \right| \leq 1. \quad (3.32)$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive, décroissante sur $[0, 1]$ et elle vaut 1 en 0 ; elle est donc majorée par 1, en valeur absolue. On a donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^{-x^2} \leq 1. \quad (3.33)$$

Bref, de (3.24) (3.32) et (3.33), on déduit

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2 \times 1, \quad (3.34)$$

et donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2, \quad (3.35)$$

et on remplace donc (3.29) par

$$M = 2. \quad (3.36)$$

Dans ce cas, M est optimal puisque'il est atteint par f :

$$\left| f^{(2)}(0) \right| = M. \quad (3.37)$$

(2) On peut aussi, remarquer que d'après (3.21), on a

$$f^{(3)}(x) = 4xe^{-x^2} (3 - 2x^2). \quad (3.38)$$

La fonction $x \mapsto 3 - 2x^2$ est décroissante sur $[0, 1]$, elle vaut 3 en 0 et 1 en 1 et est donc positive sur $[0, 1]$; Ainsi, $f^{(3)}$ est positive sur $[0, 1]$ et $f^{(2)}$ est donc croissante sur $[0, 1]$. Elle est donc comprise entre $f^{(2)}(0) = -2$ et $f^{(2)}(1) = 2e^{-1}$, tous les deux inférieurs à 2, en valeur absolue. On retrouve donc (3.36).

(3) On peut aussi, de façon informatique, utiliser la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, un majorant exact de $f^{(2)}$, on obtient

$$M = 2.000000000, \quad (3.39)$$

et on retrouve donc (3.36).

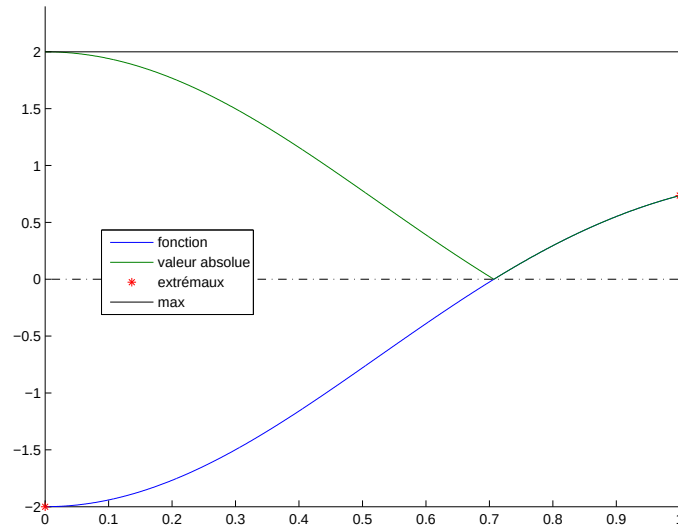


FIGURE 3.3. Extréma de la fonction g définie par (3.21).

Voir figure 3.3.

En utilisant (3.36) ou (3.39), l'estimation (3.30) est remplacée par

$$h \leq \sqrt{\frac{8}{M}} \varepsilon,$$

et donc puisque

$$N = \frac{1}{h},$$

l'estimation (3.31) est remplacée un peu plus avantageusement par

$$N = 708.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.4.

- (1) Parmi les différents points t de l'énoncé, on considère quatre points successifs qui encadrent "au mieux" la donnée $\tau = 3.100000$. On utilise tout d'abord le fait que l'on fait de l'"inter"polation (la donnée τ est à l'intérieur des points t_i). De plus, l'écart entre τ et les t_i doit être le plus faible possible. En outre, l'écart entre les différents t_i doit être le plus faible possible. Enfin, on admet que la situation doit être la plus symétrique possible. Finalement, on choisit donc :

$$t_0 = 2.50, \quad (3.40a)$$

$$t_1 = 3, \quad (3.40b)$$

$$t_2 = 3.50, \quad (3.40c)$$

$$t_3 = 4. \quad (3.40d)$$

$t_i \setminus k$	0	1	2	3
$t_0 = 2.500000$	7.829100			
		2.734400		
$t_1 = 3$	9.196300		0.075000	
		2.809400		-0.053867
$t_2 = 3.500000$	10.601000		-0.005800	
		2.803600		
$t_3 = 4$	12.002800			

TABLE 3.3. Différences divisées de f .

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[t_i, \dots, t_{i+k}]$ données dans le tableau 3.3. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 3, Π_3 , est donné par la formule :

$$\Pi_3(t) = \sum_{i=0}^n f[t_0, \dots, t_i](t - t_0) \dots (t - t_{i-1}). \quad (3.41)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_3(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1) + f[t_0, t_1, t_2, t_3](t - t_0)(t - t_1)(t - t_2).$$

On a successivement

$$t - t_0 = t - 2.500000,$$

$$(t - t_0)(t - t_1) = t^2 - 5.500000t + 7.500000,$$

$$(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = t^3 - 9t^2 + 26.750000t - 26.250000.$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(t) = -0.053867t^3 + 0.559800t^2 + 0.880967t + 2.969600. \quad (3.42)$$

On en déduit

$$\Pi_3(\tau) = \Pi_3(3.100000) = 9.475533.$$

Voir la figure 3.4.

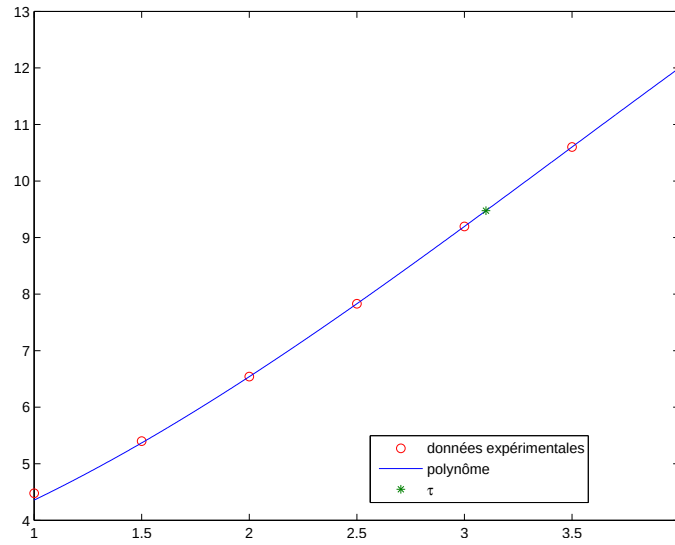


FIGURE 3.4. Les données expérimentales et la courbe de degré 3.

REMARQUE 3.3. Au lieu de prendre (3.40) on considère cette fois-ci les points t_i définis par

$$t_0 = 1, \quad (3.43a)$$

$$t_1 = 1.500000, \quad (3.43b)$$

$$t_2 = 2, \quad (3.43c)$$

$$t_3 = 2.500000, \quad (3.43d)$$

$$t_4 = 3, \quad (3.43e)$$

$$t_5 = 3.500000, \quad (3.43f)$$

$$t_6 = 4. \quad (3.43g)$$

Une autre façon plus complète de procéder et de déterminer tous les polynômes de degrés 3 définis par 4 points qui se suivent parmi les t_i , qui peuvent même ne pas encadrer τ ! On dispose des 4 possibilités différentes données par $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ et $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. On calcule pour ces 4 possibilités les différences divisées puis $\Pi_3(\tau)$. On trouve

$$\Pi_3(\tau) = 9.460207,$$

$$\Pi_3(\tau) = 9.473442,$$

$$\Pi_3(\tau) = 9.475581,$$

$$\Pi_3(\tau) = 9.475533.$$

Voir la figure 3.5. On constate que les quatre solutions sont quasi identiques.

(2) L'expression analytique de l'erreur est donnée par

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \omega_4(x), \quad (3.44)$$

où ici f et ξ ne sont pas connus. Cette formule provient de la propriété 3.25 du polycopié de cours utilisée ici avec $n = 3$.

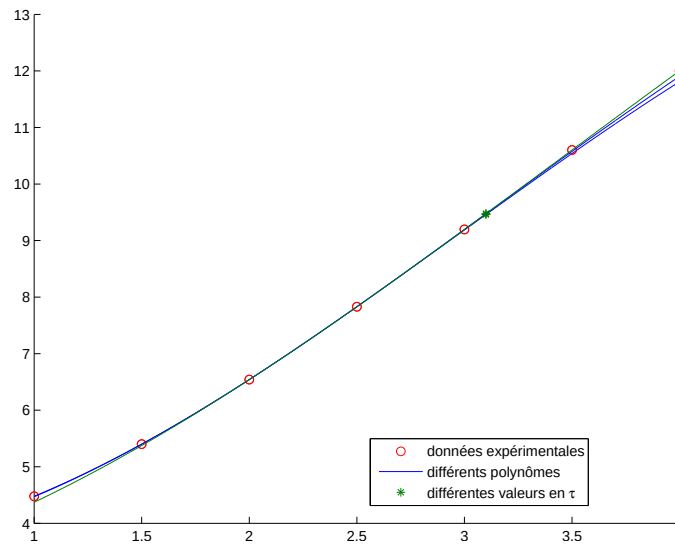


FIGURE 3.5. Les données expérimentales et les différentes courbes de degré 3.

- (3) Il est donc impossible de calculer une telle erreur. Cependant, on peut supposer par exemple que f est polynomiale de degré 4, ou ce qui revient au même que $f^{(4)}$ ne varie pas. On a alors une approximation de l'erreur, obtenue en prenant un point supplémentaire t_{n+1} :

$$E_3(x) \approx f[t_0, \dots, t_{n+1}](x - t_0) \dots (x - t_n), \quad (3.45)$$

utilisée ici avec $n = 3$. Cela provient de (3.44) ; en effet, si f est polynomiale de degré 4, le coefficient dominant de f est $f[t_0, \dots, t_{n+1}]$ puisque c'est le coefficient dominant de $f = \Pi_4$ sur la forme de newton. On a alors pour tout ξ , puisque $f^{(4)}$ est constant :

$$f^{(4)}(\xi) = 4!f[t_0, \dots, t_4],$$

ce qui donne, réinjecté dans (3.44) :

$$E_3(x) = f[t_0, \dots, t_4]\omega_4(x).$$

Si cette fois-ci, $f^{(4)}$ varie peu, cela devient une approximation et on a donc, dans tous les cas (3.45). Prenons $t_0 = 2.500000$, $t_1 = 3$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ et $t_4 = 2$. On complète le tableau déjà fait dans la question 1 en rajoutant un cinquième point, en bas du tableau ; voir le tableau 3.4 page suivante. On déduit de ce tableau la valeur de $f[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$ donnée par :

$$f[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4] = 0.001000.$$

On a alors

$$E_3(\tau) \approx 1.0 \cdot 10^{-3} \times (\tau - t_0) \dots (\tau - t_3) = 2.37599 \cdot 10^{-5}.$$

Exercices facultatifs

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.5.

- (1) On rappelle que Π_n vérifie

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \Pi_n(x_i) = y_i. \quad (3.46)$$

$t_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$t_0 = 2.500000$	7.829100				
		2.734400			
$t_1 = 3$	9.196300		0.075000		
		2.809400		-0.053867	
$t_2 = 3.500000$	10.601000		-0.005800		0.001000
		2.803600		-0.054367	
$t_3 = 4$	12.002800		0.048567		
		2.730750			
$t_4 = 2$	6.541300				

TABLE 3.4. Différences divisées de f .

D'après la proposition 3.6 du polycopié de cours, le polynôme Π_n est de degré au plus n . Il suffit de choisir un polynôme P de degré p tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = P(x_i). \quad (3.47)$$

Le polynôme d'interpolation Π_n vaut alors P . Il est en effet de degré p , inférieur ou égal à n par définition et, d'après (3.47), (3.46) est vérifiée pour $\Pi_n = P$. P vérifie donc l'équation (3.26) du polycopié de cours de la proposition 3.6 du polycopié de cours. Par unicité du polynôme d'interpolation,

$$\Pi_n = P. \quad (3.48)$$

(2) Prenons par exemple

$$P(x) = x^2.$$

D'après (3.47), les y_i sont donnés par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = x_i^2 = i^2.$$

Il serait fastidieux de déterminer Π_3 . Il suffit d'utiliser (3.48) qui nous donne :

$$\Pi_3(x) = x^2.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.6.

On pourra aussi consulter la correction de l'exercice de TD 3.4 page 65, très proche de cet exercice.

(1)

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

TABLE 3.5. Les données du sportif.

Parmi les différents points $(d_i)_{0 \leq i \leq 3}$ (les distances données dans la première ligne du tableau 3.5) on considère trois points successifs qui encadrent "au mieux" la donnée

$$d = 5000. \quad (3.49)$$

On utilise tout d'abord le fait que l'on fait de l'"inter"polation (la donnée d est à l'intérieur des distances $(d_i)_{0 \leq i \leq 3}$). De plus, l'écart entre d et les d_i doit être le plus faible possible. En outre, l'écart entre les différents d_i doit être le plus faible possible. Enfin, on admet que la situation doit être la plus symétrique possible. Finalement, on choisit donc :

$$X_0 = 100, \quad (3.50a)$$

$$X_1 = 1500, \quad (3.50b)$$

$$X_2 = 10000, \quad (3.50c)$$

et les durées correspondantes données par

$$Y_0 = 13, \quad (3.51a)$$

$$Y_1 = 245, \quad (3.51b)$$

$$Y_2 = 1980, \quad (3.51c)$$

Il était préférable d'utiliser la méthode de Newton, mais le calcul par les polynômes de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - X_j}{X_i - X_j}. \quad (3.52)$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} l_0(X) &= \frac{(X - 1500)(X - 10000)}{(100 - 1500)(100 - 10000)}, \\ l_1(X) &= \frac{(X - 100)(X - 10000)}{(1500 - 100)(1500 - 10000)}, \\ l_2(X) &= \frac{(X - 100)(X - 1500)}{(10000 - 100)(10000 - 1500)}. \end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(X) = 7.215007214 \cdot 10^{-8} X^2 - 8.297258297 \cdot 10^{-4} X + 1.082251081, \quad (3.53a)$$

$$l_1(X) = -8.403361345 \cdot 10^{-8} X^2 + 8.487394957 \cdot 10^{-4} X - 8.403361345 \cdot 10^{-2}, \quad (3.53b)$$

$$l_2(X) = 1.188354130 \cdot 10^{-8} X^2 - 1.901366606 \cdot 10^{-5} X + 1.782531193 \cdot 10^{-3}. \quad (3.53c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, Π_2 , est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^n Y_i l_i(X). \quad (3.54)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = Y_0 l_0(X) + Y_1 l_1(X) + Y_2 l_2(X).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(X) = 3.879127409 \cdot 10^{-6} X^2 + 1.595076819 \cdot 10^{-1} X - 2.989559460. \quad (3.55)$$

(b)

$X_i \setminus k$	0	1	2
$X_0 = 100$	13		
		$1.657142857 \cdot 10^{-1}$	
$X_1 = 1500$	245		$3.879127409 \cdot 10^{-6}$
		$2.041176470 \cdot 10^{-1}$	
$X_2 = 10000$	1980		

TABLE 3.6. Différences divisées de f .

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[X_i, \dots, X_{i+k}]$ données dans le tableau 3.6. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^n f[X_0, \dots, X_i](X - X_0) \dots (X - X_{i-1}). \quad (3.56)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = f[X_0] + f[X_0, X_1](X - X_0) + f[X_0, X_1, X_2](X - X_0)(X - X_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} X - X_0 &= X - 10^2, \\ (X - X_0)(X - X_1) &= X^2 - 1.600000000 \cdot 10^3 X + 1.500000000 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (3.55)).

En prenant

$$d = 5000, \quad (3.57)$$

on en déduit la valeur de donnée par $\Pi_2(d)$ donnée par

$$\tau = \Pi_2(d) = 891.5270, \quad (3.58)$$

ce qui fournit une approximation de la performance sur le 5 000 m.

Voir aussi la figure 3.6 page suivante où sont représentées les données, Π_2 , d et $\Pi_2(d)$.

REMARQUE 3.4. On peut aussi utiliser les trois premiers points, ce qui était un peu moins moins pertinent. D'une part, on ne fait plus de l'interpolation car le point est à l'extérieur des données. De plus, on utilise le temps nul correspondant à une distance nulle, ce qui n'est pas très intéressant.

Présentons néanmoins ce calcul. Il était préférable d'utiliser la méthode de Newton, mais le calcul par les polynômes de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - X_j}{X_i - X_j}. \quad (3.59)$$

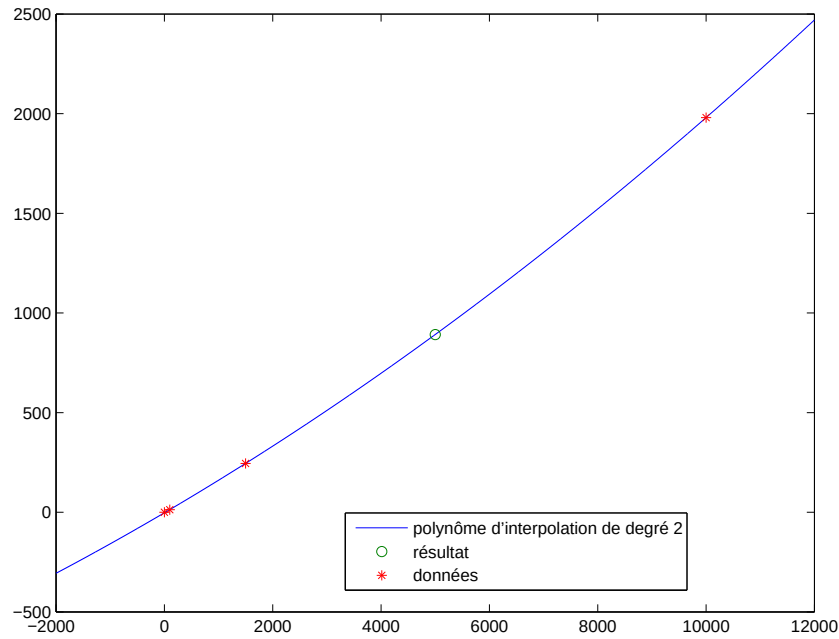


FIGURE 3.6. les données et le résultat.

On a donc successivement

$$l_0(X) = \frac{(X - 100)(X - 1500)}{(0 - 100)(0 - 1500)},$$

$$l_1(X) = \frac{(X)(X - 1500)}{(100)(100 - 1500)},$$

$$l_2(X) = \frac{(X)(X - 100)}{(1500)(1500 - 100)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(X) = 6.666666667 \cdot 10^{-6} X^2 - 1.066666667 \cdot 10^{-2} X + 1, \quad (3.60a)$$

$$l_1(X) = -7.142857142 \cdot 10^{-6} X^2 + 1.071428571 \cdot 10^{-2} X, \quad (3.60b)$$

$$l_2(X) = 4.761904762 \cdot 10^{-7} X^2 - 4.761904762 \cdot 10^{-5} X. \quad (3.60c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, Π_2 , est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^n Y_i l_i(X). \quad (3.61)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = Y_0 l_0(X) + Y_1 l_1(X) + Y_2 l_2(X).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(X) = 2.380952381 \cdot 10^{-5} X^2 + 1.276190476 \cdot 10^{-1} X. \quad (3.62)$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[X_i, \dots, X_{i+k}]$ données dans le tableau 3.7. Ensuite, on n'utilise plus que les différences

$X_i \setminus k$	0	1	2
$X_0 = 0$	0		
		$1.300000000 \cdot 10^{-1}$	
$X_1 = 100$	13		$2.380952381 \cdot 10^{-5}$
		$1.657142857 \cdot 10^{-1}$	
$X_2 = 1500$	245		

TABLE 3.7. Différences divisées de f .

divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^n f[X_0, \dots, X_i](X - X_0) \dots (X - X_{i-1}). \quad (3.63)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = f[X_0] + f[X_0, X_1](X - X_0) + f[X_0, X_1, X_2](X - X_0)(X - X_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} X - X_0 &= X, \\ (X - X_0)(X - X_1) &= X^2 - 10^2 X. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (3.62)).

On en déduit la valeur de donnée par $\Pi_2(d)$ donnée par

$$\tau = \Pi_2(d) = 1233.3333, \quad (3.64)$$

ce qui fournit une approximation de la performance sur le 5 000 m à comparer avec la valeur donnée par (3.58).

(2) L'expression analytique de l'erreur est donnée par

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \omega_3(x), \quad (3.65)$$

où ici f et ξ ne sont pas connus. Cette formule provient de la propriété 3.25 du polycopié de cours utilisée ici avec $n = 2$.

Il est en théorie impossible de calculer une telle erreur. Cependant, on peut supposer par exemple que f est polynomiale de degré 3, ou ce qui revient au même que $f^{(3)}$ ne varie pas. On a alors une approximation de l'erreur, obtenue en prenant un point supplémentaire :

$$E_2(x) \approx f[X_0, \dots, X_{n+1}](x - X_0) \dots (x - X_n), \quad (3.66)$$

utilisée ici avec $n = 2$. Cela provient de (3.65) ; en effet, si f est polynomiale de degré 3, le coefficient dominant de f est $f[t_0, \dots, t_{n+1}]$ puisque c'est le coefficient dominant de $f = \Pi_3$ sur la forme de newton. On a alors pour tout ξ , puisque $f^{(3)}$ est constant :

$$f^{(3)}(\xi) = 3!f[X_0, \dots, X_3],$$

ce qui donne, réinjecté dans (3.65) :

$$E_2(x) = f[X_0, \dots, X_3] \omega_3(x).$$

Si cette fois-ci, $f^{(3)}$ varie peu, cela devient une approximation et on a donc, dans tous les cas (3.65). Prenons $X_0 = 100$, $X_1 = 1500$, $X_2 = 10000$ et $X_3 = 0$. On complète le tableau déjà fait dans la

$X_i \setminus k$	0	1	2	3
$X_0 = 100$	13			
		$1.657142857 \cdot 10^{-1}$		
$X_1 = 1500$	245		$3.879127409 \cdot 10^{-6}$	
		$2.041176470 \cdot 10^{-1}$		$-1.993039639 \cdot 10^{-9}$
$X_2 = 10000$	1980		$4.078431372 \cdot 10^{-6}$	
		$1.980000000 \cdot 10^{-1}$		
$X_3 = 0$	0			

TABLE 3.8. Différences divisées de f .

question 1 en rajoutant un quatrième point ; voir le tableau 3.8. On déduit de ce tableau la valeur de $f[X_0, X_1, X_2, X_3]$ donnée par :

$$f[X_0, X_1, X_2, X_3] = -1.993039639 \cdot 10^{-9}.$$

On a alors

$$E_2(d) \approx -1.993039639 \cdot 10^{-9} \times (d - X_0)(d - X_2)(d - X_2) = 170.903149138443,$$

ce qui est assez élevé dans l'absolue ; l'erreur relative est donnée par exemple par (en utilisant la valeur de τ donnée par (3.58))

$$e_2(d) = \frac{E_2(d)}{\tau} \approx 0.19169710 = 19.169710\%,$$

ce qui est "plus raisonnable".

REMARQUE 3.5. On peut tenir le raisonnement suivant Pour calculer l'erreur

$$E_2(x) = f(x) - \Pi_2(x) = \Pi_3(x) - \Pi_2(x),$$

on détermine $\Pi_3(x)$ grâce au tableau 3.8. On écrit alors

$$E_2(d) = \Pi_3(d) - \Pi_2(d),$$

en utilisant la valeur de $\Pi_2(d)$ donnée par (3.58). Mais, c'est beaucoup plus long et identique ! On sait en effet d'après les relations de récurrence de Π_n que :

$$\Pi_3(d) = \Pi_2(d) + f[X_0, X_1, X_2, X_3](d - X_0)(d - X_1)(d - X_2),$$

et donc on a

$$E_2(d) = \Pi_3(d) - \Pi_2(d) = f[X_0, X_1, X_2, X_3](d - X_0)(d - X_1)(d - X_2),$$

et c'est donc exactement identique à (3.66) avec $n = 2$ au point d !

REMARQUE 3.6. Il serait peut-être pertinent de remettre en cause ce calcul, non pas sur le plan mathématique, mais sur le plan sportif ou biomécanique : est-il pertinent de se servir des performances sur des durées différentes et donc des compétences différentes ?

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 4

Intégration numérique

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.1.

Pour tout cet exercice, découpons $[A, B]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in \mathbb{R}_+^*$), notés $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi

$$x_0 = A; \quad x_N = B; \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \quad x_{i+1} - x_i = h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{B-A}{N}. \quad (4.1)$$

Par suite pour tout i de $\{0, \dots, N\}$

$$x_i = A + ih. \quad (4.2)$$

- (1) L'approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes composite (voir tableau 4.3 du photocopié de cours) est

$$I_N^T = \frac{h}{2}(f(A) + f(B)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).$$

Pour $N = 4$, on obtient

$$I_N^T = 1/8 + 1/8 e^{-1} + 1/4 e^{-1/16} + 1/4 e^{-1/4} + 1/4 e^{-9/16}.$$

et donc

$$I_N^T = 0.742984. \quad (4.3)$$

- (2) L'erreur commise par la méthode des trapèzes composite (voir tableau 4.4 du photocopié de cours) est

$$E_N^T = -h^2 \frac{(B-A)}{12} f''(\eta) \quad \text{avec } \eta \in [A, B].$$

En théorie (et si $f''(\eta)$ ne varie que peu), si h est divisé par 2, cette erreur est divisée par 4.

REMARQUE 4.1. On peut aussi écrire

$$|E_N^T| \leq h^2 \frac{(B-A)}{12} \max_{x \in [A, B]} |f''(x)|,$$

et remarquer que cette dernière quantité est divisée par 4 quand h est divisée par 2.

- (3) Notons $M_2 = \sup_{x \in [A, B]} |f''(x)|$. On a

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2).$$

que l'on peut majorer par $M_2 = 6$, comme on a déjà fait l'exercice 3.3 page 63 (voir (3.29)). Pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$, il suffit donc que

$$h^2 \frac{(B-A)}{12} M_2 \leq \varepsilon, \quad (4.4)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{(B-A)^3}{12N^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon}} M_2 \leq N. \quad (4.5)$$

Numériquement, on obtient donc pour $A = 0$, $B = 1$, et $\varepsilon = 10^{-4}$

$$N \geq 70.710678$$

et puisque N est entier, on choisit

$$N = 71 \quad (4.6)$$

REMARQUE 4.2. On peut être plus subtil et utiliser la majoration de la remarque 3.2 page 64 de l'exercice 3.3 (voir (3.36)) et on obtient $N = 41$, ce qui est plus faible que (4.6).

En utilisant le calcul symbolique de matlab, on peut avoir une approximation très précise de l'intégrale recherchée :

$$I = 0.746824, \quad (4.7)$$

Pour la valeur de N donnée par (4.6), on a

$$I_N^T = 0.746812, \quad (4.8)$$

on vérifie *a posteriori* alors que

$$|I - I_N^T| = 1.2162 \cdot 10^{-5}.$$

ce qui est bien inférieure à 10^{-4} .

- (4) L'approximation de l'intégrale par la méthode de Simpson composite (voir tableau 4.3 du polycopié de cours) est

$$I_N^S = \frac{h}{6} \left(f(A) + f(B) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right).$$

Pour $N = 2$, on obtient

$$I_N^T = 1/12 + 1/12 e^{-1} + 1/6 e^{-1/4} + 1/3 e^{-1/16} + 1/3 e^{-9/16}.$$

et donc

$$I_N^T = 0.746855. \quad (4.9)$$

- (5) L'erreur commise par la méthode de Simpson composite (voir tableau 4.4 du polycopié de cours) est

$$E_N^S = -h^4 \frac{(B-A)}{2880} f^{(4)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B].$$

Comme précédemment, on pose $M_4 = \sup_{x \in [A, B]} |f^{(4)}(x)|$. On a

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2} (3 - 12x^2 + 4x^4). \quad (4.10)$$

Pour majorer $|f^{(4)}(x)|$, on procède exactement comme dans l'exercice 3.3 page 63. On écrit

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2} p_4(x), \quad (4.11)$$

où

$$p_4(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4. \quad (4.12)$$

Puis on raisonne comme dans l'inégalité (3.23) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(4)}(x)| \leq 4 \left| e^{-x^2} \right| |p_4(x)|, \quad (4.13)$$

et, comme dans les inégalités (3.24) et (3.25), on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(4)}(x)| \leq 4e^{-x^2} |p_4(x)|, \quad (4.14)$$

et

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(4)}(x)| \leq 4 |p_4(x)|. \quad (4.15)$$

Pour majorer $|p_4(x)|$, on raisonne comme on a déjà fait dans les inégalités (3.26), (3.27) et (3.28) en utilisant l'inégalité triangulaire (3.22), écrite ici sous sa forme plus générale :

$$\forall (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q, \quad \left| \sum_{i=1}^q b_i \right| \leq \sum_{i=1}^q |b_i|. \quad (4.16)$$

On écrit, ensuite, pour tout polynôme Q :

$$Q(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i,$$

puis les inégalités successives (grâce à (4.16))

$$\begin{aligned} |Q(x)| &= \left| \sum_{i=0}^p a_i x^i \right|, \\ &\leq \sum_{i=0}^p |a_i x^i|, \\ &\leq \sum_{i=0}^p |a_i| |x|^i, \\ &\leq \sum_{i=0}^p |a_i| |x|^i, \end{aligned}$$

et puisque $|x| \leq 1$

$$\leq \sum_{i=0}^p |a_i|.$$

On a donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad |Q(x)| \leq \sum_{i=0}^p |a_i|.$$

Ici, pour p_4 donné par (4.12), dont les coefficients sont $\{4, 0, -12, 0, 3\}$, on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |p_4(x)| \leq 19.$$

Ainsi, grâce à (4.15), on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{(4)}(x)| \leq M_4. \quad (4.17)$$

où

$$M_4 = 76. \quad (4.18)$$

Pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$, il suffit donc que

$$h^4 \frac{(B-A)}{2880} M_4 \leq \varepsilon. \quad (4.19)$$

On raisonne comme dans la question 3. Il faut avoir

$$N \geq \sqrt[4]{\frac{(B-A)^5}{2880\varepsilon} M_4}. \quad (4.20)$$

Numériquement, on obtient pour $A = 0$, $B = 1$, et $\varepsilon = 10^{-4}$

$$N \geq 4.030466,$$

et puisque N est entier, on choisit

$$N = 5, \quad (4.21)$$

à comparer avec la valeur donnée par (4.6).

REMARQUE 4.3. Si utilise la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, le majorant exact (puisque atteint en un point) de g , définie par (4.10), on obtient

$$M_4 = 12,$$

qui est un peu plus précis que (4.18). On pourra consulter l'annexe ?? pour une preuve rigoureuse de ce résultat. On peut donc remplacer (4.21) par

$$N = 3.$$

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 5

Transformées de Laplace

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.1.

En cours de rédaction.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.2.

En cours de rédaction.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.3.

En cours de rédaction.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.4.

Voir <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/corTD10.pdf>

Simulations numériques sur l'erreur d'interpolation

Pour f et g données par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sin(x/3), \quad (\text{A.1a})$$

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin((x - 6000)/3), \quad (\text{A.1b})$$

on calcule le polynôme p_n correspondant aux points équirépartis x_i de $[a, b]$ (c'est-à-dire vérifiant $p_n(x_i) = f(x_i)$) par l'une des trois méthodes données en page 62.

Voir la figure A.1 pour laquelle les trois méthodes de calculs se déroulent bien : f et p_n sont indiscernables graphiquement.

Pour n plus grand, la méthode utilisant la forme canonique n'est plus efficace, alors que les deux autres le sont encore ! Voir la figure A.2.

Pour n encore plus grand, la méthode utilisant les polynômes de Lagrange commence à n'être plus efficace, alors que la méthode avec newton avec évaluation d'Horner l'est encore. Ensuite, au delà d'une certaine valeur de n cette méthode-ci ne marche plus ! Voir la figure A.3.

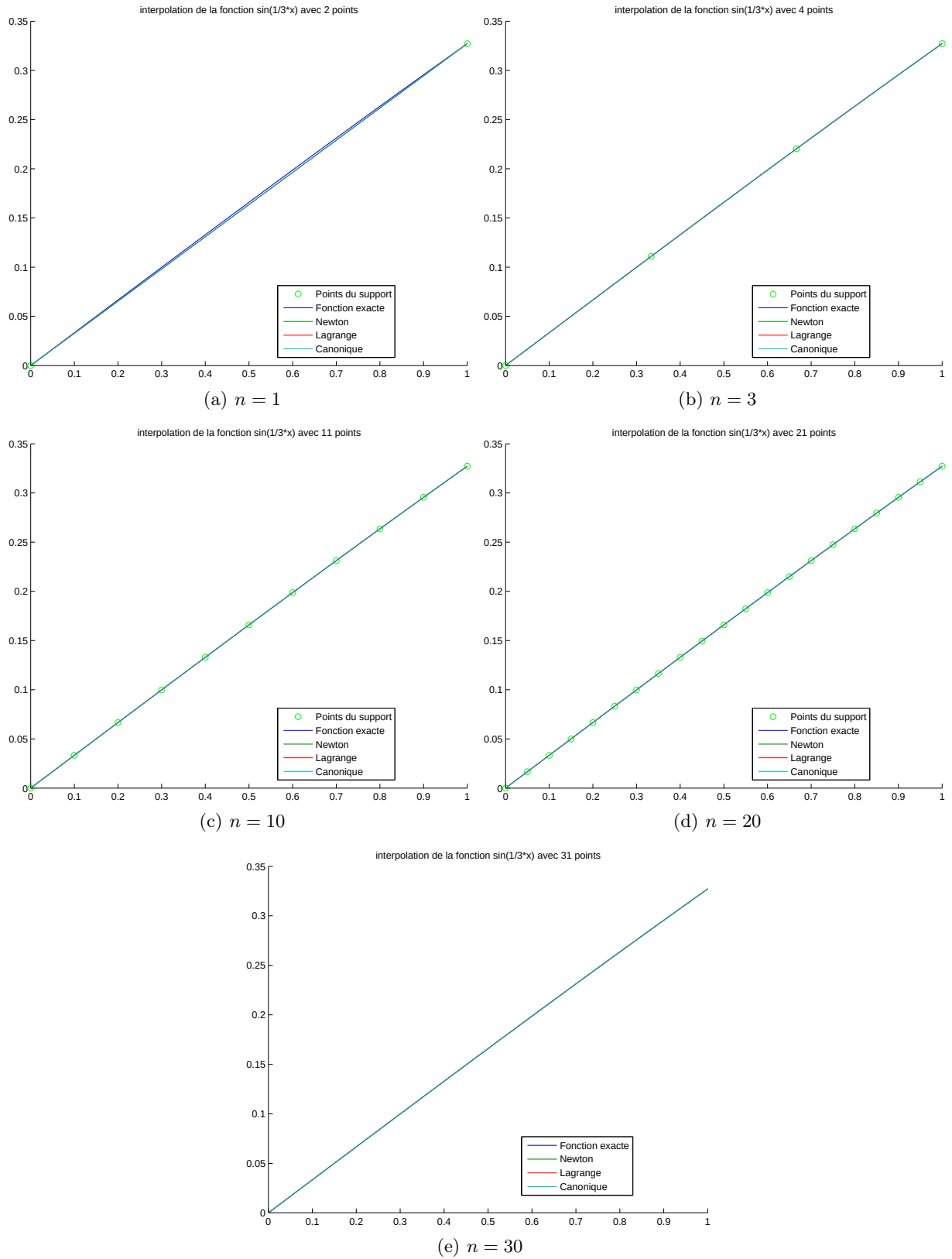
Enfin, on peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre f et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure A.4. On constate que celle-ci est minimale autour de la valeur $n_0 = 9$ et que les trois méthodes coïncident rigoureusement jusqu'à n_0 . Ensuite, de $n_0 + 1$ à $n_1 = 25$, les deux méthodes Newton et canonique voient leur erreur légèrement remonter, en contradiction avec la théorie, à cause des arrondis de calculs. Il en est de même pour celle correspondant à la base Lagrange, avec une erreur un peu moins petite. Ensuite, au-delà de n_1 , l'erreur en canonique augmente plus rapidement que les deux autres méthodes, qui se comportent mieux. Notons aussi la légère supériorité en terme d'erreur de la forme de Newton, qui sera donc à privilégier tout le temps, compte tenu de sa simplicité algorithmique.

Dans un second temps, on peut aussi refaire les mêmes calculs portant cette fois-ci sur la fonction g définie par (A.1b) on obtient un comportement similaire de l'erreur.

Ici, on constate que la méthode de la forme canonique se comporte beaucoup plus mal que dans le cas précédent. Voir la figure A.5. Dès la valeur de $n_0 = 5$, elle commence à ne plus fonctionner, alors que les deux autres se comportent bien ! Ensuite, les méthodes fondées sur Newton et Lagrange donnent encore de bons résultats, du même ordre, Newton se comportant un peu mieux que Lagrange.

On peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre g et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure A.6. Le comportement de l'erreur est identique à celui de la figure A.4, mis à part le fait que la méthode Lagrange a une erreur numérique qui apparaît pour des valeurs de n beaucoup plus petite que précédemment.

Finalement, retenons que la forme de Newton et l'évaluation par l'algorithme de Horner évoqués dans le point 1 page 62 est largement supérieure aux deux autres méthodes (Lagrange et base canonique) tant sur le plan algorithmique que numérique.

FIGURE A.1. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.

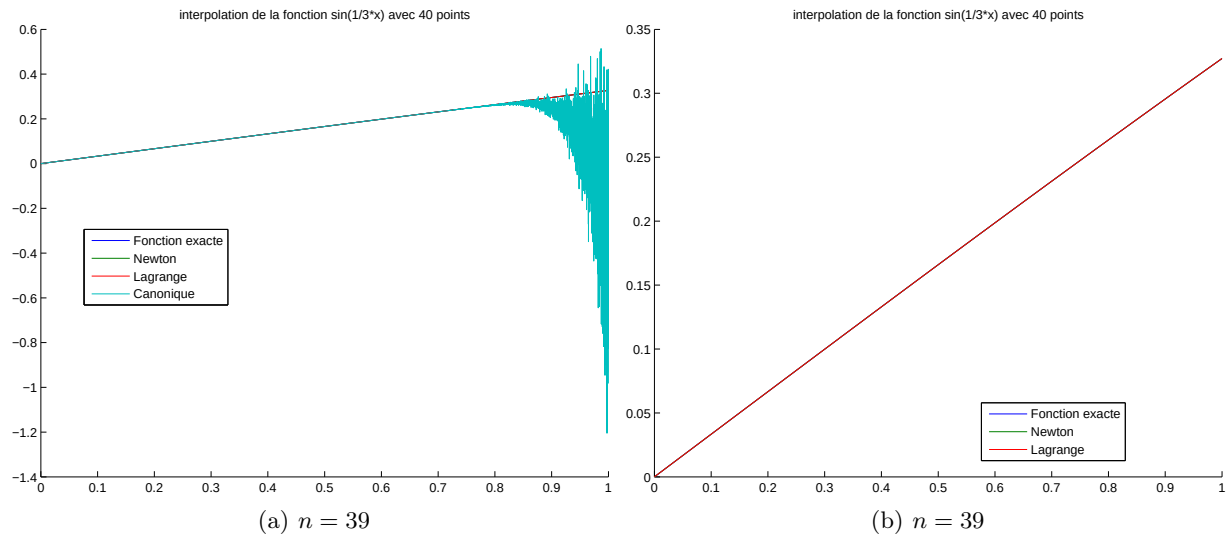
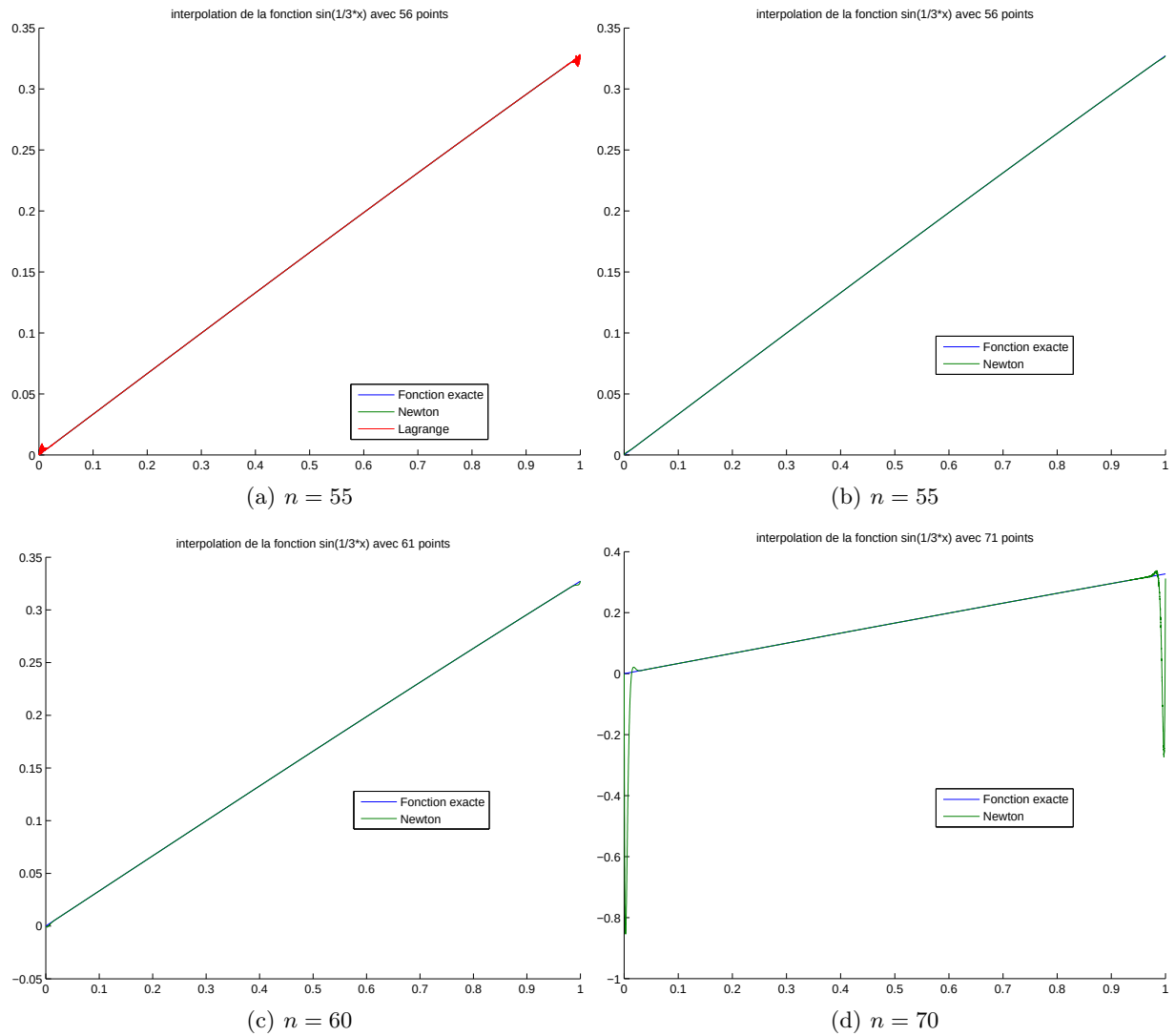


FIGURE A.2. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de deux façons différentes.

FIGURE A.3. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de une ou deux façons différentes.

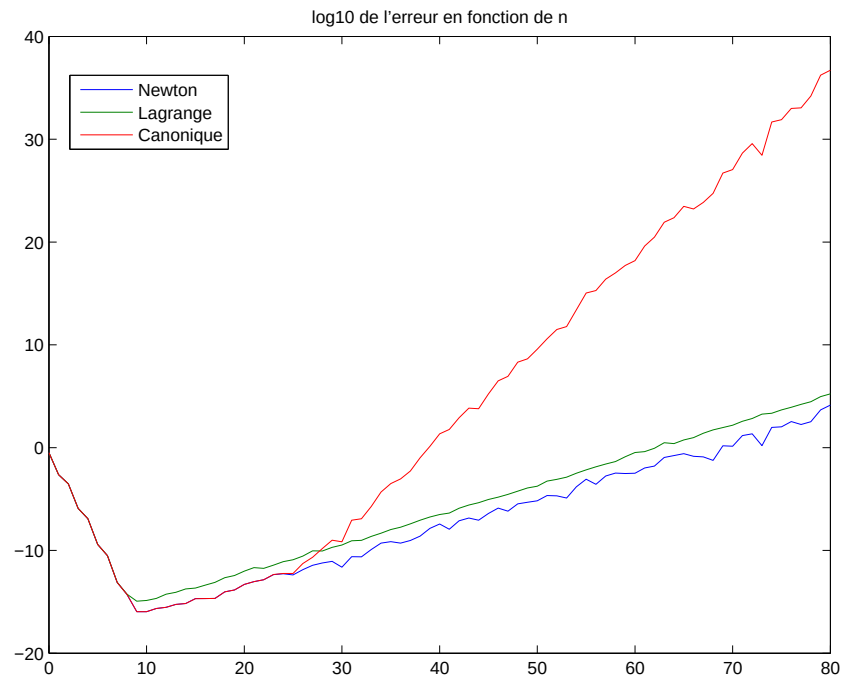
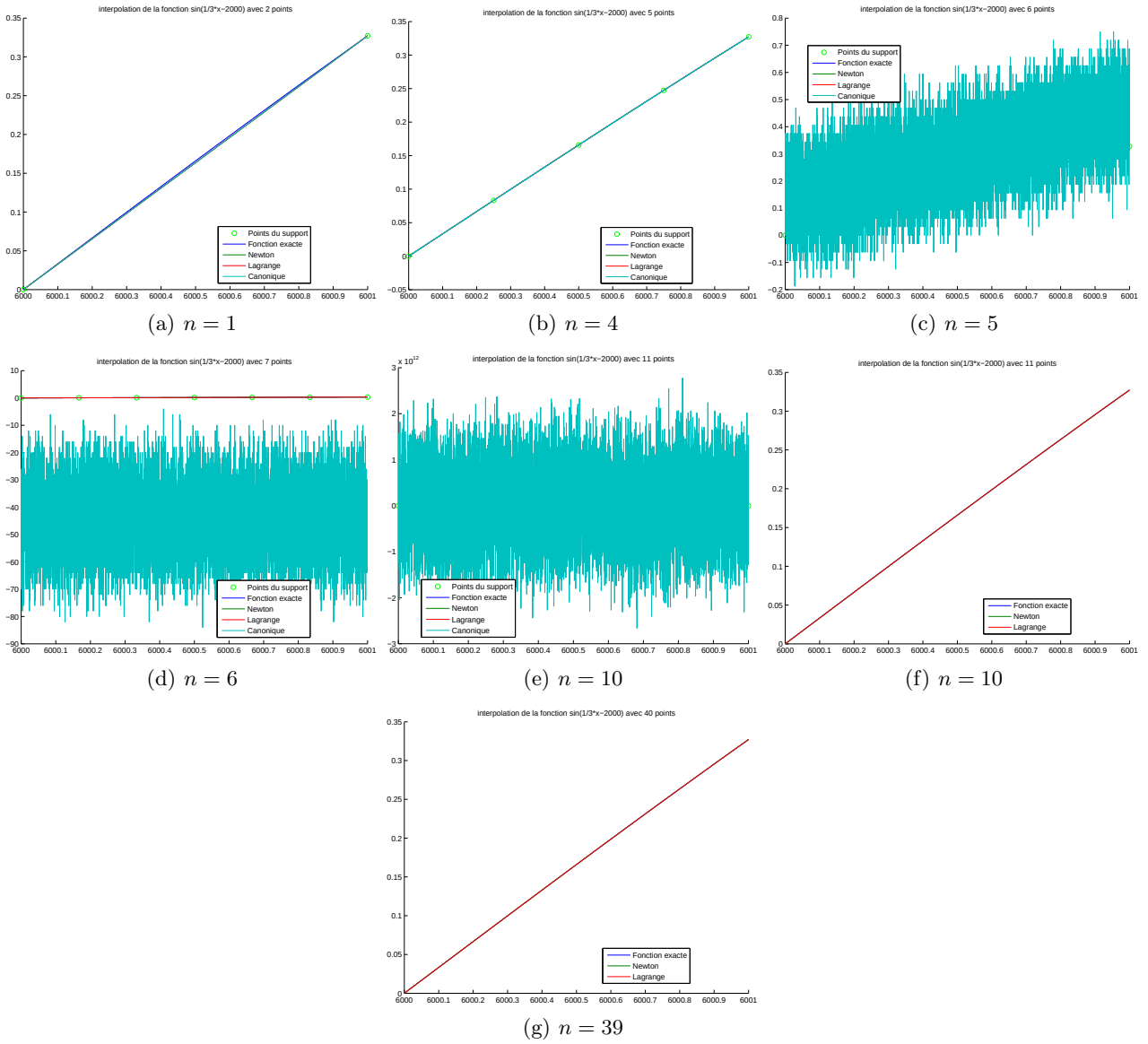
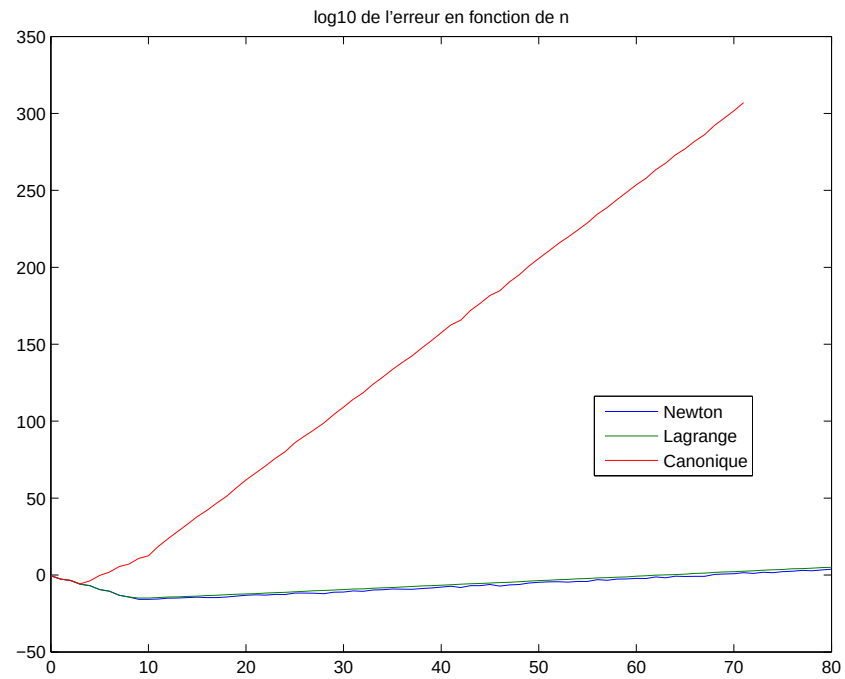


FIGURE A.4. Logarithme de l'erreur en base 10 entre f et son interpolée p_n .

FIGURE A.5. La fonction g et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.

FIGURE A.6. Logarithme de l'erreur en base 10 entre g et son interpolée p_n .

Bibliographie

- [Bas18] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.
- [Bas22a] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.
- [Bas22b] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.
- [Bas22c] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 39 pages.
- [Bas22d] J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 25 pages.
- [Bas22e] J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 95 pages.
- [Bas24a] J. BASTIEN. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios*. Transparents de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Tronc commun 3A : DDRS : croissance et scénarios". 2024. 106 pages.
- [Bas24b] J. BASTIEN. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios*. Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Tronc commun 3A : DDRS : croissance et scénarios". 2024. 7 pages.
- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^e étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [Mac17] D. MACHON. *TD de Mathématiques pour l'ingénieur (3A Matériaux, Polytech)*. 2017.
- [RDO88] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse*. 2^e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4^e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.