

NOTES DE COURS DE L'UE MPISIR

Systemes Industriels et Robotique 3A

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

2024-2025, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 20 janvier 2025

Le lien original de ce document est le suivant :

<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/coursMPISIR.pdf>

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | iii |
| partie 1. Notions d'Analyse | 1 |
| Chapitre 1. Rappels sur les fonctions (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) et les développements limités | 2 |
| 1.1. Références | 2 |
| 1.2. Notions de continuité, limite | 2 |
| 1.3. Dérivation | 3 |
| 1.4. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange | 11 |
| 1.5. Applications en l'analyse numérique | 14 |
| Chapitre 2. Équations différentielles (linéaires, ordre 1 et 2, à coefficients constants) | 15 |
| 2.1. Introduction | 15 |
| 2.2. Équations différentielles d'ordre un | 15 |
| 2.3. Équations différentielles d'ordre deux | 24 |
| 2.4. Lien avec MNB | 27 |
| 2.5. Autre types d'équations différentielles | 27 |
| partie 2. Notions d'Analyse numérique | 28 |
| Chapitre 3. Interpolation polynomiale | 29 |
| 3.1. Motivation | 29 |
| 3.2. Interpolation polynomiale | 30 |
| 3.3. Un exercice type à savoir traiter parfaitement (Interpolation de Lagrange) | 50 |
| 3.4. Interpolation par intervalles ou par morceaux (dite aussi interpolation composée ou composite) | 51 |
| 3.5. Approximation au sens des moindres carrés | 55 |
| Chapitre 4. Intégration numérique | 58 |
| 4.1. Méthodes élémentaires et composites (composées) | 58 |
| 4.2. Un exercice type à savoir traiter parfaitement | 75 |
| partie 3. Transformations continues | 79 |
| Chapitre 5. Transformées de Laplace | 80 |
| 5.1. Rappels sur les intégrales impropres | 80 |
| 5.2. Définition et propriétés élémentaires | 80 |
| 5.3. Tables de transformées de Laplace | 84 |
| 5.4. Transformées de Laplace des dérivées et des primitives et applications | 85 |
| Chapitre 6. Transformées de Fourier | 88 |
| partie 4. Annexes | 89 |

| | |
|---|-----|
| Annexe A. Quelques développements limités usuels | 90 |
| Annexe B. Quelques dérivées usuelles | 91 |
| Annexe C. Différents calculs de l'exemple 3.22 page 46 du cours | 92 |
| Annexe D. Étude théorique d'un problème de moindres carrés | 94 |
| D.1. Rappels sur la régression linéaire | 94 |
| D.2. Rappels sur la norme Euclidienne et le produit scalaire associé | 95 |
| D.3. Théorie | 95 |
| Annexe E. Définition et utilisation de la fonction W de Lambert | 98 |
| E.1. Définition de la fonction W de Lambert | 98 |
| E.2. Utilisation de la fonction W de Lambert : résolution de l'équation $ae^x + bx + c = 0$ | 99 |
| E.3. Utilisation de la fonction W de Lambert : résolution de l'équation $x^x = z$ | 101 |
| Annexe F. Quelques transformées de Laplace | 102 |
| Bibliographie | 103 |

Avant-propos

Ce polycopié constitue les notes de cours de Mathématiques Pour l'Ingénieur du département Systèmes Industriels et Robotique 3A (2024-2025, Automne).

Ce polycopié de cours est normalement disponible à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
 - 'Poste de travail',
 - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
 - puis 'jerome.bastien',
 - puis 'Polytech',
 - puis 'Systèmes Industriels et Robotique 3A'.
 - enfin sur 'MPISIR'.

Pour les chapitres 3 et 4, par soucis de brièveté, un certain nombre d'éléments ne sont pas fournis. On les trouvera dans [DB22]. Les renvois vers la cette référence seront signalés de la façon suivante :

Voir [DB22, l'exemple 2.5 page 16].♠

Des notes en petits caractères comme suit pourront être omises en première lecture :

Attention, passage difficile! ◇

Première partie

Notions d'Analyse

Rappels sur les fonctions (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) et les développements limités

Ce chapitre, issu et adapté de [Bas22, chapitre 1] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>, sera présenté succinctement. Le lecteur aura a charge de le lire exhaustivement !

1.1. Références

- (1) On pourra consulter par exemple le site de Frédéric Holweck relatif à l'UV MT12 de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM) :

<http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/MT12.html>

Pour les développements limités, on pourra consulter notamment le liens suivant :

<http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/dl.pdf>

On jettera aussi un œil à

http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf

- (2) On pourra aussi consulter par exemple le site d'Arthur Lannuzel relatif à l'UV MT11 de l'UTBM :

<http://mathutbm.free.fr/MT11.html>

On pourra consulter notamment les liens suivants :

— Dérivée de fonctions : <http://mathutbm.free.fr/MT11/cours/deriveesdefonctions.pdf>

— Développements limités : <http://mathutbm.free.fr/MT11/cours/Dvlpplimites.pdf>

— Développements limités à connaître : <http://mathutbm.free.fr/MT11/cours/formulairedvplimites.PDF>

- (3) Pour la dérivation, on pourra consulter le lien de Wikipédia, très instructif, mais à un niveau plus élevé

https://fr.wikipedia.org/wiki/Analyse_des_infiniment_petits_pour_l'intelligence_des_lignes_courbes

1.2. Notions de continuité, limite

Rappelons qu'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} n'est pas nécessairement définie sur tout \mathbb{R} . Elle n'est définie que sur son ensemble de définition D_f . Dans ce cas, $f : \begin{cases} D_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ est de nouveau une application. Par exemple $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction est continue en un point x_0 de son ensemble (à l'intérieur) de définition D_f si on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1.1)$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (1.2)$$

Si on traduit (1.2), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sera continue en un point x_0 ssi "l'écart entre $f(x_0)$ et $f(x)$ est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que x est suffisamment proche de x_0 ".

La plupart des fonctions « usuelles » sont continues là où elles sont définies... sauf où où elles ne le sont pas.

EXEMPLE 1.1. Montrer que la fonction « signe » donnée par

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

est continue sur \mathbb{R}^* et est discontinue en zéro.

EXEMPLE 1.2. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = E(x)$ (partie entière) est discontinue en tous les entiers naturels.

On dit que f admet l pour limite en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.4)$$

- (1) Si f n'est pas définie en x_0 (c'est-à-dire que x_0 n'appartient pas à D_f) alors on peut prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = l$. f , ainsi prolongée, est ainsi continue en x_0 .
- (2) Si f est définie en x_0 (c'est-à-dire que x_0 appartient à D_f), f est continue en x_0 ssi $l = f(x_0)$.

EXEMPLE 1.3. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$ admet 0 comme limite en 0.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en un point x_0 si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \geq A \quad (1.5)$$

On dit par exemple que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si D_f contient un intervalle du type $[b, +\infty[$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.6)$$

EXEMPLE 1.4. Montrer que pour la fonction f donnée par $f(x) = 1/x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

1.3. Dérivation

On pourra consulter, par exemple, [Vél03] ou [Bas18, chapitre 4].

1.3.1. Notions de dérivées

On se donne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et un point a (dans son ensemble de définition).

On considère, pour a et b distincts,

$$\Delta_{a,b}, \text{ la droite passant par } (a, f(a)) \text{ et } (b, f(b)) \text{ avec } a \text{ et } b \text{ distincts.} \quad (1.7)$$

Voir figure 1(a). Puis, pour a fixé, on considère des valeurs de b de "plus en plus proche" de a et on regarde l'évolution de la droite $\Delta_{a,b}$, comme le montre la figure 1.1.

À la limite $b = a$, on obtient la droite tangente à la courbe comme le montre la figure 1.2. La pente de cette droite est par définition le nombre dérivé¹ de f en a , noté $f'(a)$. Pour $b \neq a$, la pente de la droite $\Delta_{a,b}$ définie par (1.7) vaut

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et on pose donc

$$f'(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow a \\ b \neq a}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1.8)$$

1. La fonction dérivée est la fonction, qui, à a associe $f'(a)$, si la dérivée existe.

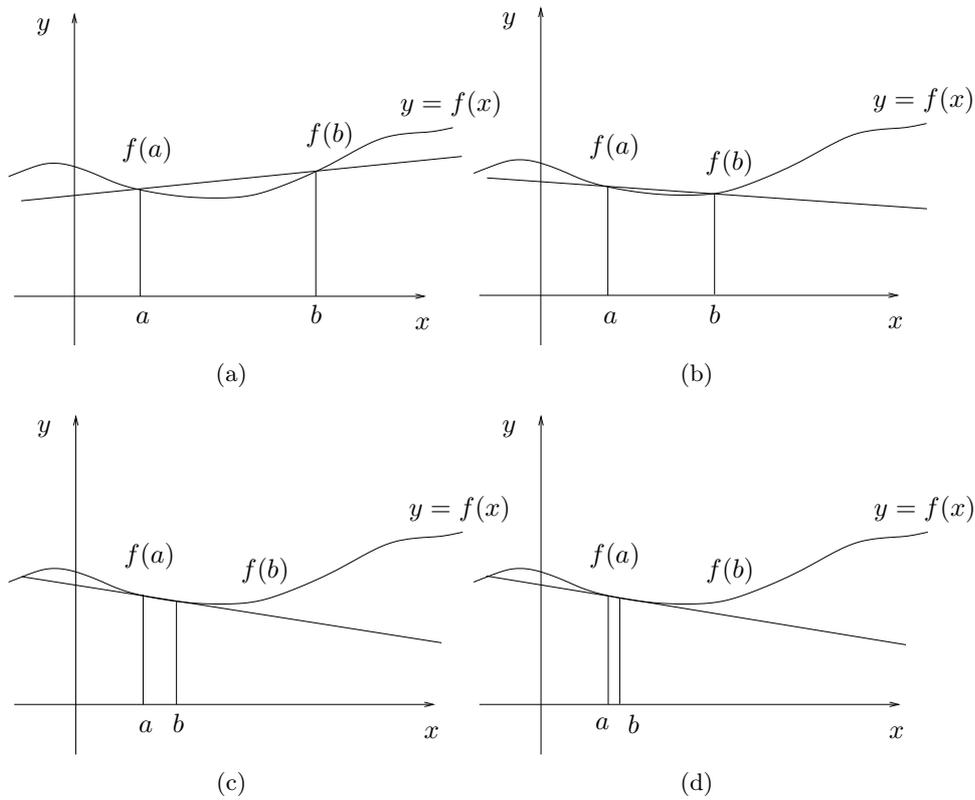


FIGURE 1.1. Évolution de la droite $\Delta_{a,b}$ passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ quand b se "rap- proche" de a .

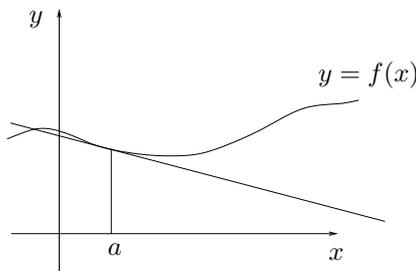


FIGURE 1.2. La tangente à la courbe au point $(a, f(a))$

Cette limite n'existe pas nécessairement. Si elle existe, on dit que f est dérivable en a . On supposera que les fonctions étudiées sont toujours dérivables². (1.8) est équivalent à : si f est dérivable en a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad \left(|a - b| \leq \eta \implies \left| f'(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| \leq \varepsilon \right) \quad (1.9)$$

2. Le but de cette UV n'est pas d'étudier les propriétés de «régularité» des fonctions ou plus généralement, les hypothèses théo- riques nécessaires, mais de savoir utiliser les notions de mathématiques indispensables au métier d'ingénieur. Ainsi, on supposera toujours acquises ces différentes hypothèses théoriques

Si on traduit (1.9), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sera dérivable en un point a et aura pour nombre dérivé en ce point $f'(a)$ ssi "l'écart entre $f'(a)$ et le taux d'accroissement de f entre a et b (défini comme $(f(a) - f(b))/(a - b)$) est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que b est suffisamment proche de a ".

Notons que l'on peut aussi réécrire (1.8) sous la forme

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (1.10)$$

REMARQUE 1.5. Si $b \neq a$, la droite $\Delta_{a,b}$ a pour équation :

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1.11)$$

Cette équation est très simple à établir : elle provient du fait que si les trois points $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et (X, Y) sont alignés alors le taux de d'accroissement de f entre a et b , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, est égal au taux d'accroissement de f entre a et X , égal à $\frac{Y-f(a)}{X-a}$. Plus conventionnellement,

$$Y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(X - a) + f(a). \quad (1.12)$$

Si on fait tendre b vers a , cette droite «tend» vers la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$ (cf. figure 1.2). Par passage à la limite dans (1.12), on constate que l'équation de la tangente à la courbe en $(a, f(a))$ s'écrit

$$Y = f'(a)(X - a) + f(a). \quad (1.13)$$

De façon similaire à (1.11), on pourra retenir (1.13) sous la forme

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = f'(a). \quad (1.14)$$

Le taux d'accroissement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ de f entre a et b est aussi la pente de la droite $\Delta_{a,b}$. C'est aussi la variation de f (ou d'ordonnée) divisée par la variation d'abscisse, soit donc la tangente de la valeur de l'angle entre le vecteur \vec{i} en x du repère et un vecteur directeur de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. $f'(a)$ est parfois appelée "taux d'accroissement instantané" de f en a . C'est aussi la tangente de la valeur de l'angle entre le vecteur \vec{i} en x du repère et un vecteur directeur de la droite tangente.

◇

On écrira parfois (1.8) sous la forme suivante (équivalente³) : au voisinage de a ,

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + (b - a)\varepsilon(b), \quad (1.16a)$$

$$\text{avec } \lim_{b \rightarrow a} \varepsilon(b) = 0. \quad (1.16b)$$

ou alors (en posant $h = b - a$ ou en utilisant (1.10)) au voisinage de a ,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \quad (1.17a)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (1.17b)$$

Ces deux écritures constituent en fait, un développement limité⁴. Voir la section 1.4 page 11.

3. En effet, (1.8) est équivalent à

$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \varepsilon(b), \quad (1.15)$$

avec

$$\lim_{b \rightarrow a} \varepsilon(b) = 0$$

et en multipliant par $b - a$, on retrouve (1.16).

4. Les équations (1.17a) et (1.17b) peuvent s'écrire aussi, au «premier ordre» près en h et au voisinage de a :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a), \quad (1.18)$$

qu'on notera aussi sous la forme

$$\frac{df}{dx}(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (1.19)$$

Autrement dit, on assimile la courbe à la tangente. Cette notion se généralisera grâce aux formules de Taylor et de développements limités d'ordre plus élevés, où l'on assimilera f non plus à polynôme de degré un mais de degré n pour $n \in \mathbb{N}$. Cependant attention aux erreurs que peut produire l'écriture de (1.18), notamment si $f'(a)$ est nul. On peut être tenter d'écrire abusivement, par

REMARQUE 1.6.

- (1) La notion de dérivée est liée à celle de vitesse instantanée en mécanique. Une vitesse moyenne est le rapport d'une variation d'abscisse sur une durée. Si on calcule cette moyenne sur des intervalles de temps de plus en plus brefs, on obtiendra une vitesse instantanée qui est la dérivée de l'abscisse par rapport au temps. Voir [Bas18, Chapitre intitulé "Dérivée, vitesse, accélération, intégrale"] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/tutoratL2biomeca.pdf>.
- (2) La tangente peut aussi être mise en évidence en faisant un zoom sur une courbe. Voir la figure 1.3 page suivante.
En zoomant "de plus en plus" sur un point donné, la courbe se confond avec une droite, qui est sa tangente en ce point.

1.3.2. Règles de dérivations

Donnons les règles suivantes : pour toute fonction f et g^5 pour tout réels α et β , pour tout réel x ,

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad (1.22a)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (1.22b)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}, \quad (1.22c)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ si } g(x) \neq 0, \quad (1.22d)$$

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))'(x) = g'(x)f'(g(x)), \quad (1.22e)$$

$$(f^\alpha)'(x) = \alpha(f^{\alpha-1})(x)f'(x), \quad (1.22f)$$

$$\left(f^{(-1)}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}, \text{ où } f^{(-1)} \text{ est l'application réciproque de } f. \quad (1.22g)$$

L'équation (1.22f) est souvent écrite pour α entier. Pour $\alpha = 1/2$, elle permet de retrouver par exemple que

$$(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}. \quad (1.23)$$

Pour $\alpha = -1$, elle permettrait de retrouver $(1/f(x))'$.

exemple, en zéro :

$$\cos(h) \approx \cos(0) + h \cos'(0) = 1, \quad (1.20)$$

et d'en déduire, pour h non nul ,

$$\frac{1 - \cos(h)}{h^2} \approx \frac{0}{h^2} \approx 0,$$

ce qui pourrait impliquer

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = 0,$$

alors qu'on peut montrer que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}. \quad (1.21)$$

Si on écrit correctement les développements limités, on n'a plus ce paradoxe. En effet, on réécrit (1.20) sous la forme

$$\forall h, \quad \cos(h) = \cos(0) + h \cos'(0) + \frac{h^2}{2} \cos''(0) + h^2 \varepsilon(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2} - \varepsilon(h),$$

dont on déduit (1.21).

5. supposées être dérivable en x

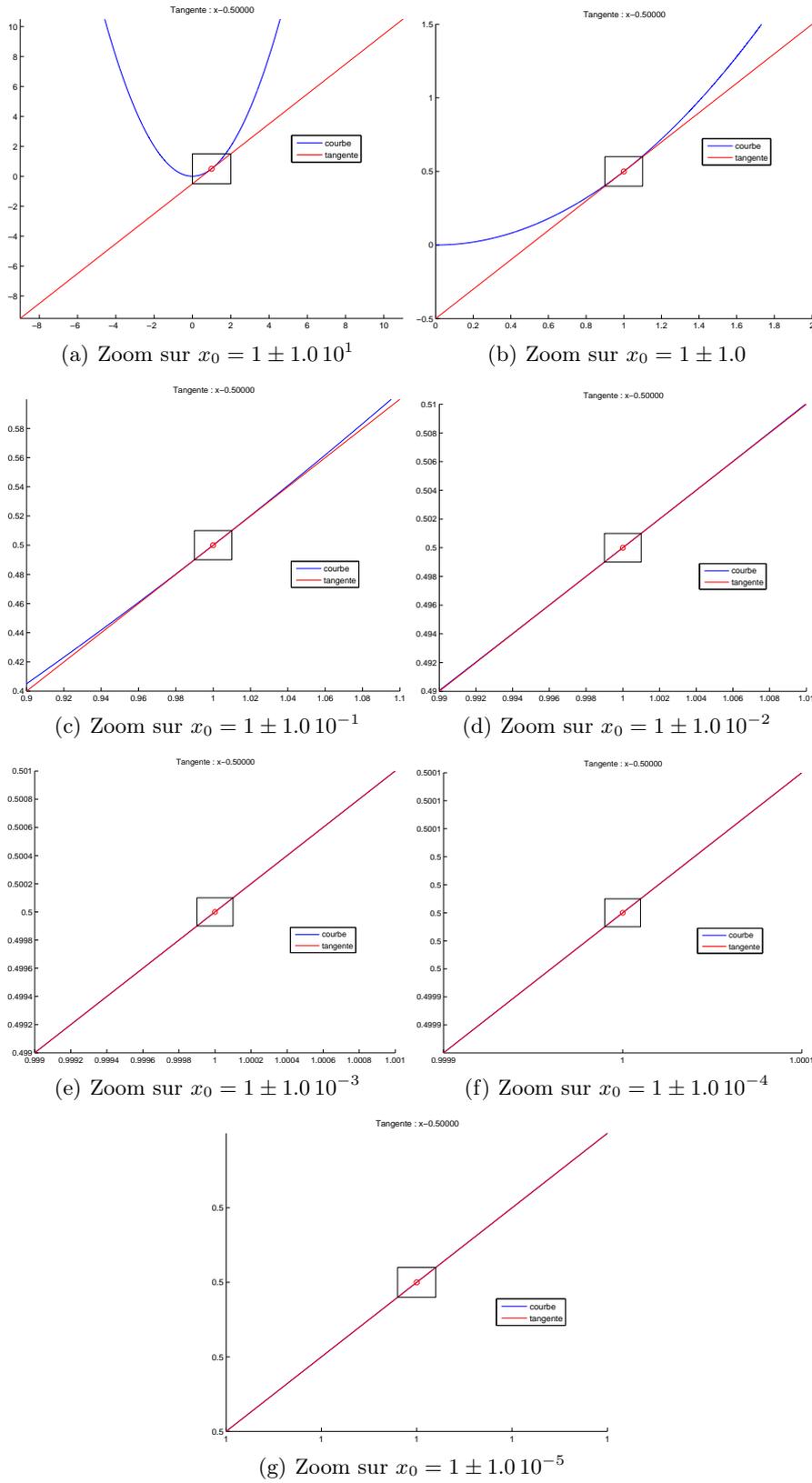


FIGURE 1.3. Zoom progressif sur un point d'une parabole.

On donne les dérivées usuelles en annexe B.

Voir les exercices de TD correspondant.

1.3.3. Rappels sur la monotonie d'une fonction

L'une des applications directes de la dérivation est l'étude la monotonie (croissance ou décroissance) d'une fonction, étudiée en section 1.3.4 page suivante. Rappelons-en quelques éléments.

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_monotone

On rappelle :

DÉFINITION 1.7 (Monotonie au sens large). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I . On dit que f est :

- croissante (ou : croissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$;
- décroissante (ou : décroissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$;
- monotone (ou : monotone au sens large) sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

DÉFINITION 1.8 (Monotonie au sens strict). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I . On dit que f est :

- strictement croissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$;
- strictement décroissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$;
- strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I .

EXEMPLE 1.9.

- (1) La fonction x^n , de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . En effet, si a, b, a' et b' sont des réels tels que $0 \leq a < b$ et $0 \leq a' < b'$, alors $aa' < bb'$. En effet, on a $b - a > 0$ d'où $(b - a)a' > 0$ d'où

$$ba' > aa'. \quad (1.24)$$

De même $b' - a' > 0$, d'où $b(b' - a') > 0$ d'où

$$bb' > ba'. \quad (1.25)$$

D'après (1.24) et (1.25), on a

$$bb' > ba' > aa'.$$

On en déduit par récurrence sur l'entier n que pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls tels que $x < y$, on a $x^n < y^n$.

- (2) Lorsque n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est strictement croissante sur \mathbb{R} . En effet, elle est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (cf. l'exemple précédent) et impaire.

PROPOSITION 1.10 (Limite d'une fonction monotone). Soit f définie et croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I du type $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f vérifie alors l'une des deux assertions suivantes :

- (1) Soit, elle n'est pas majorée (resp. minorée) et elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers b .
- (2) Soit elle majorée (resp. minorée) et elle tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers b .

On a évidemment le même résultat en $-\infty$.

PROPOSITION 1.11 (bijection). Une application strictement monotone et continue d'un intervalle $I = (a, b)$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ induit une bijection strictement monotone de I vers $[f(a), f(b)]$ ⁶ dont la bijection réciproque est strictement monotone de $[f(a), f(b)]$ vers I , strictement croissante (resp. décroissante) si f l'est.

6. si a n'est pas fini, $f(a)$ désigne la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , qui existe dans $[-\infty, \infty]$; idem en b .

1.3.4. Application de la dérivation à l'étude de la monotonie d'une fonction

THÉORÈME 1.12 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). Soient I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Alors,

- (1) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).
- (2) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et de plus l'ensemble des points où la dérivée f' s'annule est d'intérieur vide (c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle non réduit à un singleton).
- (3) f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

En pratique, notons que la seconde assertion du point 2 est vraie en particulier si les zéros⁷ de f' sont en nombre fini. En retiendra donc plutôt la forme simplifiée suivante :

PROPOSITION 1.13 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). Soient I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Alors, si $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et si les zéros de f' sont en nombre fini alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

EXEMPLE 1.14. Montrer à la main que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , strictement décroissante sur \mathbb{R}_- et non monotone sur \mathbb{R} .

EXEMPLE 1.15. Montrer à la main que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$ et reprendre les résultats de l'exemple 1.14.

EXEMPLE 1.16. Reprendre les exemples 1.9 page précédente à l'aide de la dérivée.

EXEMPLE 1.17. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* mais pas en zéro.

EXEMPLE 1.18. La fonction $x \mapsto x^3$ est-elle strictement croissante sur \mathbb{R} ? Quel est la valeur de sa dérivée en zéro? Commenter!

Voir les exercices de TD correspondant.

De cela, on déduira les célèbres tableaux de variations.

EXEMPLE 1.19. Traitons cet exemple sous forme d'exercice corrigé.

Énoncé

- (1) Sur l'intervalle $[1, 3]$, étudier la fonction polynômiale donnée par

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 1. \quad (1.26)$$

- (2) La tracer succinctement
- (3) En déduire ses extrêmes.
- (4) Quels sont les extrêmes de la fonction $|p|$ sur $[1, 3]$?

Corrigé

- (1) La dérivée p' de p vaut

$$p'(x) = -3x^2 + 8x - 4, \quad (1.27)$$

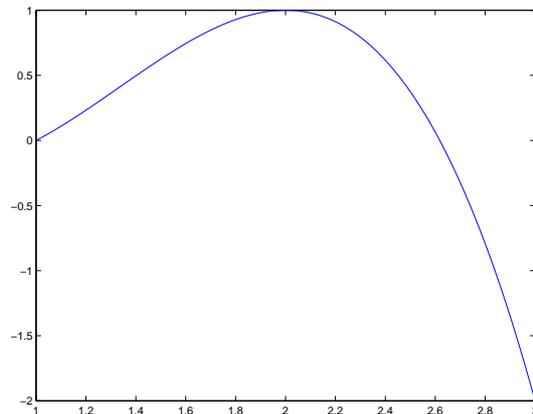
dont les racines sont $2/3$ et 2 . On en déduit le tableau de variation de la fonction p . Voir le tableau 1.1 page suivante. Ainsi, p est strictement croissante sur $[1, 2]$ et p est strictement décroissante sur $[2, 3]$.

- (2)

Voir la figure 1.4.

7. c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $f'(x) = 0$. On parle aussi de racine de f' .

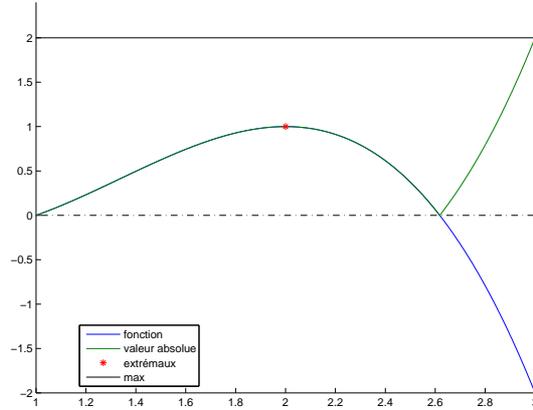
| | | | |
|-------------------|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 |
| signe de $p'(x)$ | + | 0 | - |
| variations de p | 0 | 1 | -2 |

TABLE 1.1. Tableau de variation de p FIGURE 1.4. Le tracé de la fonction p .

- (3) Les extrémums de p sont les valeurs par p des valeurs appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Leurs images par p sont $\{0, 1, -2\}$. Ainsi, les extrémums de p sont -2 , pour le minimum et 1 , pour le maximum.
- (4) On vérifie que 0 et 2 sont le minimum et le maximum de $|p|$.

REMARQUE 1.20.

- Cette majoration d'une fonction sera très souvent faite en Analyse numérique (voir partie 2) pour majorer des erreurs d'interpolation, d'intégration
- Si on utilise la fonction http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/fichiers_matlab/maxabsfun.m, disponible sur le web, on obtient directement le résultat suivant : le maximum de $|p|$ est égal à 2 . Voir la figure 1.5.
- En fait, cet exercice a été posé « à l'envers » ! On se donne x_0, x_1 et x_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à $1, 2$ et 3) et y_0, y_1 et y_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à $0, 1$

FIGURE 1.5. Le résultat de la fonction `maxabsfun.m`.

et -2). On cherche une fonction polynomiale p telle que

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ p'(x_1) &= y_1, \\ p(x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

La théorie de l'interpolation nous dit que ce polynôme existe et est unique et permet de le construire. Voir [BM03] et chapitre 3.

1.4. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange

1.4.1. Développements limités

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_limité](http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9veloppement_limit%C3%A9)

Un développement limité généralise à l'ordre n quelconque, l'approximation à l'ordre 1 de la fonction par sa tangente. En effet, on peut écrire l'équation (1.16) sous la forme équivalente :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad (1.28)$$

où ε est une fonction tendant vers zéro quand x tend vers a .

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe a_0, a_1, \dots, a_n et une fonction ε tendant vers zéro au voisinage de zéro vérifiant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n\varepsilon(x - a) = \sum_{i=0}^n a_i(x - a)^i + (x - a)^n\varepsilon(x) \quad (1.29)$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n) = \sum_{i=0}^n a_i(x - a)^i + o((x - a)^n). \quad (1.30)$$

Si f est dérivable n fois en a , on montre que l'on a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i + o((x-a)^n). \end{aligned} \quad (1.31)$$

On donne les développements limités usuels en annexe A.

Voir le fichier joint (sous matlab) `developpement_limite`, grâce auquel on été obtenus les résultats suivant :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + o(x^1), \\ \sin(x) &= -1/6 x^3 + x + o(x^3), \\ \sin(x) &= \frac{1}{120} x^5 - 1/6 x^3 + x + o(x^5), \\ \sin(x) &= -\frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{120} x^5 - 1/6 x^3 + x + o(x^7). \end{aligned}$$

Voir aussi la figure 1.6.

Pour n fixé, si p_n est la partie principale du développement limité d'une fonction f en x_0 à l'ordre n , on a

$$f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n). \quad (1.32)$$

Cela traduit le comportement dit local de $f(x) - p_n(x)$, à n fixé, quand x tend vers x_0 . Voir figure 1.6.

Les développements limités peuvent s'ajouter, se multiplier, se diviser, se composer, comme des polynômes usuels.

Voir les exercices de TD correspondant.

Les développements limités sont locaux : ils fournissent des renseignements sur le comportement d'une fonction au voisinage d'un point a . Il existe aussi d'autres formules (celles de Taylor-Lagrange) où l'on remplace la fonction inconnue ε par un terme qui peut être majoré par une dérivée de f . Voir section 1.4.2.

1.4.2. Formules de Taylor-Lagrange

En face du développement limité (1.31) (aussi appelé formule de Taylor-Young), on trouve aussi les formules de Taylor-Lagrange qui s'écrivent :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \quad (1.33)$$

où ξ est un réel (inconnu) strictement compris entre a et x .

REMARQUE 1.21.

Si x fixé dans un intervalle I contenant x_0 et si p_n est la partie principale du développement limité d'une fonction f en x_0 à l'ordre n , on a, sur certaines hypothèses :

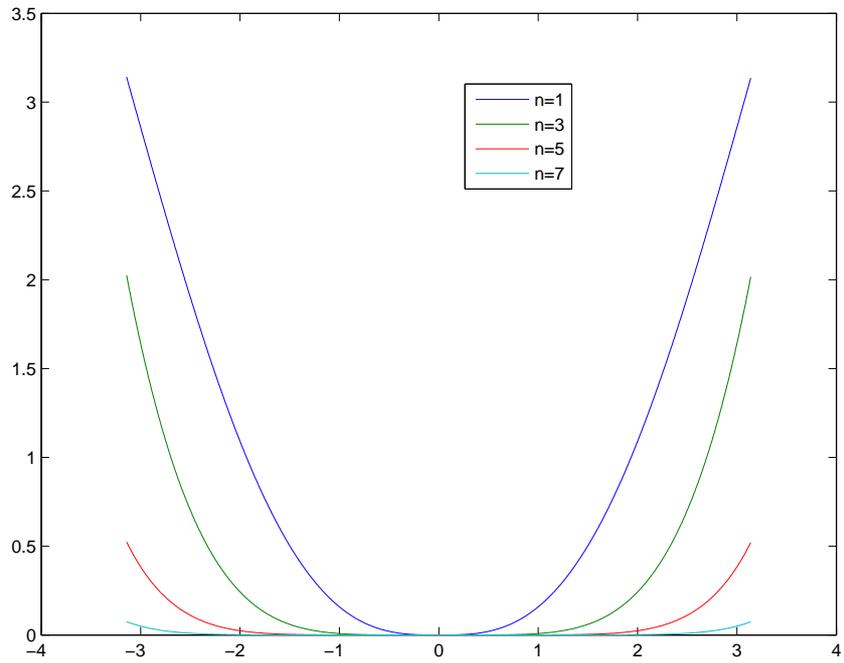
$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = 0. \quad (1.34)$$

Cela traduit le comportement dit global de $f(x) - p_n(x)$, à x fixé, quand n tend vers $+\infty$, à comparer avec (1.32).

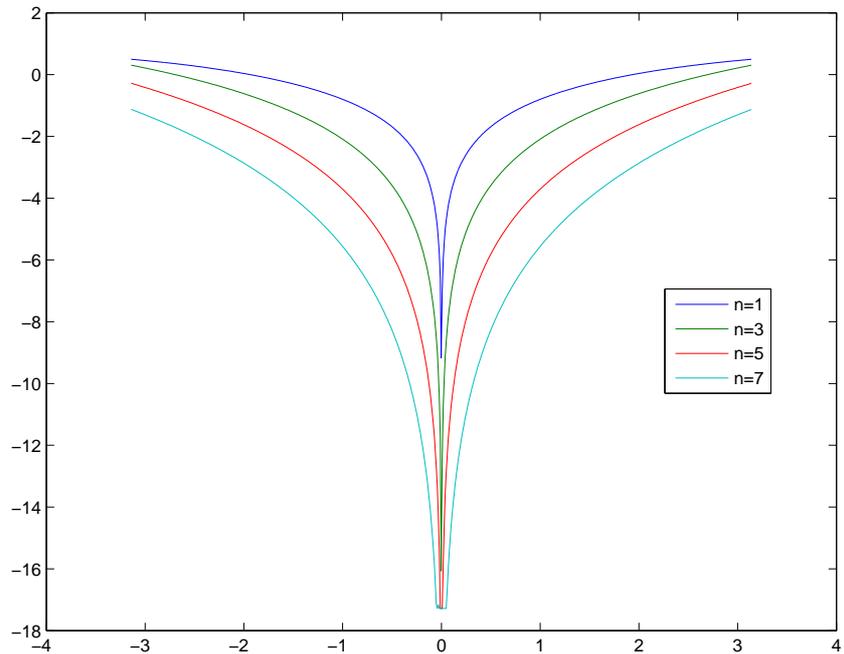
Voir la figure 1.7.

◇

REMARQUE 1.22. Sur l'utilisation de la formule (1.33) pour approcher numériquement $\cos x$ et $\sin x$, on pourra consulter les exercices de TD 1.35 et 1.36.



(a) Valeur absolue de l'écarr



(b) logarithme en base 10 de la valeur absolue de l'écarr

FIGURE 1.6. Écarr entre le sinus et son développement limité à l'ordre n pour différentes valeurs de n

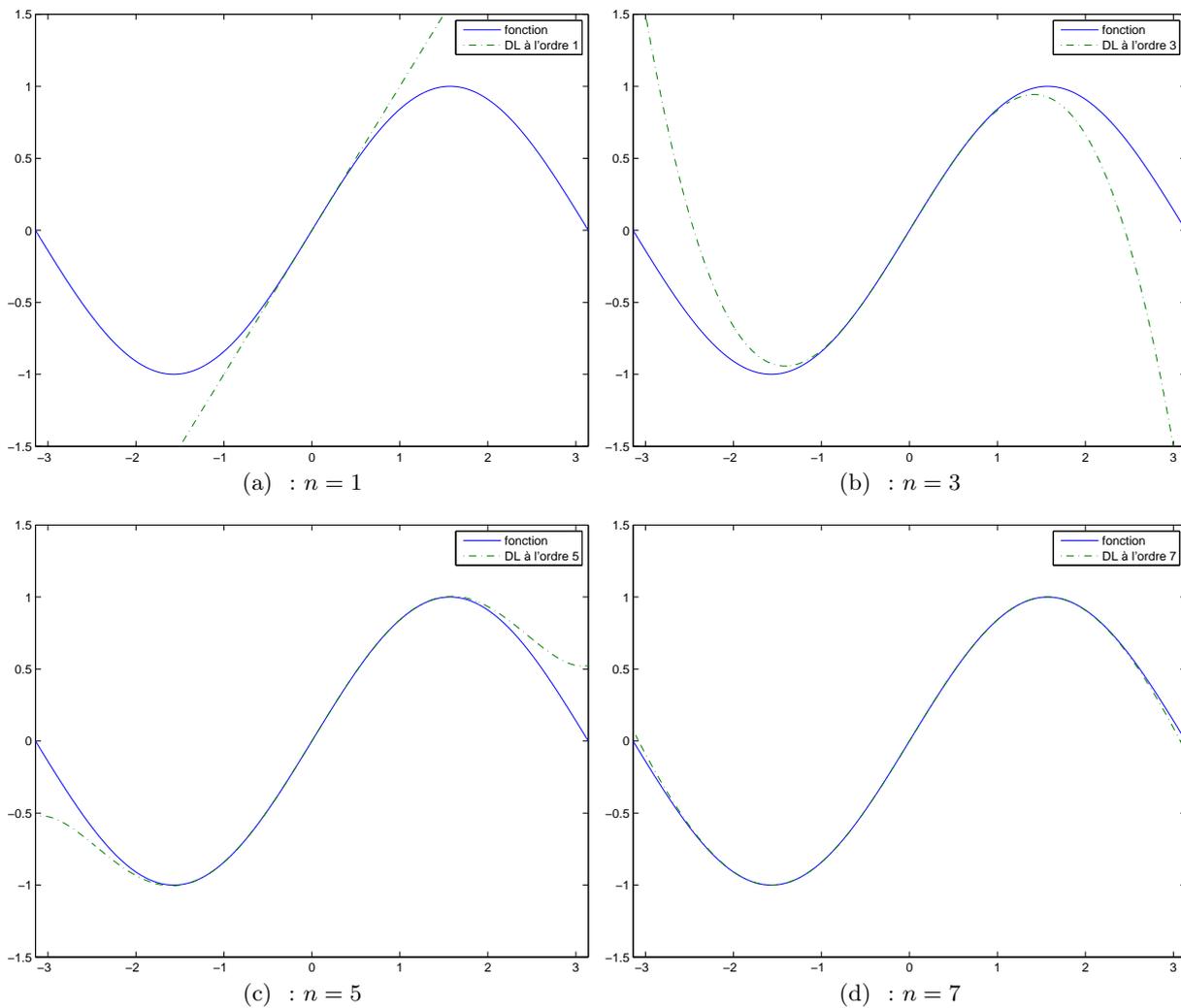


FIGURE 1.7. Tracé de la fonction sinus et de son approximation par différents développements limites d'ordre n .

1.5. Applications en l'analyse numérique

Les formules de Taylor-Lagrange permettent de majorer les erreurs commise en remplaçant $f(x)$ par $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i$: moyennant la majoration de $|f^{(n+1)}|$, on est capable, en utilisant (1.33), de majorer l'erreur

$$E = \left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i \right|.$$

En analyse numérique (voir partie 2), nous utiliserons des majorations d'erreurs identiques à E , erreur que l'on commet dans la théorie de l'interpolation et de l'intégration approchée.

Équations différentielles (linéaires, ordre 1 et 2, à coefficients constants)

Ce chapitre est issu de [Bas22, chapitre 6].

2.1. Introduction

On se donne a , b et c trois réels (a étant non nul) . On commence dans ce chapitre, par le cas le plus simple, celui des équations différentielles du type

$$ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale à l'instant t_0

$$y(t_0) = y_0,$$

qui constituent les équations différentielles du premier ordre, à coefficients constants ou du type

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

avec les conditions initiales à l'instant t_0

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y'_0, \end{aligned}$$

qui constituent les équations différentielles du deuxième ordre, à coefficients constants. Voir les sections 2.2 et 2.3, qui constituent le chapitre 7 de [Bas11]. On notera souvent ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} ay' + by &= f, \\ ay'' + by' + cy &= f. \end{aligned}$$

2.2. Équations différentielles d'ordre un

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),} \tag{2.1a}$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0.} \tag{2.1b}$$

Nous étudions d'abord en section 2.2.1 l'équation homogène associée (EHA) qui correspond à un second membre nul :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = 0. \tag{2.2}$$

Nous en déduisons ensuite en section 2.2.2 les solutions de (2.1a) et (2.1b).

2.2.1. Équation homogène associée

L'équation caractéristique associée à (2.2) est

$$ar + b = 0, \quad (2.3)$$

de solution $r = -b/a$. La solution de (2.2) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-bt/a}}, \quad (2.4)$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln(y))' = \left(-\frac{b}{a}t\right)', \\ &\iff \ln(y) = c - \frac{b}{a}t, \\ &\iff y = e^c e^{-bt/a}, \\ &\iff y = Ce^{-bt/a}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

2.2.2. Équation avec second membre

Il existe deux méthodes, présentées en section 2.2.2.1 et 2.2.2.2.

2.2.2.1. Principe général (recherche d'une solution particulière).

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (2.1a) et de la solution générale de l'EHA (2.2), donnée par (2.4). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.

EXERCICE 2.1. Démontrer ce principe.

Pour déterminer une solution particulière de (2.1a), il existe des techniques propres à chaque type d'équation, qui ne fonctionnent pas toujours. Si cela échoue, on utilise la méthode de la section 2.2.2.2. Elle est fastidieuse mais fonctionne toujours, si bien sûr, l'équation possède une solution calculable à la main.

2.2.2.2. Variation de la constante.

On cherche y sous la forme donnée par (2.4)

$$y(t) = C(t)e^{-bt/a}, \quad (2.5)$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a}$$

Si on réinjecte cette expression dans (2.1a), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= ay'(t) + by(t), \\ &= a \left(C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a} \right) + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} - bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} + \underbrace{(-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a})}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.2. C'est la nullité de $-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}$ qui fait fonctionner le calcul. Si vous ne pouvez faire cette simplification, c'est probablement qu'il y a une erreur quelque part !

On a donc, par division par $ae^{-bt/a}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a}e^{bt/a}f(t)}, \quad (2.6)$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (2.5). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (2.1b).

2.2.3. Équations différentielles d'ordre un linéaire avec a et b dépendant du temps.

On peut tout à fait résoudre l'équation (2.1a) où on considère les coefficients variables. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, a et b , f des fonction continues de $[t_0, +\infty[$ dans \mathbb{R} a ne s'annulant pas sur $[t_0, +\infty[$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)}, \quad (2.7)$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0}. \quad (2.8)$$

La technique de résolution est tout à fait identique.

Comme dans la section 2.2.1, on résoud d'abord l'équation homogène associée :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)ty'(t) + b(t)y(t) = 0. \quad (2.9)$$

La solution de (2.9) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-\alpha(t)}}, \quad (2.10)$$

où

$$\boxed{\alpha \text{ est une primitive quelconque de la fonction } b/a}. \quad (2.11)$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln |y|)' = (-\alpha)', \\ &\iff \ln(y) = c - \alpha, \\ &\iff y = e^{c-\alpha}, \\ &\iff y = e^c e^{-\alpha}, \\ &\iff y = Ce^{-\alpha}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

On utilise ensuite, soit la méthode de la recherche de la solution particulière comme dans la section 2.2.2.1 soit la variation de la constante, comme dans la section 2.2.2.2.

- (1) La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (2.7) et de la solution générale de l'EHA (2.9), donnée par (2.10). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.
- (2) On cherche y sous la forme donnée par (2.10)

$$y(t) = C(t)e^{\alpha(t)}, \quad (2.12)$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (2.7), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t)y'(t) + b(t)y(t), \\ &= a(t) \left(C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)} \right) + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} - b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} + \underbrace{(-b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)})}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

On a donc, par division par $a(t)e^{\alpha(t)}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a(t)}e^{-\alpha(t)}f(t)}, \quad (2.13)$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (2.12). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (2.8).

◇

2.2.4. Preuves théoriques

Voir [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur <http://utbmjb.cherz-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>.

De cette section, on peut retenir les résultats rappelés ici : les solutions de (2.1a) sont données par : il existe une constante c telle que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u) du. \quad (2.14)$$

Si on prend en compte la condition initiale (2.1b), on a

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u) du. \quad (2.15)$$

Cette méthode qui repose sur une formule est théorique et sera parfois utilisée dans ce cours, mais non exigible! ◇

Ces formules se généralisent aussi dans le cas de la section 2.2.3. ◇

2.2.5. Exemples

EXEMPLE 2.3. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \quad (2.16a)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 2. \quad (2.16b)$$

La solution générale de l'équation homogène associée

$$y'(t) + 2y(t) = 0,$$

est donnée par

$$y(t) = Ce^{-2t}, \quad (2.17)$$

où C est un réel.

Nous proposons trois méthodes de résolution.

(1) Cherchons une solution particulière sous la forme $\hat{y}(t) = Ke^{-t}$ où K est un réel. D'après (2.16a), on a

$$-Ke^{-t} + 2Ke^{-t} = e^{-t},$$

et donc $K = 1$. On a donc

$$\hat{y}(t) = e^{-t}. \quad (2.18)$$

On ajoute à cela la solution donnée par (2.17) et il vient donc

$$y(t) = Ce^{-2t} + e^{-t}, \quad (2.19)$$

où C est un réel.

(2) Si on utilise la technique de la section 2.2.2.2, compte tenu de (2.17), on fait varier C et il vient

$$y' = C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t},$$

ce qui donne, réinjecté dans (2.16a)

$$C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 2Ce^{-2t} = e^{-t},$$

et donc

$$C'e^{-2t} = e^{-t},$$

soit encore

$$C' = e^{2t}e^{-t} = e^t.$$

Ainsi, par intégration

$$C = e^t + C_0,$$

où C_0 est un réel et donc, d'après (2.17),

$$y(t) = (e^t + C_0)e^{-2t} = e^{-t} + C_0e^{-2t},$$

et l'on retrouve donc bien (2.19).

Finalement, que l'on utilise l'une ou l'autre des deux premières méthodes, on a donc la solution générale sous la forme

$$y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

La condition initiale (2.16b) donne donc

$$2 = e^0 + Ce^0 = 1 + C,$$

et donc $C = 1$ et la solution cherchée et donc donnée par

$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t}. \quad (2.20)$$

(3) Si on utilise directement la formule (2.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $f(t) = e^{-t}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2e^{-2t} + \int_0^t e^{2(u-t)}e^{-u}du, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t e^u du, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} [e^u]_0^t, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} (e^t - 1), \\ &= 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t}, \\ &= e^{-2t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

ce qui est bien (2.20). \diamond

EXEMPLE 2.4. Traiter l'exercice de TD (corrigé) 2.2.

EXEMPLE 2.5. On s'intéresse à un circuit électrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = e. \quad (2.21)$$

On suppose que

$$i(0) = 0, \quad (2.22)$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 Y(t), \quad (2.23)$$

où E_0 est une constante et Y est définie par

$$Y_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Une solution particulière de (2.21) est donnée par $Ri = E_0$ (c'est-à-dire la solution correspondant au régime stationnaire). D'après la méthode de la section 2.2.2.1, on a, après calculs,

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (2.25)$$

où le temps caractéristique τ est défini par

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (2.26)$$

EXEMPLE 2.6. Étudions de nouveau l'équation différentielle (2.21) et (2.22) de l'exemple 2.5 où e n'est plus un échelon mais est défini par

$$e(t) = E \cos(\omega t). \quad (2.27)$$

On pose

$$F = \frac{E}{L}. \quad (2.28)$$

Proposons trois méthodes :

(1) La méthode de la variation de la constante 2.2.2.2 donne après calculs

$$i(t) = C(t)e^{-t/\tau} \quad (2.29)$$

où τ est défini par (2.26) et

$$C'(t) = Fe^{t/\tau} \cos(\omega t). \quad (2.30)$$

Pour intégrer, on a deux façons de procéder.

(a) On écrit

$$C(t) = C_0 + F \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt,$$

où C_0 est la constante d'intégration et donc

$$C(t) = C_0 + FI, \quad (2.31)$$

où

$$I = \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt. \quad (2.32)$$

On peut calculer cette primitive grâce à deux intégrations par partie. La première fournit

$$I = \tau\omega \int e^{t/\tau} \sin(\omega t) dt + \tau e^{t/\tau} \cos(\omega t).$$

Puis, une seconde fournit successivement :

$$\begin{aligned} I &= \tau\omega \left(-\tau\omega \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt + \tau e^{t/\tau} \sin(\omega t) \right) + e^{t/\tau} \cos(\omega t), \\ &= -\tau^2\omega^2 I + \tau^2\omega e^{t/\tau} \sin(\omega t) + \tau e^{t/\tau} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(1 + \tau^2\omega^2)I = \tau e^{t/\tau} (\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)),$$

et donc

$$I = \frac{\tau e^{t/\tau}}{1 + \tau^2\omega^2} (\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)),$$

soit

$$I = \frac{e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} \right). \quad (2.33)$$

On obtient donc grâce à (2.31), (2.32) et (2.33)

$$C(t) = \frac{F e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right) + C_0. \quad (2.34)$$

(b) Un peu plus rapidement, on peut aussi passer en complexe : on écrit

$$C'(t) = F \operatorname{Re} \left(e^{t/\tau} e^{i\omega t} \right), \quad (2.35)$$

soit

$$C'(t) = F \operatorname{Re} \left(e^{\alpha t} \right), \quad (2.36)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\tau} + i\omega. \quad (2.37)$$

Si \mathcal{C} vérifie

$$\mathcal{C}'(t) = F e^{\alpha t/\tau}, \quad (2.38)$$

nous n'aurons plus qu'à calculer alors

$$C(t) = \operatorname{Re} (\mathcal{C}(t)). \quad (2.39)$$

Intégrons (en complexe) (2.38) qui fournit

$$\mathcal{C}(t) = C_0 + \frac{F}{\alpha} e^{\alpha t/\tau},$$

où C_0 est un nombre complexe et donc

$$\mathcal{C}(t) = C_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau} - i\omega)}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} e^{t/\tau} e^{i\omega t}.$$

On a donc

$$C(t) = \operatorname{Re} \left(C_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau} - i\omega)}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} e^{t/\tau} e^{i\omega t} \right),$$

En reprenant la partie réelle de cette expression, on obtient

$$C(t) = C_0 + \frac{F e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right).$$

où $C_0 = \operatorname{Re}(C_0)$, est une constante, ce qui est bien (2.34).

Finalement, de (2.29) et (2.34), on tire

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right) + C_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.40)$$

où la constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i . On écrit en effet $i(0) = 0$, ce qui donne

$$\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \right) + C_0 = 0.$$

dont on déduit la valeur de C_0 :

$$C_0 = -\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \frac{1}{\tau}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (2.40), on a

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right). \quad (2.41)$$

- (2) En fait, la méthode de la section 2.2.2.1 est encore plus rapide, comme précédemment annoncé. Elle donne

$$i(t) = C_0 e^{-t/\tau} + i_p(t). \quad (2.42)$$

où τ est défini par (2.26) et i_p est une solution particulière de (2.21)-(2.27). On cherche alors une solution particulière i_p sous la forme

$$i_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

On la réinjecte dans (2.21)-(2.27) et on obtient

$$E \cos(\omega t) = L(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) + RA \cos(\omega t) + RB \sin(\omega t)$$

et donc

$$E \cos(\omega t) = (LB\omega + RA) \cos(\omega t) + (RB\omega - A\omega L) \sin(\omega t).$$

Pour cela, il suffit (et il faut en fait) que les termes en cos et sin soient identiques de chaque côté et donc que

$$\begin{aligned} RA + LB\omega &= E, \\ RB - AL\omega &= 0, \end{aligned}$$

système linéaire à deux équations, qu'on résoud très simplement ici : la seconde équation donne

$$A = \frac{RB}{L\omega}, \quad (2.43)$$

que l'on réinjecte dans la première :

$$\frac{R^2 B}{L\omega} + LB\omega = E,$$

et donc

$$\begin{aligned} B &= \frac{E}{\frac{R^2}{L\omega} + L\omega}, \\ &= \frac{\frac{E}{L}\omega}{\frac{R^2}{L} + L\omega^2}, \end{aligned}$$

encore donné, en utilisant (2.26) et (2.28), par

$$B = \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}. \quad (2.44)$$

De (2.43), on déduit alors

$$A = \frac{\frac{1}{\tau} F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}. \quad (2.45)$$

De (2.44) et (2.45), on déduit alors

$$i_p(t) = \frac{\frac{1}{\tau} F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \sin(\omega t).$$

et donc grâce à (2.42), on retrouve exactement (2.40). La constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i comme précédemment.

- (3) Si on utilise directement la formule (2.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = L$, $b = R$ et $f(t) = E \cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}(u-t)} E \cos(\omega u) du, \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{u}{\tau}} E \cos(\omega u) du, \\ &= F e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{u}{\tau}} \cos(\omega u) du, \end{aligned}$$

en utilisant le calcul déjà fait par l'un ou l'autre des deux méthodes présentées ci-dessus (voir les points 1a ou 1b), on déduit de (2.33) :

$$\begin{aligned} &= Fe^{-\frac{t}{\tau}} (I(t) - I(0)) du, \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} Fe^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{t/\tau} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} \right) - \frac{1}{\tau} \right), \\ &= \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien (2.41). \diamond

Analysons l'expression de $i(t)$ donnée par (2.40). On peut remarquer que i est la somme de deux termes i_1 et i_2 (on retrouve en fait les calculs du point 2) définis par

$$i_1(t) = C_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.46)$$

$$i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right). \quad (2.47)$$

Le terme i_1 est en fait la solution générale de l'EHA associée à (2.21) et donc i_2 en est une solution particulière. Remarquons que i_1 tend vers zéro quand t tend vers l'infini ; les électriciens disent en fait qu'au bout d'un temps égal au temps caractéristique τ , i_1 est quasiment nul. Ainsi, pour t «grand» on a

$$i(t) \approx i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right). \quad (2.48)$$

On retrouve le régime stationnaire du circuit électrique, fonctionnant alors en régime périodique de pulsation ω .

On pourrait mettre i dans (2.48) sous la forme

$$i_2(t) = I \cos(\omega t + \phi),$$

et retrouver ainsi I et le déphasage ϕ , que l'on aurait pu aussi retrouver par les calculs d'impédances complexes, comme le montre la remarque suivante :

REMARQUE 2.7. L'équation différentielle (2.21) avec (2.27) est réécrite en régime périodique

$$L \frac{d\mathcal{I}}{dt} + R\mathcal{I} = E \cos(\omega t). \quad (2.49)$$

et en posant

$$\mathcal{I} = I e^{i\omega t} \quad (2.50)$$

où I est complexe. Puisque

$$\frac{d}{dt} (I e^{i\omega t}) = I i\omega e^{i\omega t},$$

(2.49) fournit donc

$$L I i\omega e^{i\omega t} + R I e^{i\omega t} = E e^{i\omega t}$$

et donc

$$L I i\omega + R I = E,$$

soit

$$I = \frac{E}{R + L i\omega},$$

que l'on calcule de façon classique :

$$\begin{aligned} \frac{E}{R + L i\omega} &= E \frac{R - L i\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}, \\ &= E \frac{\frac{R}{L} - i\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}, \\ &= \frac{E}{L} \frac{\frac{R}{L} - i\omega}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}, \\ &= \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.50)

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= e^{i\omega t} \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right), \\ &= (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right),\end{aligned}$$

et si on reprend la partie réelle, on a donc

$$i(t) = \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right),$$

ce qui est bien identique à (2.48).

2.3. Équations différentielles d'ordre deux

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction continue de $[t_0, +\infty[$ dans \mathbb{R} et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),} \quad (2.51a)$$

avec éventuellement les conditions initiales

$$\boxed{y(t_0) = y_0,} \quad (2.51b)$$

$$\boxed{y'(t_0) = y'_0.} \quad (2.51c)$$

Comme pour la section 2.2, nous étudions d'abord en section 2.3.1 l'équation homogène associée (EHA) qui correspond à un second membre nul :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \quad (2.52)$$

Nous en déduisons ensuite en section 2.3.2 les solutions de (2.51).

2.3.1. Équation homogène associée

L'équation caractéristique associée à (2.51a) est

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (2.53)$$

qui admet *a priori* deux solutions complexes r_1 et r_2 . De façon générale, la solution de (2.52) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},} \quad (2.54)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

En fait, on exprime que cette solution est réelle et on étudie alors les différents cas suivants selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta \neq 0$: on a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 .

(a) Si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont réelles données par

$$r_k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (2.55)$$

et la solution générale de (2.52) s'écrit

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},} \quad (2.56)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

(b) Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjuguées ; on considère $(\omega, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définis par

$$r_k = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega, \quad (2.57)$$

et la solution générale de (2.52) s'écrit ¹

$$\boxed{y(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))}, \quad (2.59)$$

où A et B sont deux constantes.

(2) Si $\Delta = 0$: on a deux racines réelles confondues, égales à

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad (2.60)$$

et la solution générale de (2.52) s'écrit

$$\boxed{y(t) = e^{rt} (At + B)}, \quad (2.61)$$

où A et B sont deux constantes.

2.3.2. Équation avec second membre

La méthode est la même que dans la section 2.2.2 : il existe deux méthodes, présentées en section 2.3.2.1 et 2.3.2.2.

2.3.2.1. Principe général. La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (2.51a) et de la solution générale de l'EHA (2.52). On détermine ensuite les constantes d'intégration grâce à la condition initiale.

EXERCICE 2.8. Démontrer ce principe.

2.3.2.2. (Double) variation de la constante. On cherche y sous la forme

$$\boxed{y(t) = C_1(t)z_1(t) + C_2(t)z_2(t)}, \quad (2.62)$$

où «les deux constantes» C_1 et C_2 sont considérées comme deux fonctions et z_1 et z_2 sont solutions particulières indépendantes ² de l'EHA (2.52). Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{r_1 t}, & z_2(t) &= e^{r_2 t}, & \text{dans le cas 1a,} \\ z_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\omega t), & z_2(t) &= e^{\alpha t} \sin(\omega t), & \text{dans le cas 1b,} \\ z_1(t) &= t e^{rt}, & z_2(t) &= e^{rt}, & \text{dans le cas 2.} \end{aligned}$$

On impose la condition

$$\boxed{C_1' z_1 + C_2' z_2 = 0}. \quad (2.63)$$

Ainsi, il vient successivement

$$\begin{aligned} y' &= C_1' z_1 + C_2' z_2 + C_1 z_1' + C_2 z_2' \\ &= C_1 z_1' + C_2 z_2' \end{aligned}$$

et

$$y'' = C_1' z_1' + C_2' z_2' + C_1 z_1'' + C_2 z_2''.$$

1. On peut aussi la mettre sous une autre forme équivalente :

$$y(t) = e^{\alpha t} A \cos(\omega t + \phi), \quad (2.58)$$

où A et ϕ sont deux constantes.

2. nous définirons cette notion un peu plus tard.

On réinjectant ces expressions dans (2.51a), il vient

$$\begin{aligned} f &= a(C_1' z_1' + C_2' z_2') + C_1 (az_1'' + bz_1' + cz_1) + C_2 (az_2'' + bz_2' + cz_2) \\ &= a(C_1' z_1' + C_2' z_2'), \end{aligned}$$

puisque z_1 et z_2 sont solutions de l'équation homogène (2.52).

Ainsi, grâce à la condition (2.63), on a un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} C_1'(t)z_1(t) + C_2'(t)z_2(t) = 0, \\ C_1'(t)z_1'(t) + C_2'(t)z_2'(t) = \frac{f(t)}{a}, \end{cases}$$

que l'on écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix}$$

On admet que $z_1 z_2' - z_1' z_2 \neq 0$, ce qui traduit que les deux fonctions z_1 et z_2 sont indépendantes ; ainsi,

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{z_2 f}{a} \frac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2}, \\ C_2' = \frac{z_1 f}{a} \frac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2}. \end{cases} \quad (2.64)$$

Après intégration, on connaît donc y , modulo les conditions initiales, qui permettent de déterminer les conditions initiales.

2.3.3. Preuves théoriques

Voir [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>.

2.3.4. Exemples d'équations d'ordre 2

EXEMPLE 2.9. On étudie le flambement parfait d'Euler :

$$\forall x \in [0, L], \quad v''(x) + \omega_0^2 v(x) = 0, \quad (2.65)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F}{EI}}, \quad (2.66)$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \quad (2.67)$$

$$v(L) = 0. \quad (2.68)$$

Attention, ici les conditions aux limites sont différentes de (2.51b) et (2.51c). On montre que

$$v(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x),$$

et on calcule l'une des constantes A et B grâce à (2.67) et (2.68).

EXEMPLE 2.10. On étudie le flambement parfait d'Euler avec défaut initial $v_0(x) = a \sin(\pi x/L)$:

$$\forall x \in [0, L], \quad v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K \sin(\omega x), \quad (2.69)$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = 0, \quad (2.70)$$

$$v(L) = 0. \quad (2.71)$$

On suppose $\omega \neq \omega_0$. Voir en TD le cas où $\omega = \omega_0$.

EXEMPLE 2.11. On étudie

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}, \quad (2.72)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme

$$\widehat{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^{-2t}.$$

Après calculs, on a

$$\widehat{y}''(t) + 4\widehat{y}'(t) + 4\widehat{y}(t) = 2ae^{-2t}.$$

Il suffit donc de prendre $2a = 1$, ce qui est vrai pour $c = b = 0$ et $a = 1/2$. On a donc

$$y(t) = \underbrace{Ate^{-2t} + Be^{-2t}}_{\text{solution générale de l'EHA}} + \underbrace{\frac{t^2}{2}e^{-2t}}_{\text{solution particulière de (2.72)}}.$$

Les conditions initiales imposent $A = 0$ et $B = 0$, et donc

$$y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-2t}.$$

2.4. Lien avec MNB

Dans le cours de MNB, des méthodes seront proposées pour résoudre numériquement les équations différentielles vues dans ce chapitre.

2.5. Autre types d'équations différentielles

Il existe naturellement tout un ensemble d'équations différentielles (dites ordinaires), comme par exemple les équations différentielles d'ordre 1 résolues de la forme

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

où f est une fonction de $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} ou encore les systèmes différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, +\infty[, \quad Y'(t) &= F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, F est une fonction de $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n , Y_0 appartient à \mathbb{R}^n et Y est une fonction de $[t_0, +\infty[$ dans \mathbb{R}^n .

On renverra par exemple à [DB22, sections 5.1 et 5.6] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBmater/coursMNBmater.pdf>.

Deuxième partie

Notions d'Analyse numérique

Interpolation polynômiale

Ce chapitre est issu (et adapté) de [DB22, chapitre 2] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBmater/coursMNBmater.pdf>.

0

3.1. Motivation

| Latitude | $K = 0.67$ | $K = 1.5$ | $K = 2$ |
|----------|------------|-----------|---------|
| 65 | -3,106 | 3,520 | 6,058 |
| 55 | -3,228 | 3,621 | 6,055 |
| 45 | -3,309 | 3,652 | 5,922 |
| 35 | -3,327 | 3,522 | 5,707 |
| 25 | -3,172 | 3,476 | 5,308 |
| 15 | -3,074 | 3,253 | 5,020 |
| 5 | -3,029 | 3,152 | 4,957 |
| -5 | -3,029 | 3,150 | 4,974 |
| -15 | -3,124 | 3,207 | 5,078 |
| -25 | -3,209 | 3,274 | 5,355 |
| -35 | -3,350 | 3,529 | 5,627 |
| -45 | -3,373 | 3,705 | 5,954 |
| -55 | -3,258 | 3,704 | 6,103 |

TABLE 3.1. Température de l'air à proximité du sol en fonction de la latitude pour différentes valeurs de concentration K .

Il est connu que la température de l'air à proximité du sol varie selon la concentration de l'acide carbonique. Le tableau 3.1 (extrait de "Philosophical Magazine" 41,237) montre les variations annuelles de la température moyenne pour différentes latitudes en fonction de la concentration (relative) K de l'acide carbonique dans l'atmosphère.

On cherche une estimation de la variation de la température à la latitude 42,961 111 de Centuri (Haute-Corse) pour une concentration K de l'acide carbonique dans l'atmosphère égale à $K = 0.67$. Les techniques d'interpolation permettent de reconstruire, à partir des données disponibles, les valeurs de température pour des latitudes ou des concentrations non contenues dans le tableau.

Sur la figure 3.1 page suivante, ont été tracées les différentes courbes déterminées grâce aux techniques de ce chapitre, ainsi que plusieurs estimations de la variation de la température à la latitude 42,961 111 qui se tiennent toutes dans un mouchoir de poche. On obtient en effet

- $\tau = -3.333$, en utilisant un polynôme de degré 12 (voir section 3.2);

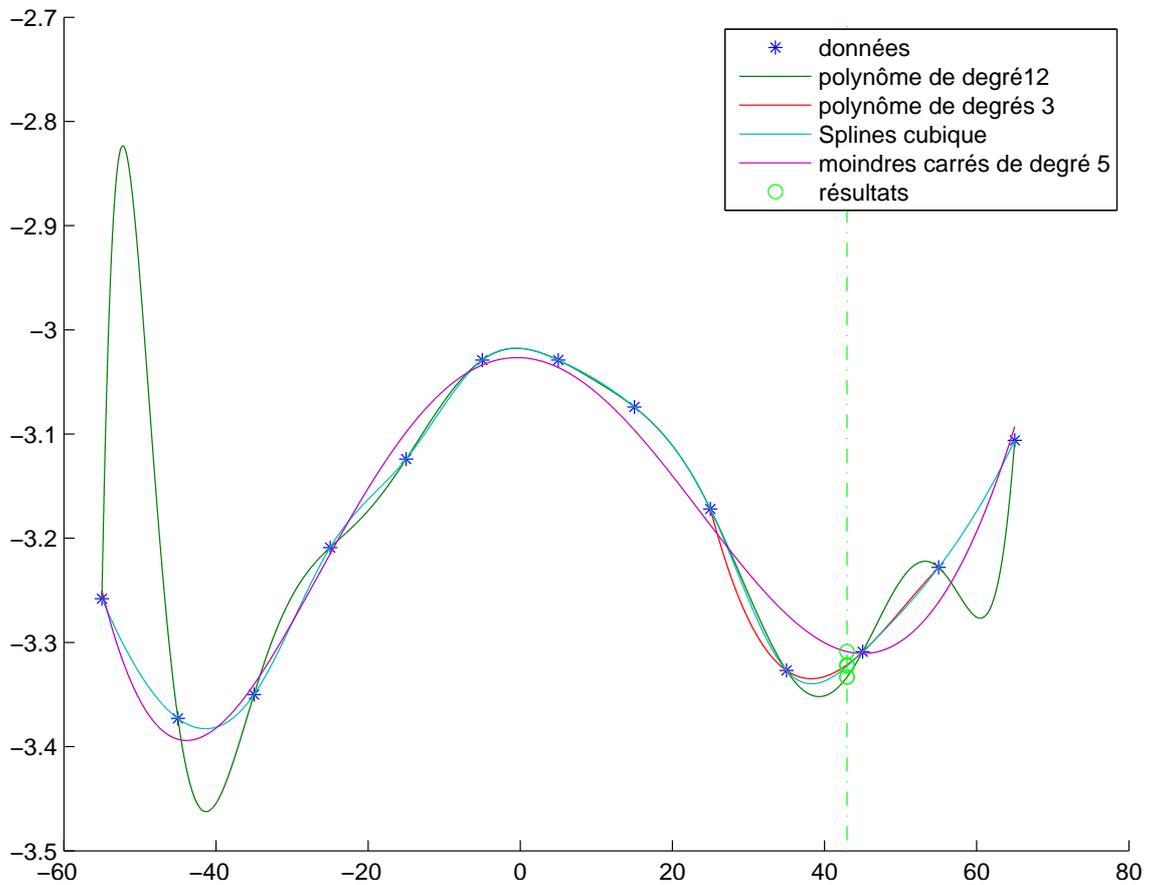


FIGURE 3.1. Les données et les différentes courbes déterminées grâce aux techniques de ce chapitre (pour une concentration K de l'acide carbonique dans l'atmosphère égale à $K = 0.67$).

- $\tau = -3.321$, en utilisant un polynôme de degré 3 (voir section 3.2) ;
- $\tau = -3.323$, en utilisant une spline cubique (notion non vue dans ce cours ; voir [DB22, section 2.6.1]) ;
- $\tau = -3.309$, en utilisant une approximation au sens des moindres carrés (voir section 3.5).

3.2. Interpolation polynômiale

3.2.1. Exemple et position du problème

EXEMPLE 3.1. Pour tout ce chapitre, on considérera les données suivantes : on connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ et $x_3 = -1$:

$$f(x_0) = -2, \quad f(x_1) = 3, \quad f(x_2) = 1, \quad f(x_3) = 5. \quad (3.1)$$

On posera

$$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad y_i = f(x_i). \quad (3.2)$$

De façon plus générale, on se donne $n \geq 0$ un nombre entier. Étant donnés $n + 1$ points, deux à deux distincts, x_0, x_1, \dots, x_n :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \quad i \neq j \implies x_i \neq x_j, \quad (3.3)$$

et $n + 1$ valeurs quelconques y_0, y_1, \dots, y_n , on cherche un polynôme p de degré au plus n , tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad p(x_i) = y_i. \quad (3.4)$$

On note $p = \Pi_n$, le polynôme d'interpolation aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ qui vérifie donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \Pi_n(x_i) = y_i. \quad (3.5)$$

Les points (x_i, y_i) sont dits points d'interpolation. Les points x_i sont aussi appelés les nœuds du support $\{x_0, \dots, x_n\}$. Si, comme dans l'exemple 3.1, les y_i correspondent aux valeurs d'une la fonction f , on dira que le polynôme Π_n interpole f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$. Dans ce cas, on notera parfois le polynôme sous la forme $\Pi_n(f)$.

EXEMPLE 3.2. Pour $n = 1$, l'interpolation polynômiale est un problème déjà bien connu :

On cherche à déterminer l'équation de la droite passant par les points distincts A et B , de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .

- Si $x_A = x_B$, la droite est "verticale" d'équation

$$x = x_A. \quad (3.6)$$

- Si $x_A \neq x_B$, on est exactement dans le cadre ci-dessus en posant

$$x_0 = x_A \text{ et } x_1 = x_B, \quad (3.7a)$$

$$y_0 = y_A \text{ et } y_1 = y_B. \quad (3.7b)$$

La droite est d'équation $Y = \alpha X + \beta$ et les égalités traduisant que la droite passe par A et B sont

$$\alpha x_A + \beta = y_A, \quad (3.8a)$$

$$\alpha x_B + \beta = y_B, \quad (3.8b)$$

système linéaire qui se résoud aisément et fournit, par différence des deux équations,

$$\alpha(x_A - x_B) = y_A - y_B,$$

et donc

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

et si on réutilise l'équation (3.8a) on obtient

$$\beta = y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

L'équation de la droite est donc

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (3.9)$$

soit

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A, \quad (3.10)$$

que l'on pourra écrire sous la forme suivante :

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (3.11)$$

qui traduit que le taux d'accroissement entre x et x_A est égal au d'accroissement entre x_B et x_A . Nous reviendrons sur cet exemple dans l'exemple 3.22 page 46.

◇

3.2.2. Construction de Π_n

3.2.2.1. Calcul direct (Matrice de Vandermonde).

Bien que la plus directe, cette technique est rarement utilisée en pratique à cause des instabilités numériques.

Donnons néanmoins le principe de ce calcul. Cherchons le polynôme Π_n sous la forme (canonique)

$$\Pi_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k. \quad (3.12)$$

Si on écrit chacune des équations (3.5), on a donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \dots + \alpha_n x_i^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k x_i^k = y_i, \quad (3.13)$$

ce qui est équivalent au système linéaire

$$AX = B, \quad (3.14)$$

où la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall i, j, \in \{1, \dots, n+1\}, \quad A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}, \quad (3.15)$$

soit encore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & \dots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

et les vecteurs X et B sont les vecteurs colonnes de \mathbb{R}^{n+1} donnés par

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

La matrice A correspond à la matrice de Vandermonde, associée aux nœuds x_0, \dots, x_n .

On peut remarquer que ce calcul est une généralisation de l'exemple 3.2 page précédente.

On sait qu'elle est inversible. Voir par exemple [BM03, Exercice 2.5 p. 55]. On peut en calculer à la main son inverse, en utilisant la théorie de l'interpolation ! L'inversibilité de cette matrice sera aussi une conséquence de la section 3.2.2.2. \diamond

On a donc l'expression théorique de X d'après (3.14) :

$$X = A^{-1}B. \quad (3.18)$$

EXEMPLE 3.3. Si on traite de cette façon l'exemple 3.1, on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.19a)$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (3.19b)$$

$$X = \begin{pmatrix} -9/5 \\ -\frac{44}{15} \\ \frac{33}{10} \\ -\frac{17}{30} \end{pmatrix}, \quad (3.19c)$$

et donc

$$\Pi_3(x) = -\frac{17}{30}x^3 + \frac{33}{10}x^2 - \frac{44}{15}x - 9/5. \quad (3.19d)$$

Si on évalue ce polynôme aux points du support x_0, \dots, x_n , on obtient bien les y_i :

$$(-2 \quad 3 \quad 1 \quad 5). \quad (3.19e)$$

3.2.2.2. Base de Lagrange.

Nous avons le lemme suivant :

LEMME 3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme l_i de degré n tel que

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad l_i(x_j) = 0, \quad (3.20a)$$

$$l_i(x_i) = 1, \quad (3.20b)$$

soit encore

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.21)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker¹. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, l_i est donné par

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.23)$$

Les polynômes $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont appelés les polynômes de Lagrange, relatifs aux support $\{x_0, \dots, x_n\}$.

DÉMONSTRATION. On montre à la fois l'unicité et l'existence. On cherche Q un polynôme nul en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ et égal à 1 en x_i , de degré n . Voir figure 3.2. C'est donc équivalent à :

- Il admet pour racines les n nombres x_j , pour $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$ et donc il existe un réel c tel que

$$Q = c(X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{i-1})(X - x_{i+1}) \dots (X - x_n) = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - x_j). \quad (3.24)$$

1. défini par

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.22)$$

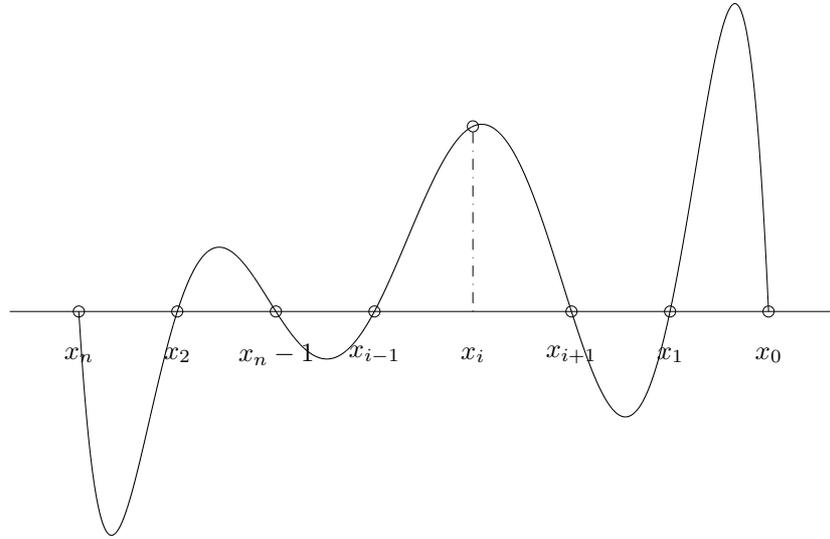


FIGURE 3.2. Le polynômes l_i , nul en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ et égal à 1 en x_i .

- De plus $l_i(x_i) = 1$ si et seulement si

$$c(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1 ;$$

d'après (3.3), les nombres x_i sont deux à deux distincts et le terme de gauche de cette égalité est non nul et on a donc

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)},$$

et, d'après, (3.24), il vient

$$Q = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

□

EXEMPLE 3.5. On vérifie que² pour $n = 0$:

$$l_0(x) = 1, \tag{3.25a}$$

puis, pour $n = 1$:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \tag{3.25b}$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \tag{3.25c}$$

2. En prenant pour convention qu'un produit vide vaut 1.

puis, pour $n = 2$:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad (3.25d)$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad (3.25e)$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (3.25f)$$

PROPOSITION 3.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique polynôme Π_n de degré au plus n tel que

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad \Pi_n(x_j) = y_j. \quad (3.26)$$

Il est donné par

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x). \quad (3.27)$$

Notons que le degré de Π_n est au plus n . Il peut être plus petit !

DÉMONSTRATION.

- (1) Démontrons d'abord l'unicité d'un tel polynôme. Supposons qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 deux degrés au plus n qui vérifient

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad P_1(x_i) = P_2(x_i) = y_i.$$

Ainsi, $P_1 - P_2$ est un polynôme de degré au plus n qui vérifie

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (P_1 - P_2)(x_i) = 0. \quad (3.28)$$

Remarquons que, d'après (3.3), on a

$$\text{Si } Q \text{ est un polynôme de degrés au plus } n, \text{ alors : } (\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad Q(x_i) = 0) \implies Q = 0. \quad (3.29)$$

En effet, dans ce cas, Q est de degré au plus n et possède au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes ; il ne peut être que nul. Ainsi, d'après (3.28) et (3.29) appliqué à $Q = P_1 - P_2$, on a $Q = 0$ et donc $P_1 = P_2$.

- (2) Enfin, si on choisit Π_n , défini par (3.27), alors d'après (3.21), pour tout j , on a

$$\sum_{i=0}^n y_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ij} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} y_i \delta_{ij} + y_j \delta_{jj} = 0 + y_j = y_j. \quad (3.30)$$

Cela assure l'existence du polynôme Π_n , défini par (3.27).

□

DÉMONSTRATIONS ALTERNATIVES.

Voir la démonstration [DB22, page 17].♠

□

◇

REMARQUE 3.7. Il faut et il suffit qu'ait lieu l'égalité (3.26) pour que Π_n soit le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$. On dit que l'égalité (3.26) est une caractérisation de Π_n .

EXEMPLE 3.8. Reprenons les données de l'exemple 3.1 page 30. Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 3) est donné par la formule (3.23). On a donc successivement

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-4)(x-2)(x+1)}{(1-4)(1-2)(1+1)}, \\ l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(4-1)(4-2)(4+1)}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x+1)}{(2-1)(2-4)(2+1)}, \\ l_3(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-2)}{(-1-1)(-1-4)(-1-2)}. \end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/6 x^3 - 5/6 x^2 + 1/3 x + 4/3, \quad (3.31a)$$

$$l_1(x) = 1/30 x^3 - 1/15 x^2 - 1/30 x + 1/15, \quad (3.31b)$$

$$l_2(x) = -1/6 x^3 + 2/3 x^2 + 1/6 x - 2/3, \quad (3.31c)$$

$$l_3(x) = -1/30 x^3 + \frac{7}{30} x^2 - \frac{7}{15} x + \frac{4}{15}. \quad (3.31d)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 3, Π_3 , est donné par la formule (3.27). Ici, on a donc :

$$\Pi_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(x) = -\frac{17}{30} x^3 + \frac{33}{10} x^2 - \frac{44}{15} x - 9/5. \quad (3.32)$$

On retrouve bien (3.19d).

EXEMPLE 3.9. On reprend les données de l'exemple 3.1.

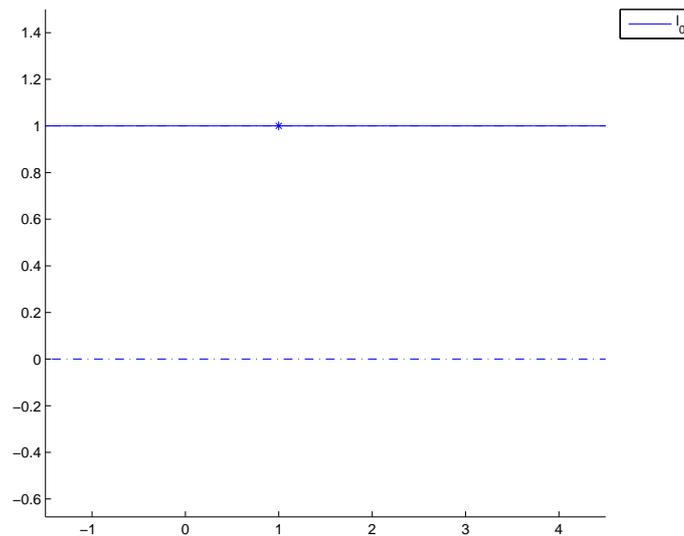
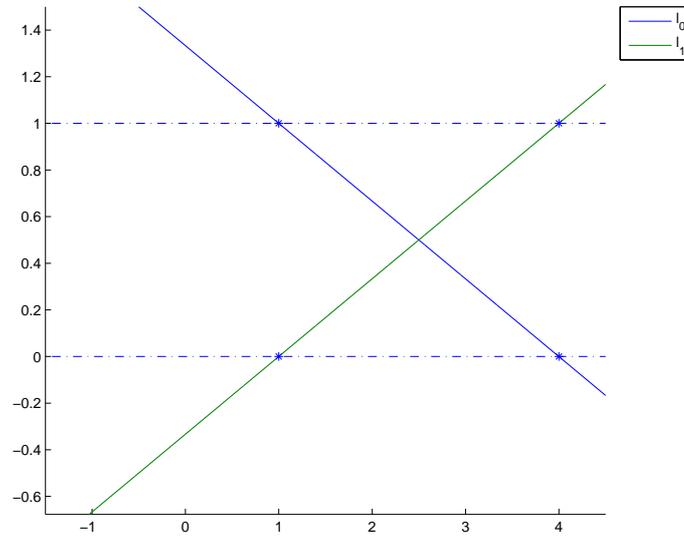
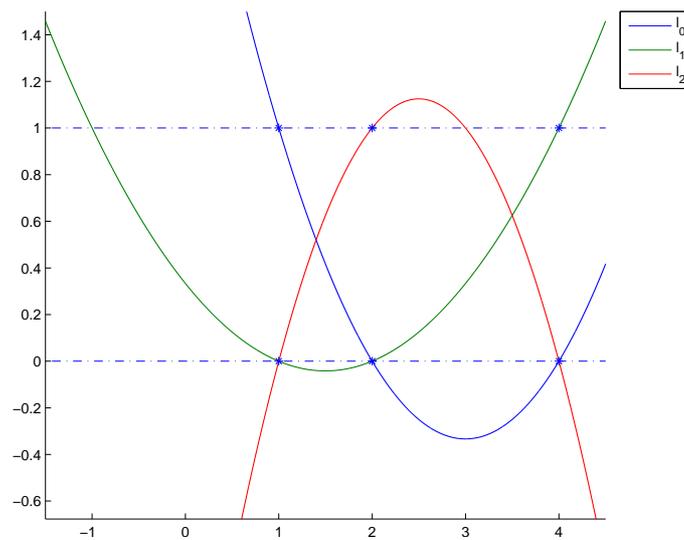


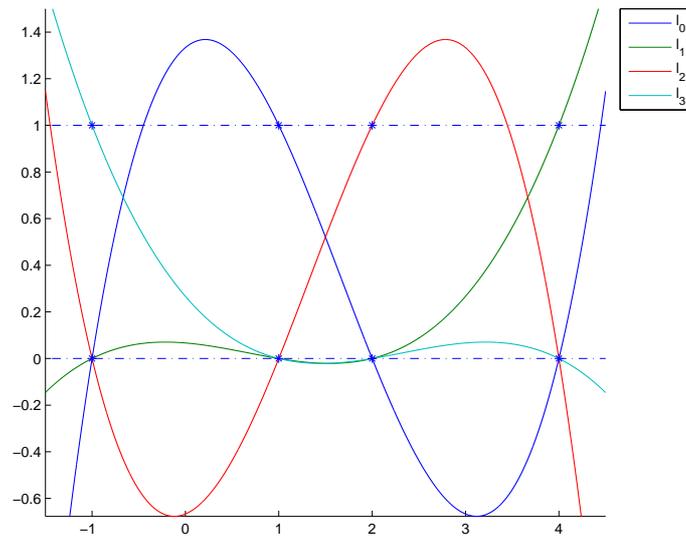
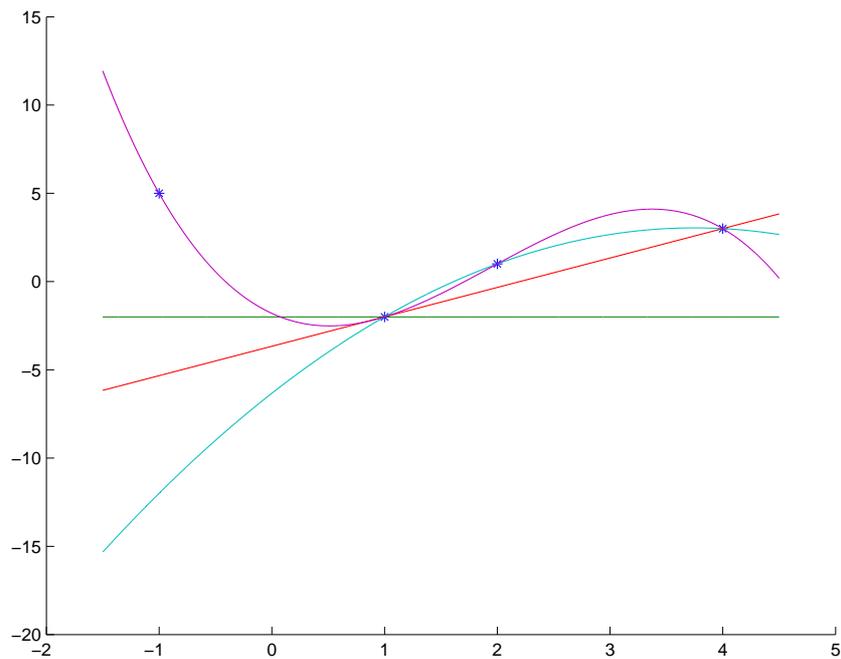
FIGURE 3.3. Le polynôme de Lagrange l_0

Sur les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6, ont été tracés : le polynôme l_0 , interpolant la fonction f sur le support $\{x_0\}$, puis les polynômes l_0 et l_1 , interpolant la fonction f sur le support $\{x_0, x_1\}$, puis les polynômes l_0 , l_1 et

FIGURE 3.4. Les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 FIGURE 3.5. Les polynômes de Lagrange l_0 , l_1 et l_2

l_2 , interpolant la fonction f sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$, puis les polynômes l_0, l_1, l_2 et l_3 , interpolant la fonction f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

Voir aussi la figure 3.7.

FIGURE 3.6. Les polynômes de Lagrange l_0 , l_1 , l_2 et l_3 FIGURE 3.7. Les polynômes d'interpolation de f sur $\{x_0\}$, $\{x_0, x_1\}$, $\{x_0, x_1, x_2\}$ et $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

3.2.2.3. Forme de Newton et différences divisées.

C'est la forme la plus appropriée à l'interpolation. On trouve aussi la terminologie "polynôme de Newton". Par convention, on pose³

$$\prod_{j=0}^{-1} (x - x_j) = 1. \quad (3.33)$$

Nous allons chercher Π_n sous la forme

$$\Pi_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \quad (3.34a)$$

où les $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont des réels à déterminer. En utilisant la convention (3.33), on écrit (3.34a) sous la forme

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \quad (3.34b)$$

REMARQUE 3.10. Dans l'espace vectoriel P_n des polynômes de degré au plus n , nous avons précédemment déterminé Π_n sur la base canonique $1, x, x^2, \dots, x^n$ (section 3.2.2.1) ou sur la famille des l_i qui en forme aussi une base (section 3.2.2.2). Ici, nous utilisons la famille $1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$ qui est aussi une base de P_n .

◇

EXEMPLE 3.11. Pour $n = 0$, on a, grâce à (3.5) pour $i = 0$:

$$a_0 = f(x_0).$$

EXEMPLE 3.12. Pour $n = 1$, on a, grâce à (3.5) pour $i = 0$:

$$a_0 = f(x_0),$$

puis pour $i = 1$,

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1),$$

d'où

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

DÉFINITION 3.13. Les quantités $(f[x_i])_{0 \leq i \leq n}$ définies par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad f[x_i] = f(x_i), \quad (3.35)$$

sont appelées les différences divisées d'ordre 0. Les quantités $(f[x_i, x_{i+1}])_{0 \leq i \leq n-1}$ définies par

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.36)$$

sont appelées les différences divisées d'ordre 1. Les quantités $(f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}])_{0 \leq i \leq n-2}$ définies par

$$\forall i \in \{0, \dots, n-2\}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad (3.37)$$

sont appelées les différences divisées d'ordre 2. De manière plus générale, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, les quantités $(f[x_i, \dots, x_{i+k}])_{0 \leq i \leq n-k}$ définies par récurrence sur k (tandis que les différences divisées d'ordre 0 sont définies par (3.35)) par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-k\}, \quad f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (3.38)$$

sont appelées les différences divisées d'ordre k . Ainsi, l'unique différence divisée d'ordre n est définie par

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (3.39)$$

³. Voir note de bas de page numéro 2.

On peut alors montrer, avec les notations (3.34b), que

PROPOSITION 3.14. *On a*

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i], \quad (3.40)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.41a)$$

soit encore, avec la convention (3.33)

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \quad (3.41b)$$

DÉMONSTRATION. Voir [BM03, Définition 2.28 et Théorème 2.34], où l'on montre en particulier que $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ est le coefficient dominant du polynôme interpolateur de f sur le support $\{x_i, \dots, x_{i+k}\}$. \square

◇

PROPOSITION 3.15 (Calcul complet des différences divisées). *Les égalités (3.35) permettent d'initialiser le calcul des différentes différences divisées. Les égalités (3.38) permettent de calculer successivement les différentes différences divisées.*

EXEMPLE 3.16. Pour $n = 0$, on a, grâce à (3.35) et (3.41a) :

$$f[x_0] = f(x_0), \quad (3.42a)$$

$$\Pi_0(x) = f(x_0). \quad (3.42b)$$

EXEMPLE 3.17. Pour $n = 1$, on a, grâce à (3.35), (3.41a) et (3.38) pour $k = 1$:

$$f[x_0] = f(x_0), \quad (3.43a)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad (3.43b)$$

$$\Pi_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (3.43c)$$

On retrouve les résultats obtenus dans l'exemple 3.2 page 31 (dans le cas où $x_A \neq x_B$).

REMARQUE 3.18.

- (1) Le coefficient dominant de Π_n est égal à la différence divisé $f[x_0, \dots, x_n]$.
- (2) La différence divisées $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est invariante par permutation des éléments, c'est-à-dire : pour toute permutation σ de $\{0, \dots, n\}$, on a

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad (3.44)$$

Il n'est pas nécessaire de faire de savants calculs. Il suffit d'utiliser la caractérisation (3.26) (voir la remarque 3.7 page 35) de Π_n . On a donc l'égalité (3.26) dont on déduit de façon immédiate que pour toute permutation σ de $\{0, \dots, n\}$

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad \Pi_n(x_{\sigma(j)}) = y_{\sigma(j)}. \quad (3.45)$$

D'après le point 1 et (3.44), $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ est le coefficient dominant de Π_n qui est aussi $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et ces deux différences divisées sont donc égales. Cette propriété est en cas particulier de la théorie de l'interpolation d'Hermite.

◇

- (3) Ainsi, si $f[x_0, \dots, x_n] = 0$, alors Π_n est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

3.2.2.4. Calcul pratique des différences divisées et du polynôme interpolateur.

DÉFINITION 3.19 (Tableau des différences divisées).

On définit le tableau des différences divisées de la façon suivante :

- La première colonne contient les $n + 1$ valeurs $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, classées dans l'ordre des indices (qui n'est pas nécessairement l'ordre des valeurs).
- La deuxième colonne contient les $n + 1$ différences divisées d'ordre 0, c'est-à-dire $(f[x_i])_{0 \leq i \leq n}$, chacune d'elles étant égale à $f(x_i)$ d'après (3.35).
- La troisième colonne contient les n différences divisées d'ordre 1, c'est-à-dire $(f[x_i, x_{i+1}])_{0 \leq i \leq n-1}$, données par (3.36).
- La quatrième colonne contient les $n-1$ différences divisées d'ordre 2, c'est-à-dire $(f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}])_{0 \leq i \leq n-2}$, données par (3.37)
- De façon générale, la $k + 2$ -ième colonne pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ contient les $n - k + 1$ différences divisées d'ordre k , c'est-à-dire $(f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}])_{0 \leq i \leq n-k}$ données par (3.38).
- L'avant-dernière colonne contient les 2 différences divisées d'ordre $n-1$, c'est-à-dire, $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ et $f[x_1, x_2, \dots, x_n]$ définie par (3.38) pour $k = n - 1$ et $i \in \{0, 1\}$, c'est-à-dire

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_0},$$

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_2, \dots, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_1}.$$

- La dernière colonne contient l'unique différence divisée d'ordre n , c'est-à-dire, $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$ définie (3.38) pour $k = n$ et $i = 0$, c'est-à-dire

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Voir les tableaux 3.2 page suivante et 3.3 page 43. La double flèche $\begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix}$ signifie que chaque différence divisée $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et pour $i \in \{0, \dots, n - k\}$ est déterminée de la façon suivante

$$\begin{matrix} A \searrow \\ B \nearrow \end{matrix} \frac{B - A}{x_{i+k} - x_i} = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}].$$

Enfin, on se sert de ce tableau et uniquement des différences divisées encadrées dans les tableaux 3.2 et 3.3 pour calculer Π_n donné par (3.41)

| x_i | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|-----------|---------------------------|---|--|---|
| x_0 | $f[x_0] = f(x_0)$ | $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$ | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$ |
| x_1 | $f[x_1] = f(x_1)$ | $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$ | $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$ | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$ |
| x_2 | $f[x_2] = f(x_2)$ | $f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$ | $f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$ | \vdots |
| x_3 | $f[x_3] = f(x_3)$ | $f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$ | \vdots | \vdots |
| x_4 | $f[x_4] = f(x_4)$ | \vdots | \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_{n-1} | $f[x_{n-1}] = f(x_{n-1})$ | $f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$ | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$ | |
| x_n | $f[x_n] = f(x_n)$ | | | |

TABLE 3.2. Construction des différences divisées (premières colonnes).

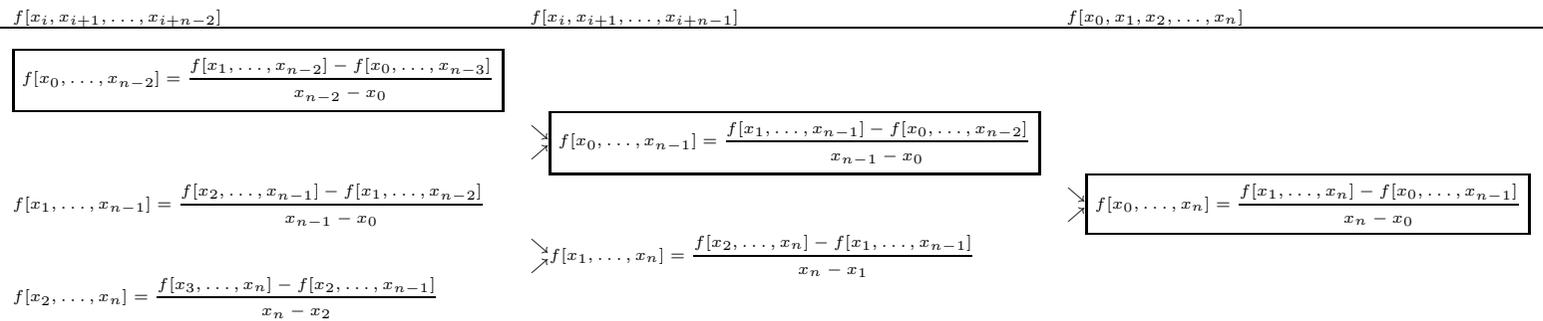


TABLE 3.3. Construction des différences divisées (dernières colonnes).

Nous avons aussi la relation de récurrence fondamentale qui découle tout simplement de l'écriture de Π_n :

LEMME 3.20. *Si, pour $n \geq 1$, Π_{n-1} est le polynôme interpolateur de f sur le support $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ alors, Π_n , le polynôme interpolateur de f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$ vérifie*

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (3.46)$$

DÉMONSTRATION. Faire en exercice. □

REMARQUE 3.21. Grâce au lemme 3.20, si le tableau des différences divisées sur le support d'interpolation $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ est connu, on en déduit facilement le tableau des différences divisées sur le support d'interpolation $\{x_0, \dots, x_n\}$. Il suffit de rajouter les points x_n et la donnée $f(x_n)$ en bas de tableau et d'en déduire progressivement les nouvelles différences divisées comme le montre le tableau 3.4 page suivante. Si le polynôme Π_{n-1} est connu, on déduit alors Π_n en utilisant la nouvelle différence divisée calculée $f[x_0, \dots, x_n]$ et (3.46).

| $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---------------------------|---|--|---|
| $f[x_0] = f(x_0)$ | $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$ | | |
| $f[x_1] = f(x_1)$ | | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$ |
| $f[x_2] = f(x_2)$ | $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$ | $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$ | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$ |
| $f[x_3] = f(x_3)$ | $f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$ | $f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$ | |
| $f[x_4] = f(x_4)$ | $f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$ | \vdots | |
| \vdots | \vdots | | |
| $f[x_{n-2}] = f(x_{n-2})$ | $f[x_{n-2}, x_{n-1}] = \frac{f[x_{n-1}] - f[x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_{n-2}}$ | $f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] = \frac{f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_{n-3}}$ | $f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{\dots}{x_n - x_{n-3}}$ |
| $f[x_{n-1}] = f(x_{n-1})$ | | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$ | |
| $f[x_n] = f(x_n)$ | $f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$ | | |

TABLE 3.4. Construction des différences divisées : rajout d'un point (calculs en gras) x_n en

3.2.2.5. Bilan sur le choix de la méthode.

La méthode de Newton, sauf indication, sera toujours à privilégier, cela pour deux raisons :

- (1) Sur le plan algorithmique d'abord ; la méthode de Lagrange force à tout recalculer les polynômes l_0, \dots, l_n à chaque rajout de nouveau point. Au contraire, la méthode de Newton, à l'ajout d'un point, permet de calculer le nouveau polynôme en se servant du précédent, grâce au lemme 3.20. C'est d'ailleurs pour cela qu'a été inventée la notion de différences divisées, qui se calculent aisément de façon récurrente grâce à la proposition 3.15. Voir la définition 3.19, la remarque 3.21 et l'exercice de TD 3.1.
- (2) Sur le plan numérique ensuite ; grâce à l'algorithme d'évaluation d'Horner (voir [BM03, Algorithme 2.1 p. 38]), la forme de Newton (3.41) permet de calculer de façon plus correcte Π_n qu'en utilisant les polynômes de Lagrange l_i , notamment quand n grandit. Voir le corrigé de l'exercice de TD 3.2.

EXEMPLE 3.22. Reprenons l'exemple 3.2 page 31, dans le cas où $x_A \neq x_B$, avec les différentes méthodes vues dans ce chapitre. On renvoie à l'annexe C.

◇

EXEMPLE 3.23. Reprenons les données de l'exemple 3.1 page 30. Pour calculer le polynôme sous la forme

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------------|----|------|------|--------|
| $x_0 = 1$ | -2 | | | |
| | | 5/3 | | |
| $x_1 = 4$ | 3 | | -2/3 | |
| | | 1 | | -17/30 |
| $x_2 = 2$ | 1 | | 7/15 | |
| | | -4/3 | | |
| $x_3 = -1$ | 5 | | | |

TABLE 3.5. Différences divisées de f .

de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 3.5. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 3, Π_3 , est donné par la formule (3.41). Ici, on a donc :

$$\Pi_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 5x + 4, \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) &= x^3 - 7x^2 + 14x - 8. \end{aligned}$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(x) = -\frac{17}{30}x^3 + \frac{33}{10}x^2 - \frac{44}{15}x - 9/5. \tag{3.47}$$

On retrouve bien (3.19d).

EXEMPLE 3.24. Voir de nouveau l'exemple de la section 3.1.

3.2.3. Erreur en interpolation polynômiale

On rappelle que, d'après (3.2), on dit que Π_n (noté parfois en cas d'ambiguïté $\Pi_n(f)$) interpole f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$ si :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \Pi_n(x_i) = f(x_i). \quad (3.48)$$

THÉORÈME 3.25 (Erreur d'interpolation pour des nœuds quelconques). *Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $n + 1$ nœuds distincts dans $[a, b]$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Alors*

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists \xi \in]a, b[, \quad f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (3.49)$$

où ω_{n+1} est défini par

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (3.50)$$

DÉMONSTRATION. On montre tout d'abord que pour tout réel x de $[a, b]$ on peut écrire :

$$f(x) - \Pi_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \left[\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right]. \quad (3.51)$$

Dans cette proposition, $f[x_0, \dots, x_n, x]$ devra avoir un sens, que les points soient distincts ou non : voir [BM03, exercice 2.8 et TP 2.F]. On considère deux cas.

- Si $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, alors $\{x_0, \dots, x_n, x\}$ constitue un ensemble de $n + 2$ points distincts de I . Notons Π_{n+1} le polynôme d'interpolation de f sur $\{x_0, \dots, x_n, x\}$. Par suite $\Pi_{n+1}(x) = f(x)$; donc $\Pi_{n+1}(t) - \Pi_n(t)$ désigne le terme qu'il faut ajouter à $\Pi_n(x)$ pour obtenir $\Pi_{n+1}(x)$, c'est-à-dire l'expression (3.51).
- Si $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ alors $f(x) - \Pi_n(x) = 0$. Comme le produit qui apparaît dans l'expression (3.51) est nul, celle-ci reste valide en admettant que $f[x_0, \dots, x_n, x]$ a un sens.

On montre ensuite qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce calcul est assez technique et repose sur une utilisation itérée du théorème de Rolle. Voir par exemple [CB81]. □

◇

Si on peut trouver une borne supérieure pour $f^{(n+1)}(\xi)$, soit $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$, on peut alors majorer l'erreur sous la forme suivante :

THÉORÈME 3.26 (Erreur d'interpolation pour des nœuds quelconques). *Sous les hypothèses du théorème 3.25, on note*

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (3.52)$$

Alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (3.53)$$

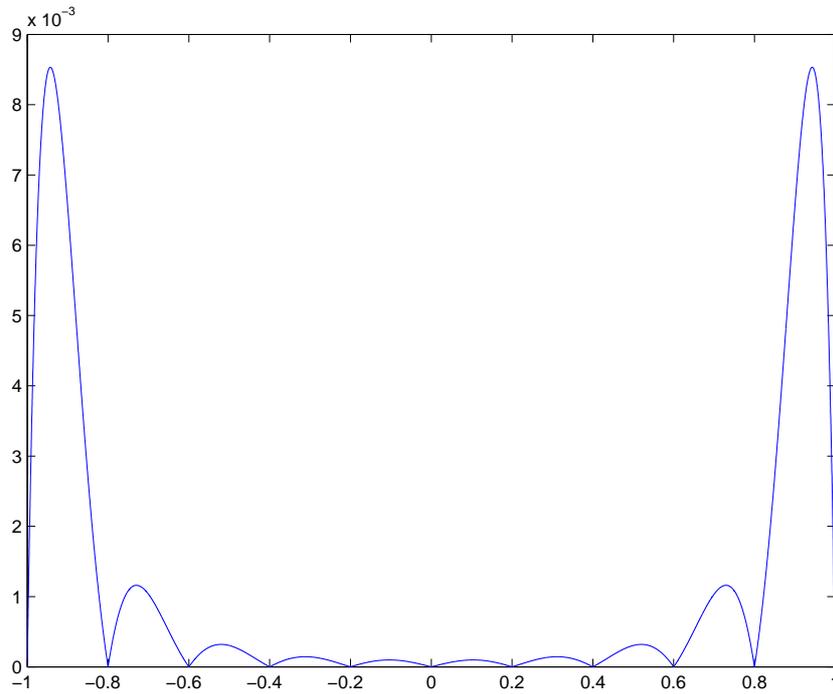
DÉFINITION 3.27 (Nœuds équirépartis). Pour $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n + 1$ nœuds équirépartis $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ définissent n sous-intervalles de $[a, b]$ de la même taille et sont définis par

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad (3.54a)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + ih. \quad (3.54b)$$

THÉORÈME 3.28 (Erreur d'interpolation pour des nœuds équirépartis). *Pour des nœuds équirépartis, c'est-à-dire donnés par la définition 3.27, on a, sous les hypothèses du théorème 3.25,*

$$E_n(f) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (3.55)$$

FIGURE 3.8. Fonction $|\omega_{11}|$ pour 11 nœuds équirépartis dans $[-1, 1]$.

DÉMONSTRATION. On peut montrer que le maximum de $|\omega_{n+1}(x)|$ est atteint toujours dans un des deux intervalles extrêmes $[x_0, x_1]$ ou $[x_{n-1}, x_n]$ (voir figure 3.8). On prend $x \in [x_0, x_1]$ (l'autre cas est similaire), et on a

$$|(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{4}.$$

On peut aussi montrer que le maximum de $|(x - x_0)(x - x_1)|$ est atteint en $\frac{x_0 + x_1}{2}$ et vaut $\frac{(x_1 - x_0)^2}{4}$. On a donc

$$|(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{4} = \frac{h^2}{4},$$

où on a noté le pas $h = (b - a)/n$. De plus, pour tout $i > 1$,

$$|(x - x_i)| \leq ih.$$

Donc,

$$\max_{x \in I} \prod_{i=0}^n |(x - x_i)| \leq \frac{h^2}{4} (2h) \times (3h) \times \cdots \times (nh) = \frac{h^{n+1} n!}{4}.$$

□

◇

REMARQUE 3.29. Attention, l'erreur $E_n(f)$ ne tend pas nécessairement vers zéro quand n tend vers l'infini.

EXEMPLE 3.30. Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (3.56)$$

Si on interpole avec des points équirépartis sur un intervalle $[-a, a]$, l'erreur peut tendre en théorie vers zéro ou pas quand n tend vers l'infini, selon la valeur de a . Si $2a < e$, il y a convergence vers zéro, en particulier pour $a = 1/4e$, comme l'indique la figure 9(a). Si $2a \geq e$, on peut montrer que l'erreur tend vers l'infini, en

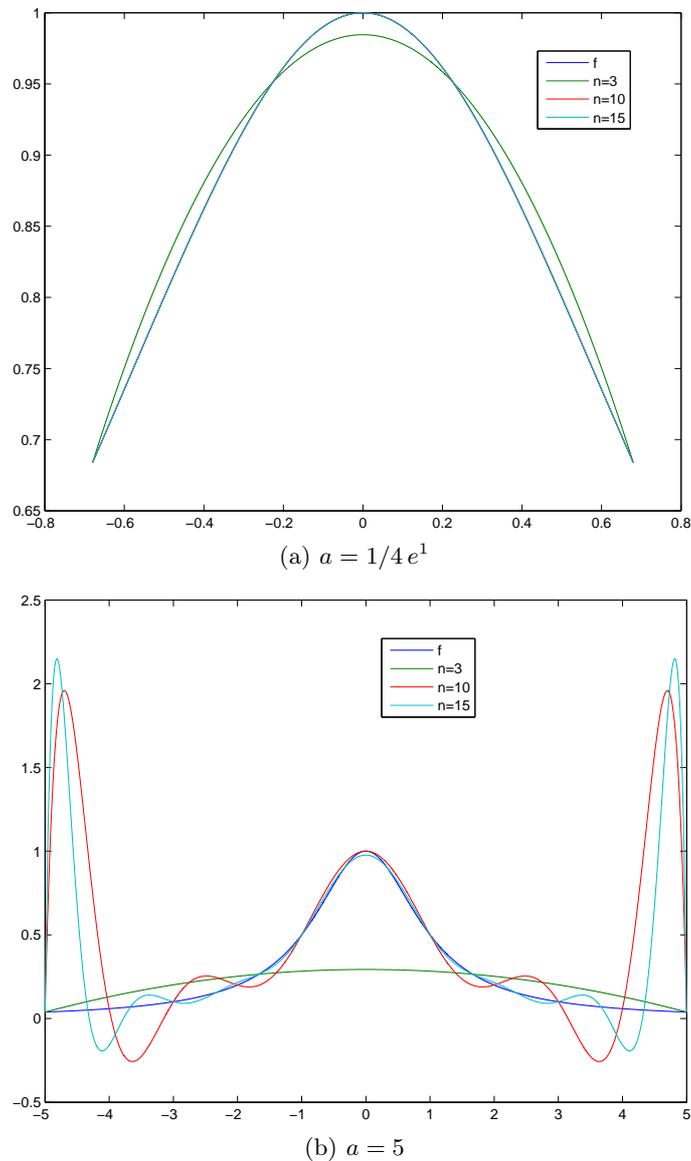


FIGURE 3.9. Interpolation de la fonction de Runge. Dans le cas de la figure 9(a), la convergence a lieu quand n tend vers l'infini. Au contraire, les polynômes d'interpolation présentent des oscillations qui augmentent avec le degré du polynôme pour la figure 9(b).

particulier pour $a = 5$, comme l'indique la figure 3.9, où l'interpolant présente des oscillations. Voir [CM84, p. 10].

REMARQUE 3.31. Attention aussi au mauvais comportement numérique des évaluations polynômiales ; voir le corrigé de l'exercice de TD 3.2.

Afin de palier le problème de l'absence de convergence ou les instabilités numériques quand le degré grandit, une méthode alternative est proposée : l'interpolation par intervalles ou par morceaux (dite aussi interpolation composée ou composite, voir section 3.4).

3.3. Un exercice type à savoir traiter parfaitement (Interpolation de Lagrange)

Énoncé

On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$:

$$g(x_0) = 0, \quad g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 4.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 1$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Corrigé

- (1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.
 - (a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.57)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x - 3)(x - 5)}{(-1 - 3)(-1 - 5)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x + 1)(x - 5)}{(3 + 1)(3 - 5)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(5 + 1)(5 - 3)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/24 x^2 - 1/3 x + 5/8, \quad (3.58a)$$

$$l_1(x) = -1/8 x^2 + 1/2 x + 5/8, \quad (3.58b)$$

$$l_2(x) = 1/12 x^2 - 1/6 x - 1/4. \quad (3.58c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^n g(x_i) l_i(x). \quad (3.59)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = \frac{5}{24} x^2 - 1/6 x - 3/8. \quad (3.60)$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 3.6. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^n g[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (3.61)$$

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|-------------------|---|-------|----------------|
| $x_0 = -1$ | 0 | | |
| | | $1/4$ | |
| $x_1 = 3$ | 1 | | $\frac{5}{24}$ |
| | | $3/2$ | |
| $x_2 = 5$ | 4 | | |

TABLE 3.6. Différences divisées de g .

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x + 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (3.60)).

(2) Pour $\alpha = 1$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = -1/3 \approx -0.333333,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Voir [DB22, la section 2.4 page 34].♠

3.4. Interpolation par intervalles ou par morceaux (dite aussi interpolation composée ou composite)

Pour éviter d’avoir un degré trop élevé et néanmoins permettre une approximation correcte d’une fonction, on découpe l’intervalle en un grand nombre de sous-intervalle et on interpole sur chacun d’eux avec un degré fixé. La précision de l’interpolation proviendra du grand nombre de sous intervalles.

THÉORÈME 3.32 (Erreur d’interpolation composite). *Soient $x_0 = A < x_1 < \dots < x_N = B$ des points qui divisent $I = [A, B]$. On note $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ les sous-intervalles de longueur h_j et $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$. Sur chaque sous-intervalle I_j , on interpole $f|_{I_j}$ par un polynôme de degré⁴ n avec des points équirépartis. Le polynôme par morceaux est noté $\Pi_n^h f(x)$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([A, B])$, alors, on a*

$$E_n^h(f) = \max_{x \in [A, B]} |f(x) - \Pi_n^h f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x \in [A, B]} |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1}. \tag{3.62}$$

Si de plus, les points sont équirépartis, on a

$$E_n^h(f) = \max_{x \in [A, B]} |f(x) - \Pi_n^h f(x)| \leq \frac{(B-A)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x \in [A, B]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{1}{N^{n+1}}. \tag{3.63}$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 3.28 à chaque intervalle. □

4. Attention, N le nombre de sous-intervalles ou morceaux n’a aucun lien avec n le degré des polynômes !

◇

REMARQUE 3.33. À n fixé, c'est le fait que h tende vers 0 qui assure que l'erreur $E_n^h(f)$ tend vers 0.

EXEMPLE 3.34. On considère A et B définis par

$$A = 0, \quad B = 1. \quad (3.64)$$

et la fonction f définie par

$$\forall x \in [A, B], \quad f(x) = \sin(23x) + 1 + 5x^2. \quad (3.65)$$

On détermine par la méthode d'interpolation composite, les interpolations de f de degré 1 et 2, par morceaux, en considérant différentes valeurs de N , nombre de sous-intervalle décrivant l'ensemble

$$J = \{1, 3, 5, 10, 20, 50\}. \quad (3.66)$$

Voir les figures 3.10 et 3.11. Nous reviendrons sur cette méthode lors du chapitre 4 (voir exemple 4.17 page 68), où pour calculer l'intégrale approchée de f , nous remplacerons la fonction f par l'interpolation composite ainsi définie.

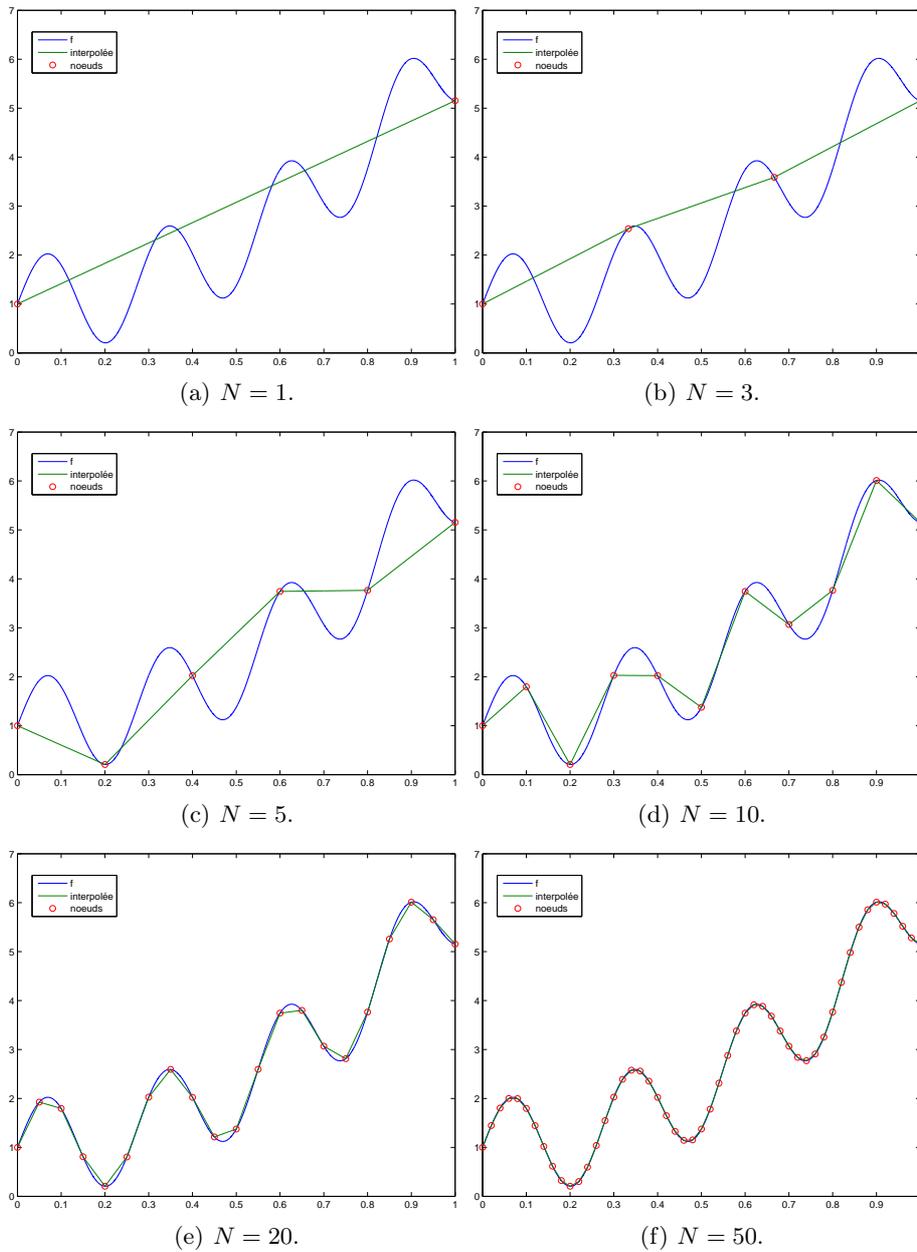


FIGURE 3.10. Différentes illustrations de l'interpolation composite, avec un degré égal à 1 et différentes valeurs de N .

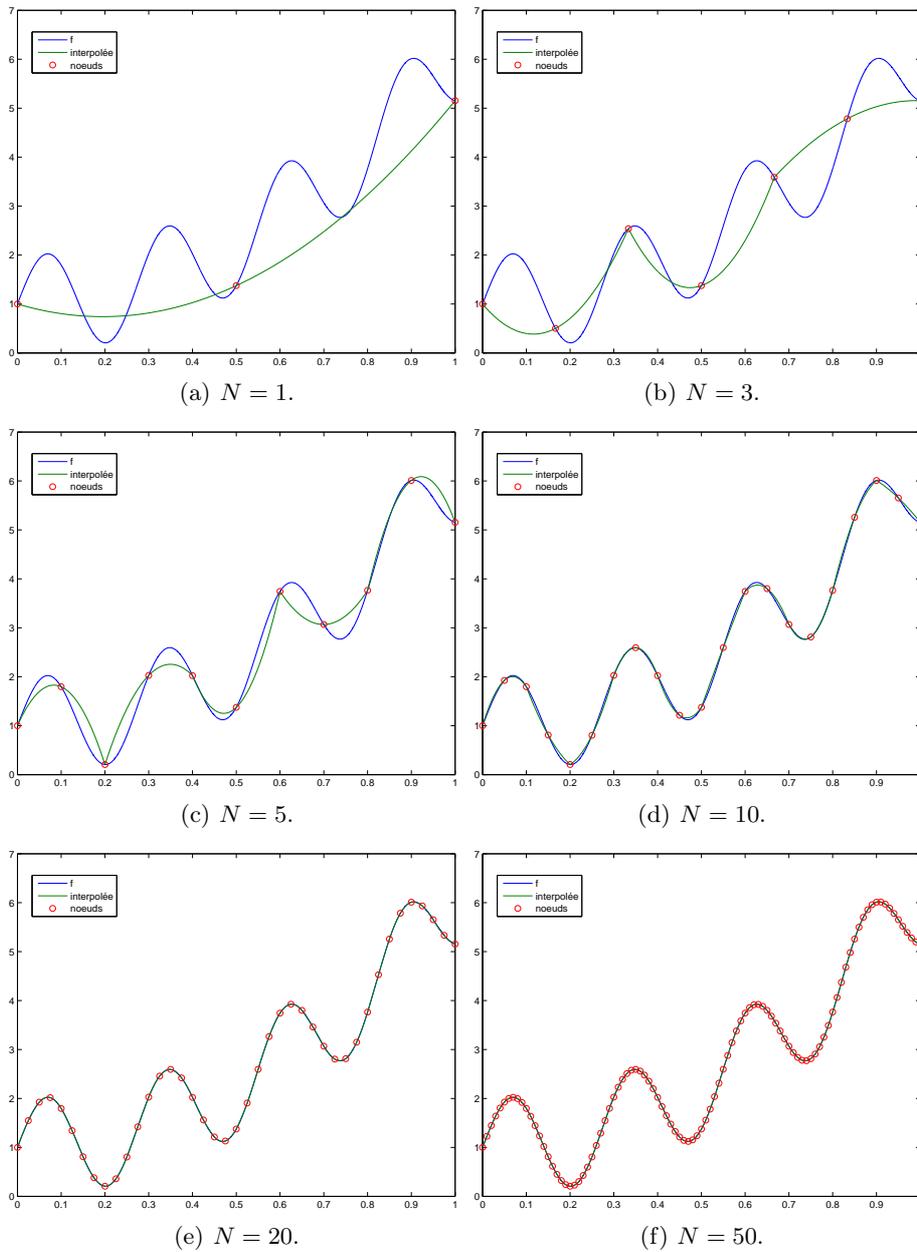


FIGURE 3.11. Différentes illustrations de l'interpolation composite, avec un degré égal à 2 et différentes valeurs de N .

Voir [DB22, la section 2.6 page 39].♠

Voir [DB22, la section 2.7 page 40].♠

3.5. Approximation au sens des moindres carrés

Une autre façon d'avoir à utiliser un grand degré de polynôme, notamment quand les données sont très nombreuses consiste à écrire l'égalité (3.5) non pas au sens exact, mais au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche un polynôme p passant le plus près possible d'un nuage de points donnés; on minimise la somme des carrés des écarts entre la valeur du polynôme en x_i et la valeurs y_i , c'est-à-dire

$$S = \sum_{i=0}^n (p(x_i) - y_i)^2.$$

Ce polynôme est unique. Il coïncide avec le polynôme d'interpolation si le degré du polynôme recherché est au plus égal au nombre de points moins un.

On pourra consulter par exemple [LT93, Chapitre 6], [Cia82, Sections 3.7 p. 69 et 7.4 p. 157] [Bas22, section 4.3. "Étude d'un exemple concret"] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf> ou l'annexe D. Attention, dans cette annexe, il convient de remplacer dans (D.5) et (D.6), b_i par y_i et $\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j$ par $\sum_{j=0}^n \alpha_j x_i^j$, où

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j.$$

Prendre garde aussi au fait que dans cette annexe, les points ici notés x_0, \dots, x_n et les valeurs notées y_0, \dots, y_n sont respectivement notés x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n . Dans cette annexe, sont montrés l'existence et l'unicité du polynôme p , défini au sens des moindres carrés. Voir le lemme D.1 et la proposition D.3.

REMARQUE 3.35. L'hypothèse de la proposition D.3 (la matrice A est de rang p) est vérifiée dès que, parmi les valeurs des x_i , il y a au moins p valeurs distinctes. En effet, dans ce cas, on raisonne comme dans la remarque D.2 : on peut extraire de A , une sous-matrice de type

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{i_1} & x_{i_1}^2 & \dots & x_{i_1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{i_p} & x_{i_p}^2 & \dots & x_{i_p}^p \end{pmatrix}$$

où les indices i_q , pour $q \in \{1, \dots, p\}$ sont deux à deux distincts, les x_{i_q} sont deux à deux distincts et l'on sait que cette matrice est inversible (voir par exemple la section 3.2.2.1).

◇

EXEMPLE 3.36.

On considère un nuage⁵ de 200 points. Dans ce cas, le lemme D.1 s'applique. Pour quelques valeurs de N décrivant l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 10, 20, 40\}$, on construit et trace le polynôme de degré N interpolant les (x_i, y_i) au sens des moindres carrés.

Voir figure 3.12.

On prendra garde au fait, que pour la dernière valeur de N choisie, le polynôme prend de "grandes valeurs" au voisinage de $x = 1$, comme le montre la figure 3.13.

EXEMPLE 3.37. Voir de nouveau l'exemple de la section 3.1.

5. Il est défini en fait à partir de la fonction f de l'exemple 3.34 : on considère 200 points $(x_i)_{1 \leq i \leq 200}$ aléatoires dans $[0, 1]$. Pour tout i , on pose $y_i = F(x_i) + \varepsilon_i$ où les ε_i sont des nombres aléatoires dans $[-R, R]$ avec $R = 0.50$.

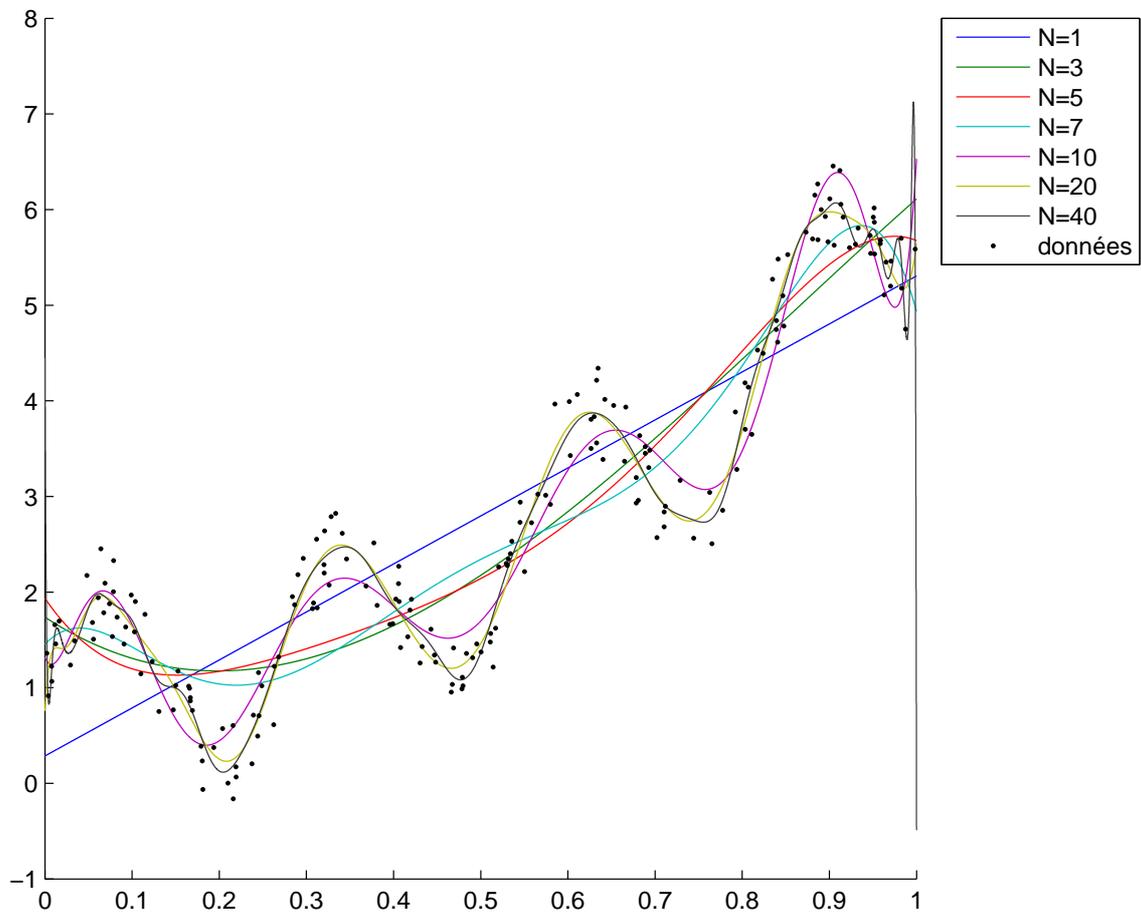
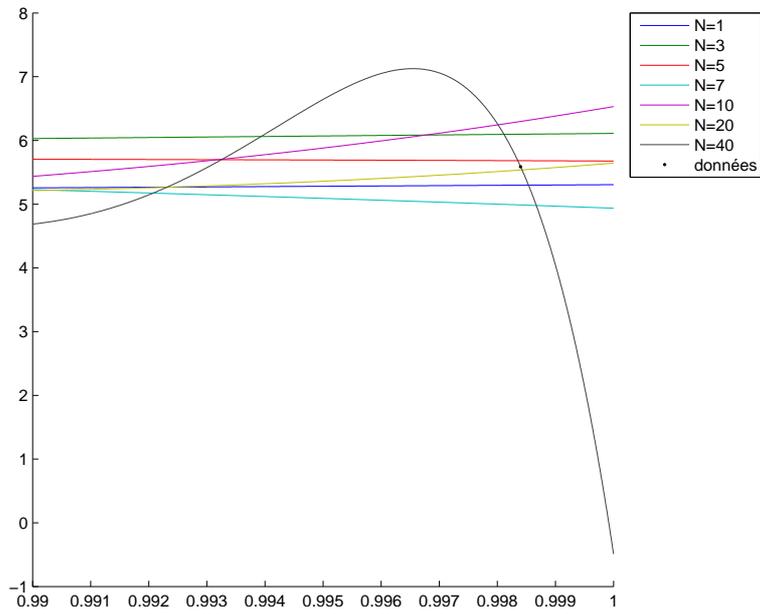


FIGURE 3.12. Interpolation au sens des moindres carrés.

FIGURE 3.13. Interpolation au sens des moindres carrés, au voisinage de $x = 1$.

Intégration numérique

Ce chapitre est issu (et adapté) de [DB22, chapitre 3].

Voir [DB22, la section 3.1 page 46].♠

Voir [DB22, la section 3.2 page 47].♠

4.1. Méthodes élémentaires et composites (composées)

4.1.1. Définition et propriétés des méthodes élémentaires

Cette section correspond à [BM03, Section 3.2.1].

4.1.1.1. *Notations.*

Soit f une fonction régulière sur le fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} ; f sera au moins de classe C^1 et au plus de classe C^4 .

Pour n dans \mathbb{N} , considérons le support $\{x_0, \dots, x_n\}$ formé de points quelconques et deux à deux distincts de $[a, b]$. Soit Π_n le polynôme d'interpolation de f associé. D'après la proposition 3.25, si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Pi_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx, \quad (4.1)$$

où E_n est donnée par l'expression (3.51) figurant dans la preuve, soit

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x), \quad (4.2)$$

où ω_{n+1} est défini par (3.50).

Nous notons

- I_n la valeur approchée de I définie par

$$I_n = \int_a^b \Pi_n(x)dx; \quad (4.3)$$

- \mathcal{E}_n l'erreur d'intégration qui est l'intégration de l'erreur d'interpolation fournie par :

$$\mathcal{E}_n = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)dx, \quad (4.4)$$

Ainsi, nous avons

$$\int_a^b f(x)dx = I_n + \mathcal{E}_n. \quad (4.5)$$

REMARQUE 4.1. L'application $x \mapsto f[x_0, \dots, x_n, x]$ est définie pour tout x , même égal à l'un des x_i , comme déjà écrit dans la preuve de la proposition 3.26. Voir [BM03, exercice 2.8 et TP 2.F]. De plus, cette application est dérivable un certain nombre de fois, si f l'est aussi.

◇

Voir [DB22, la remarque 3.5 page 51].♠

Les méthodes élémentaires d'intégration vont simplement s'interpréter comme des cas particuliers selon le choix du degré n du polynôme d'interpolation.

4.1.1.2. Interpolation par une fonction Π_n de degré $n = 0$.

PROPOSITION 4.2. Dans le cas de degré $n = 0$, le support d'interpolation est réduit à $\{x_0\}$. Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_0 = (b - a)f(x_0),$$

et l'erreur d'intégration est

$$\mathcal{E}_0 = \int_a^b f[x_0, x](x - x_0) dx.$$

DÉMONSTRATION.

(1) Ici $I_0 = \int_a^b \Pi_0(x) dx$ avec $\Pi_0(x)$ défini par $\Pi_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$ d'où le résultat.

(2) Le caractère C^1 de f garantit la continuité de l'application : $x \mapsto f[x_0, x]$ et donc l'existence de

$$\mathcal{E}_0 = \int_a^b f[x_0, x] \omega_1(x) dx,$$

avec $\omega_1(x)$ égal à

$$\omega_1(x) = (x - x_0).$$

□

◇

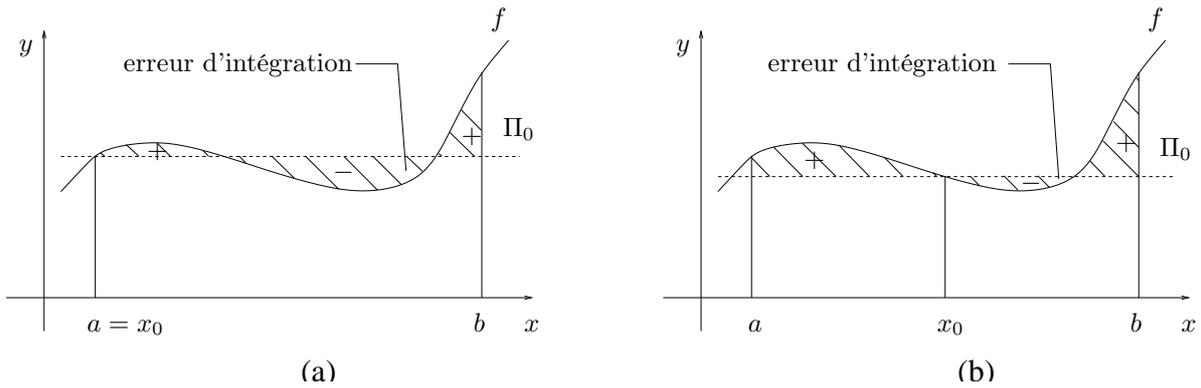


FIGURE 4.1. Les fonctions f et Π_0 et l'erreur d'intégration pour la méthode du rectangle, à gauche, (a) (si $x_0 = a$) et la méthode du point milieu (b).

En choisissant x_0 comme extrémité de l'intervalle $[a, b]$, il vient (voir figure 4.1a)

COROLLAIRE 4.3 (Méthode du rectangle). Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors, pour $x_0 = a$, la valeur approchée vaut

$$I^R = (b - a)f(a), \quad (4.6)$$

l'erreur d'intégration vaut

$$\mathcal{E}^R = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\eta) \text{ avec } \eta \in]a, b[, \quad (4.7)$$

et, pour $x_0 = b$,

$$I^R = (b - a)f(b), \quad (4.8)$$

l'erreur d'intégration vaut

$$\mathcal{E}^R = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\eta) \text{ avec } \eta \in]a, b[. \quad (4.9)$$

DÉMONSTRATION. Les deux cas sont similaires ; on traite le cas $x_0 = a$.

Présentons deux preuves :

- (1) L'expression de la valeur approchée I^R provient immédiatement de la proposition 4.2.

De même l'erreur d'intégration s'écrit ici

$$\mathcal{E}^R = \int_a^b f[a, x](x - a) dx.$$

On remarque que $(x - a)$ garde un signe constant sur $[a, b]$; ainsi, d'après [BM03, le corollaire 3.4 (cas 1 : (3.18))] avec $n = 0$ et $r = f$ sur $[a, b]$

$$\mathcal{E}^R = \frac{f'(\eta)}{(1)!} \int_a^b \omega_1(x) dx = f'(\eta) \int_a^b (x - a) dx,$$

avec $\eta \in]a, b[$ et donc

$$\mathcal{E}^R = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\eta). \quad (4.10)$$

- (2) Plus simplement, dans le particulier étudié ici, on peut écrire

$$\mathcal{E}^R = \int_a^b f(x) - \Pi_0(x) dx = \int_a^b f(x) - f(a) dx,$$

et d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(c_x)(x - a),$$

et donc, d'après ce qui précède :

$$\mathcal{E}^R = \int_a^b f'(c_x)(x - a) dx,$$

et d'après le théorème de la moyenne, puisque $f'(c_x)$ est continu par rapport à x et $x - a$ est de signe constant sur $[a, b]$ (voir [BM03, Théorème A.8 p.327]), il existe $\eta \in]a, b[$ tel que

$$\mathcal{E}^R = f'(\eta) \int_a^b (x - a) dx,$$

et on conclue comme dans (4.10). □

◇

En choisissant pour x_0 le milieu de l'intervalle $[a, b]$, il vient (voir figure 4.1b) :

COROLLAIRE 4.4 (Méthode du point milieu). *Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, alors la valeur approchée vaut*

$$I^M = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right), \quad (4.11)$$

et l'erreur d'intégration vaut

$$\mathcal{E}^M = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\eta) \text{ avec } \eta \in]a, b[. \quad (4.12)$$

DÉMONSTRATION. On applique encore la proposition 4.2 d'où l'expression de I^M et

$$\mathcal{E}^M = \int_a^b f[m, x](x - m) dx \text{ avec } m = \frac{a + b}{2}.$$

Ici, $(x - m)$ change de signe sur $[a, b]$. On peut montrer (voir [BM03]) que

$$\mathcal{E}^M = \int_a^b f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) dx = \int_a^b f[m, m, x](x - m)^2 dx.$$

On a alors, puisque, f est de classe C^2 sur $[a, b]$,

$$\mathcal{E}^M = \frac{f^{(2)}(\eta)}{(2)!} \int_a^b \omega_2(x) dx = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x - m)^2 dx, \text{ avec } \xi \in]a, b[.$$

On conclut en calculant explicitement l'intégrale. □

◇

4.1.1.3. Interpolation par une fonction Π_n de degré $n = 1$.

PROPOSITION 4.5. Dans le cas de degré $n = 1$, le support d'interpolation est égal à $\{x_0, x_1\}$. Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_1 = \int_a^b (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)) dx,$$

et l'erreur d'intégration est

$$\mathcal{E}_1 = \int_a^b f[x_0, x_1, x] (x - x_0) (x - x_1) dx.$$

DÉMONSTRATION. On a $I_1 = \int_a^b \Pi_1(x) dx$ où Π_1 désigne le polynôme d'interpolation de f sur $\{x_0, x_1\}$; d'où le résultat.

Le caractère C^2 de f garantit l'existence dans tous les cas de $f[x_0, x_1, x]$ puis l'écriture proposée de \mathcal{E}_1 , puisque $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. \square

◇

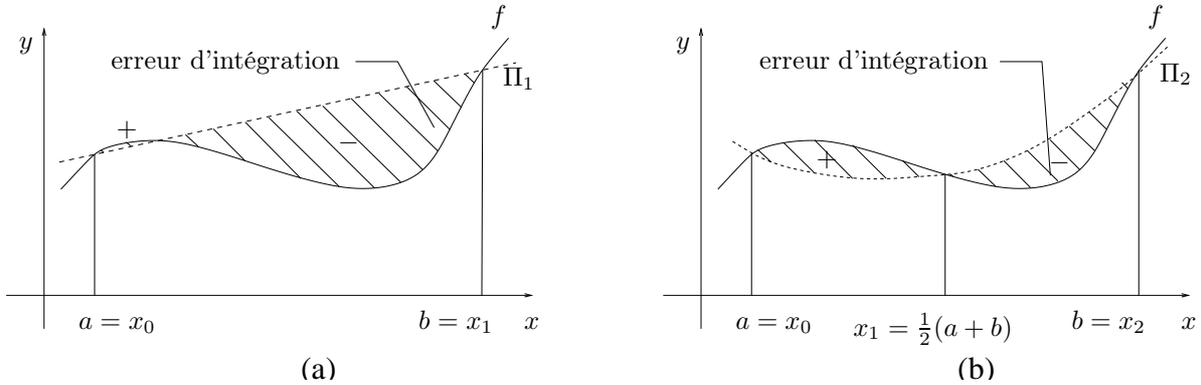


FIGURE 4.2. Les fonctions f et Π_n et l'erreur d'intégration pour la méthode du trapèze (a) (avec $n = 1$) et la méthode de Simpson (b) (avec $n = 2$).

En choisissant $x_0 = a$ et $x_1 = b$, il vient (voir figure 4.2a)

COROLLAIRE 4.6 (Méthode du trapèze). Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, alors la valeur approchée vaut

$$I^T = (b - a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right), \quad (4.13)$$

et l'erreur d'intégration vaut

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\eta) \quad \text{avec } \eta \in]a, b[. \quad (4.14)$$

DÉMONSTRATION. En termes de valeur approchée, $I^T = \int_a^b \Pi_1(x) dx$ où Π_1 désigne le polynôme d'interpolation de f sur $\{a, b\}$. Ainsi

$$I^T = \int_a^b f[a] dx + \int_a^b f[a, b] (x - a) dx = (b - a)f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2}, \quad (4.15)$$

d'où le résultat annoncé qu'on aurait pu déduire d'une interprétation géométrique, via l'aire d'un trapèze.

Pour l'erreur d'intégration,

$$\mathcal{E}_1 = \int_a^b f[a, b, x] (x - a) (x - b) dx,$$

on peut montrer (voir [BM03]) que

$$\mathcal{E}_1 = \frac{f''(\eta)}{(2)!} \int_a^b (x - a) (x - b) dx, \quad \text{avec } \eta \in]a, b[.$$

On conclut en calculant l'intégrale. \square

◇

4.1.1.4. Interpolation par une fonction Π_n de degré $n = 2$.

PROPOSITION 4.7. Dans le cas de degré $n = 2$, le support d'interpolation est égal à $\{x_0, x_1, x_2\}$. Si f est de classe C^3 sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_2 = \int_a^b (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)) dx,$$

et l'erreur d'intégration est

$$\mathcal{E}_2 = \int_a^b f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) dx.$$

DÉMONSTRATION. Similaire à celle de la proposition 4.5. □

◇

En choisissant $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. (voir figure 4.2b), il vient

COROLLAIRE 4.8 (Méthode de Simpson). Si f est de classe C^4 sur $[a, b]$, alors la valeur approchée vaut

$$I^S = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b)) \text{ où } m = \frac{a+b}{2}, \quad (4.16)$$

et l'erreur d'intégration vaut

$$\mathcal{E}^S = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta). \quad (4.17)$$

DÉMONSTRATION.

(1) Étude de la valeur approchée

Notons $m = (a+b)/2$. On désigne par I^S l'intégrale $\int_a^b \Pi_2(x) dx$ où Π_2 interpole f sur $\{a, m, b\}$. On remarquera que I^S est le barycentre de

$$f(a) \left(\frac{(b-a)}{6} \right), \quad f(m) \left(\frac{4(b-a)}{6} \right) \text{ et } f(b) \left(\frac{(b-a)}{6} \right).$$

(2) Étude de l'erreur d'intégration

On a

$$\mathcal{E}_2 = \int_a^b f[a, m, b, x](x-a)(x-m)(x-b) dx.$$

On peut montrer (voir [BM03]) que

$$\mathcal{E}_2 = \frac{f^{(4)}(\eta)}{(4)!} \int_a^b (x-a)(x-m)^2(x-b) dx.$$

On conclut en calculant explicitement l'intégrale. □

◇

REMARQUE 4.9. Notons d'après les formules (4.7), (4.9), (4.12), (4.14) et (4.17) que

- la formule du rectangle est exacte pour des polynômes de degré 0,
- la formule du milieu est exacte pour des polynômes de degré 1 ;
- la formule du trapèze est exacte pour des polynômes de degré 1 ;
- la formule de Simpson est exacte pour des polynômes de degré 3.

Notons dans le tableau suivant le degré des formules simples d'intégration, c'est-à-dire le degré du plus grand polynôme intégré exactement par la formule et le nombre de points du support :

| méthode | degré | nombre de points |
|-----------|-------|------------------|
| rectangle | 0 | 1 |
| milieu | 1 | 1 |
| trapèze | 1 | 2 |
| Simpson | 3 | 3 |

Voir [DB22, la remarque 3.16 page 55].♠

Les formules d'intégration élémentaires et les erreurs correspondantes sont résumées dans les tableaux 4.1 et 4.2.

| méthode | formule |
|--------------------|---|
| rectangle (gauche) | $(b - a)f(a)$ |
| rectangle (droite) | $(b - a)f(b)$ |
| milieu | $(b - a)f((a + b)/2)$ |
| trapèze | $\frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b))$ |
| Simpson | $\frac{1}{6}(b - a)(f(a) + 4f((a + b)/2) + f(b))$ |

TABLE 4.1. Méthodes élémentaires sur $[a, b]$.

| méthode | erreur |
|-----------|--------------------------------------|
| rectangle | $\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta)$ |
| milieu | $\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$ |
| trapèze | $-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$ |
| Simpson | $-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$ |

TABLE 4.2. Erreurs des méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans ce tableau, η appartient à $]a, b[$.

4.1.2. Définition et propriétés des méthodes composites (composées) à pas constant.

Cette section correspond à [BM03, Section 3.2.2].

4.1.2.1. *Problématique et principe.*

Soit f une fonction régulière sur $[A, B]$.

Nous souhaitons fournir une valeur approchée de $\int_A^B f(x)dx$ ainsi que l'expression de l'erreur d'intégration commise.

Soient N un entier naturel non nul et n un entier naturel.

Découpons $[A, B]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in \mathbb{R}_+^*$), notés $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi

$$x_0 = A, \quad x_N = B, \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \quad x_{i+1} - x_i = h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{B - A}{N}. \quad (4.18)$$

Par suite pour tout i de $\{0, \dots, N\}$

$$x_i = A + ih. \quad (4.19)$$

Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (pour $0 \leq i \leq N-1$) considérons la fonction $p_{i,n}$ qui interpole f en des points $\{x_{i,0}, \dots, x_{i,n}\}$ à préciser. Effectuons une intégration approchée sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq N-1$:

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{i,n}(x)dx \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x_{i,0}, \dots, x_{i,n}, x] \left(\prod_{j=0}^n (x - x_{i,j}) \right) dx \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons

(1) la valeur approchée I_N de $\int_A^B f(x)dx$. Elle est la somme de N valeurs approchées élémentaires

$$I_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{i,n}(x)dx \right).$$

(2) De même, l'erreur d'intégration globale E_N est la somme de N valeurs d'erreurs élémentaires $E_{i,N}$ commises sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\mathcal{E}_N = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}_{i,N} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x_{i,0}, \dots, x_{i,n}, x] \left(\prod_{j=0}^n (x - x_{i,j}) \right) dx \right).$$

Nous fournissons ci-dessous les résultats relatifs aux quatre formules simples classiques étudiées précédemment ; seule la première preuve est détaillée car les autres en sont très proches.

4.1.2.2. Intégration par la méthode des rectangles.

PROPOSITION 4.10. Soit f de classe C^1 sur $[A, B]$. Avec les notations (4.18) et (4.19), l'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composée des rectangles et l'erreur d'intégration sont données par :

$$I_N^R = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{E}_N^R = h \frac{(B-A)}{2} f'(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B]. \quad (4.21)$$

REMARQUE 4.11. Dans l'écriture de la valeur approchée, nous avons choisi pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ d'interpoler sur le support $\{x_i\}$, c'est-à-dire une formule des rectangles à gauche. Il était possible de prendre une formule des rectangles à droite ; ceci eût fourni une formule légèrement différente

$$I_N^R = h \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (4.22)$$

et la même expression de l'erreur.

DÉMONSTRATION.

- (1) La valeur approchée I_N^R a évidemment la forme indiquée vu l'étude menée dans le cas d'intervalles élémentaires et puisque pour tout i on a $x_{i+1} - x_i = h$.
- (2) D'après le corollaire 4.3 appliqué à la fonction f sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, il vient :

$$\mathcal{E}_N^R = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\eta_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} f'(\eta_i) \text{ avec } \eta_i \in]x_i, x_{i+1}[\text{ pour tout } i ;$$

Mais comme f est de classe C^1 sur $[A, B]$, f' atteint son minimum m et son maximum M sur $[A, B]$; par conséquent, on a pour tout x de $[A, B]$

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \text{donc} \quad \frac{h^2}{2} m \leq \frac{h^2}{2} f'(x) \leq \frac{h^2}{2} M ;$$

ainsi on peut écrire les N inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2}m &\leq \frac{h^2}{2}f'(\eta_0) \leq \frac{h^2}{2}M, \\ \frac{h^2}{2}m &\leq \frac{h^2}{2}f'(\eta_1) \leq \frac{h^2}{2}M, \\ &\vdots \\ \frac{h^2}{2}m &\leq \frac{h^2}{2}f'(\eta_{N-1}) \leq \frac{h^2}{2}M, \end{aligned}$$

qui, ajoutées membre à membre, conduisent à

$$m \leq \frac{\mathcal{E}_N^R}{Nh^2/2} \leq M.$$

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f' , continue sur $[A, B]$, implique qu'il existe η dans $[A, B]$ tel que

$$\frac{\mathcal{E}_N^R}{Nh^2/2} = f'(\eta),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_N^R = N \frac{h^2}{2} f'(\eta) = h \frac{(B-A)}{2} f'(\eta).$$

□

◇

REMARQUE 4.12. Les preuves conduisant à l'expression des erreurs d'intégration relatives aux autres méthodes étudiées sont similaires et reposent sur le [BM03, Lemme 3.25].

4.1.2.3. Intégration par la méthode des milieux.

PROPOSITION 4.13. Soit f de classe C^2 sur $[A, B]$. Avec les notations (4.18) et (4.19), l'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composée du point milieu et l'erreur d'intégration sont données par :

$$I_N^M = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right), \quad (4.23)$$

$$\mathcal{E}_N^M = h^2 \frac{(B-A)}{24} f''(\eta), \text{ avec } \eta \in [A, B]. \quad (4.24)$$

DÉMONSTRATION. Analogie à celle développée en méthode des rectangles. □

◇

4.1.2.4. Intégration par la méthode des trapèzes.

PROPOSITION 4.14. Soit f de classe C^2 sur $[A, B]$. Avec les notations (4.18) et (4.19), l'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composée des trapèzes et l'erreur d'intégration sont données par :

$$I_N^T = \frac{h}{2}(f(A) + f(B)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i), \quad (4.25)$$

$$\mathcal{E}_N^T = -h^2 \frac{(B-A)}{12} f''(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B]. \quad (4.26)$$

DÉMONSTRATION. De même type que les précédentes. On notera seulement que dans l'expression de I_N^T les points extrêmes A et B interviennent une seule fois au lieu de deux pour les autres x_i (une comme extrémité finale d'intervalle élémentaire, une comme extrémité initiale). □

◇

4.1.2.5. Intégration par la méthode de Simpson.

PROPOSITION 4.15. Soit f de classe C^4 sur $[A, B]$. Avec les notations (4.18) et (4.19), l'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composée des rectangles et l'erreur d'intégration sont données par :

$$I_N^S = \frac{h}{6} \left(f(A) + f(B) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right), \quad (4.27)$$

$$\mathcal{E}_N^S = -h^4 \frac{(B-A)}{2880} f^{(4)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B]. \quad (4.28)$$

DÉMONSTRATION. Analogie encore aux précédentes. On remarquera seulement que dans l'expression de I_N^S les points extrêmes A et B interviennent une seule fois, les autres points x_i deux fois encore et les milieux de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ quatre fois en raison de l'étude sur les intervalles élémentaires.

Le lecteur aura remarqué que pour appliquer la méthode de Simpson, f doit être connue en $2N + 1$ points, espacés d'un pas $h/2$: les $N + 1$ points x_i d'une part et les N milieux des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ d'autre part. \square

◇

Les formules d'intégration composites et les erreurs correspondantes sont résumées dans les tableaux 4.3 et 4.4.

| méthode | formule |
|--------------------|---|
| rectangle (gauche) | $h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$ |
| rectangle (droite) | $h \sum_{i=1}^N f(x_i)$ |
| milieu | $h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i + h/2)$ |
| trapèze | $\frac{h}{2}(f(A) + f(B)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$ |
| Simpson | $\frac{h}{6} \left(f(A) + f(B) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right)$ |

TABLE 4.3. Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$. Dans ce tableau, $N \in \mathbb{N}^*$, $h = (B - A)/N$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $x_i = a + ih$.

REMARQUE 4.16. Comme le montre l'exemple 4.17 page 68, l'intégration composite n'est rien d'autre que l'intégration de l'interpolation composite (voir section 3.4 page 51).

Voir [DB22, la section 3.3.3 page 59].♠

| méthode | erreur |
|-----------|---------------------------------------|
| rectangle | $h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$ |
| milieu | $h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$ |
| trapèze | $-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$ |
| Simpson | $-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$ |

TABLE 4.4. Erreurs des méthodes composites (composées) sur $[A, B]$. Dans ce tableau, η appartient à $[A, B]$.

4.1.3. Exemples de simulations numériques sur des Méthodes composites (composées)

EXEMPLE 4.17. On considère A , B et f définis dans l'exemple 3.34 par (3.64) et (3.65). Une primitive de f est donnée par

$$\int f(x)dx = -1/23 \cos(23x) + x + 5/3 x^3. \quad (4.29)$$

On en déduit la valeur exacte de

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{187}{69} - 1/23 \cos(23) \approx 2.733311580594. \quad (4.30)$$

Reprenons l'exemple 3.34 page 52. Nous calculons quelques approximations de l'intégrale (3.66) selon les quatre méthodes composées vues dans ce chapitre pour différentes valeurs de N , nombre de sous-intervalle décrivant l'ensemble défini par (3.66). Voir les figures 4.3 page suivante à 4.6 page 72. Rappelons à ce propos que l'intégration composite revient à intégrer l'interpolation composite. Les figures 3.10 sont identiques aux figures 4.4 et les figures 3.11 sont identiques aux figures 4.6.

| N | rectangles (gauche) | trapèzes | milieux | Simpson |
|-----|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 1 | 3,076 889 797 9 | 1,374 547 825 3 | 1,941 995 149 5 |
| 3 | 2,375 404 573 4 | 3,067 701 172 7 | 2,219 867 631 8 | 2,502 478 812 1 |
| 5 | 2,147 665 791 6 | 2,563 043 751 2 | 2,855 554 821 8 | 2,758 051 131 6 |
| 10 | 2,501 610 306 7 | 2,709 299 286 5 | 2,746 466 563 1 | 2,734 077 470 9 |
| 20 | 2,624 038 434 9 | 2,727 882 924 8 | 2,736 089 093 4 | 2,733 353 703 9 |
| 50 | 2,690 927 780 6 | 2,732 465 576 5 | 2,733 736 146 6 | 2,733 312 623 3 |

TABLE 4.5. Différentes valeurs approchées de l'intégrale I donnée par (4.30), fournies par différentes méthodes composites et différentes valeurs de N

Dans le tableau 4.5, sont données les différentes valeurs obtenues en fonctions de N et des méthodes.

| N | rectangles (gauche) | trapèzes | milieux | Simpson |
|-----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | 1,733 30 | $3,435 77 \times 10^{-1}$ | 1,358 76 | $7,913 16 \times 10^{-1}$ |
| 3 | $3,579 07 \times 10^{-1}$ | $3,343 90 \times 10^{-1}$ | $5,134 43 \times 10^{-1}$ | $2,308 33 \times 10^{-1}$ |
| 5 | $5,856 46 \times 10^{-1}$ | $1,702 68 \times 10^{-1}$ | $1,222 42 \times 10^{-1}$ | $2,473 95 \times 10^{-2}$ |
| 10 | $2,317 00 \times 10^{-1}$ | $2,401 23 \times 10^{-2}$ | $1,315 49 \times 10^{-2}$ | $7,658 90 \times 10^{-4}$ |
| 20 | $1,092 72 \times 10^{-1}$ | $5,428 65 \times 10^{-3}$ | $2,777 50 \times 10^{-3}$ | $4,212 32 \times 10^{-5}$ |
| 50 | $4,238 38 \times 10^{-2}$ | $8,460 03 \times 10^{-4}$ | $4,245 66 \times 10^{-4}$ | $1,042 66 \times 10^{-6}$ |

TABLE 4.6. Différentes erreurs correspondant aux différentes approximations de l'intégrale I donnée par (4.30), fournies par différentes méthodes composites et différentes valeurs de N

Dans le tableau 4.6, sont données les différentes erreurs correspondantes.

Nous constatons que les erreurs diminuent avec N et que la méthode des rectangles est moins précise que celles des trapèzes et des milieux, du même ordre de précision, elles-mêmes moins précises que celles de Simpson, comme le prévoient les résultats de la section 4.1.2.

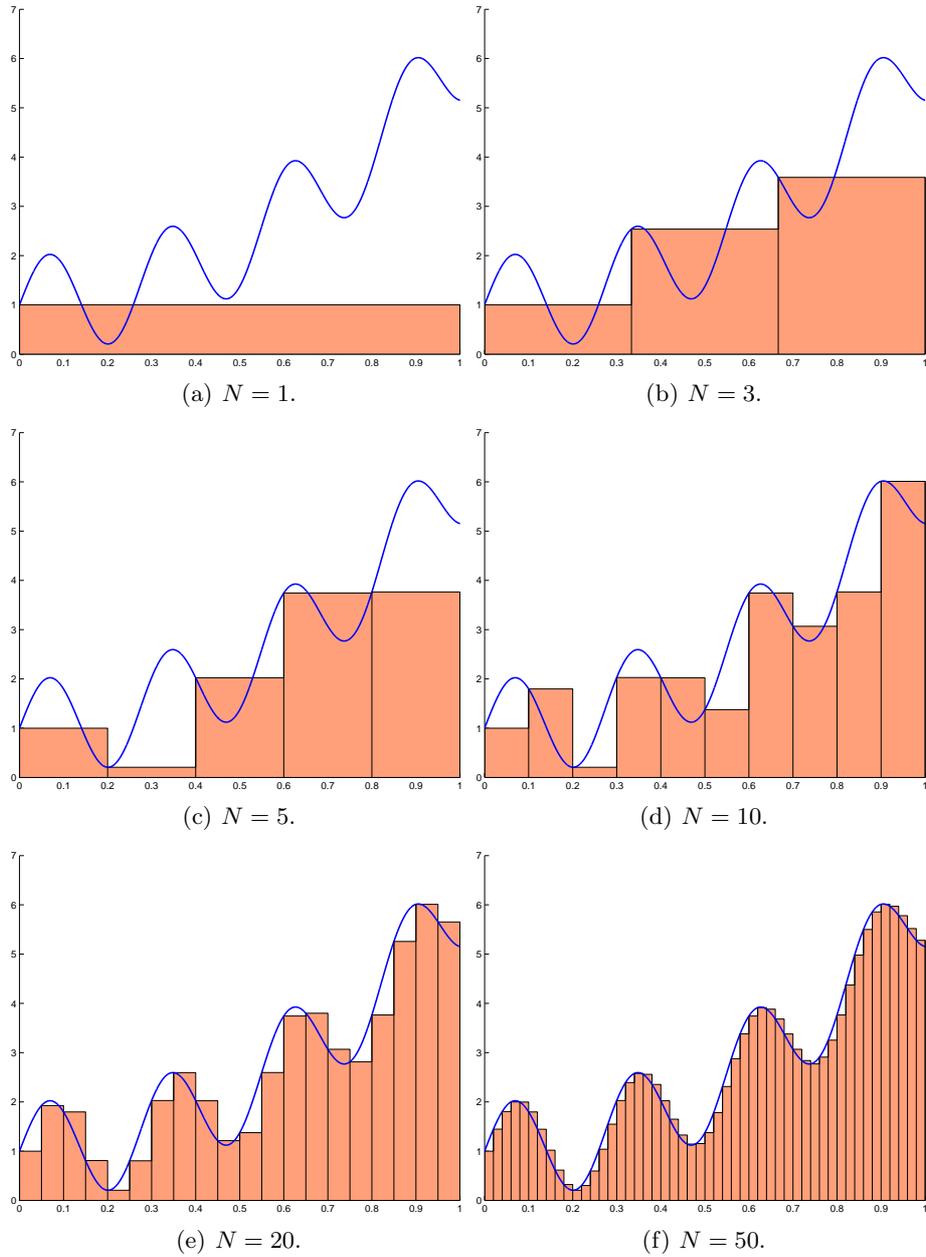


FIGURE 4.3. Différentes illustrations de l'approximation de l'intégrale I donnée par (4.30), fournie par la méthode des rectangles (à gauche) avec N sous-intervalles.

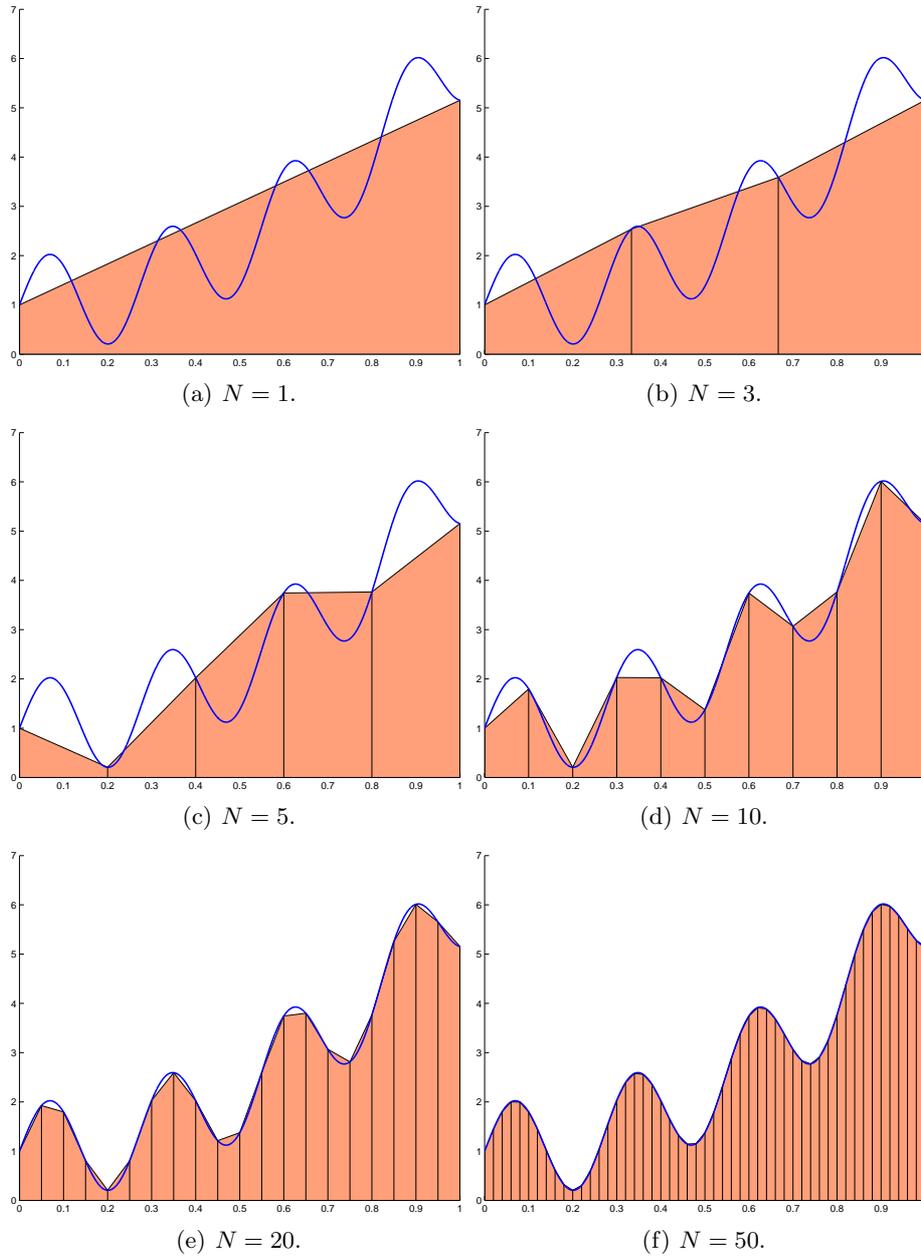


FIGURE 4.4. Différentes illustrations de l'approximation de l'intégrale I donnée par (4.30), fournie par la méthode des trapèzes avec N sous-intervalles. Figures à comparer avec les figures 3.10 page 53!

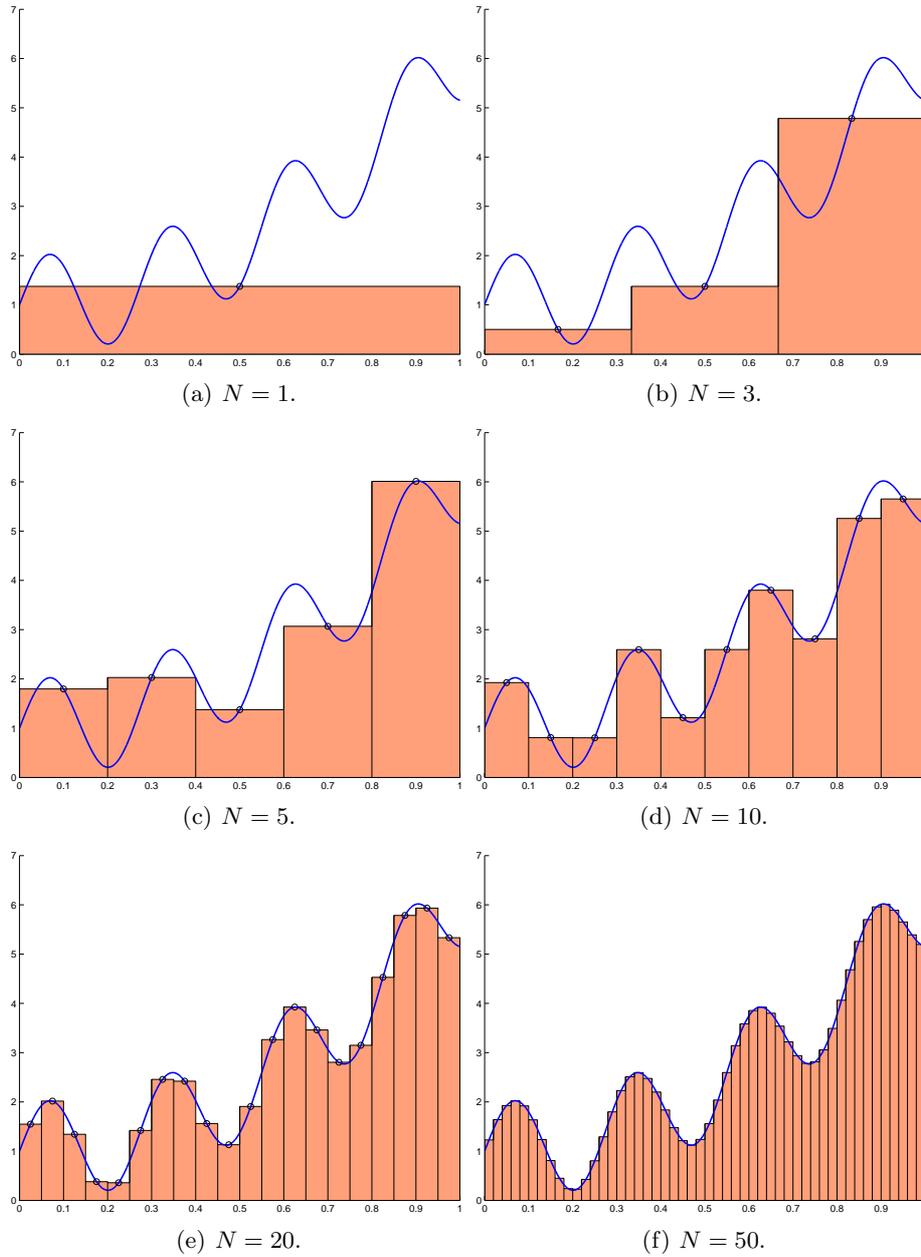


FIGURE 4.5. Différentes illustrations de l'approximation de l'intégrale I donnée par (4.30), fournie par la méthode des milieux avec N sous-intervalles.

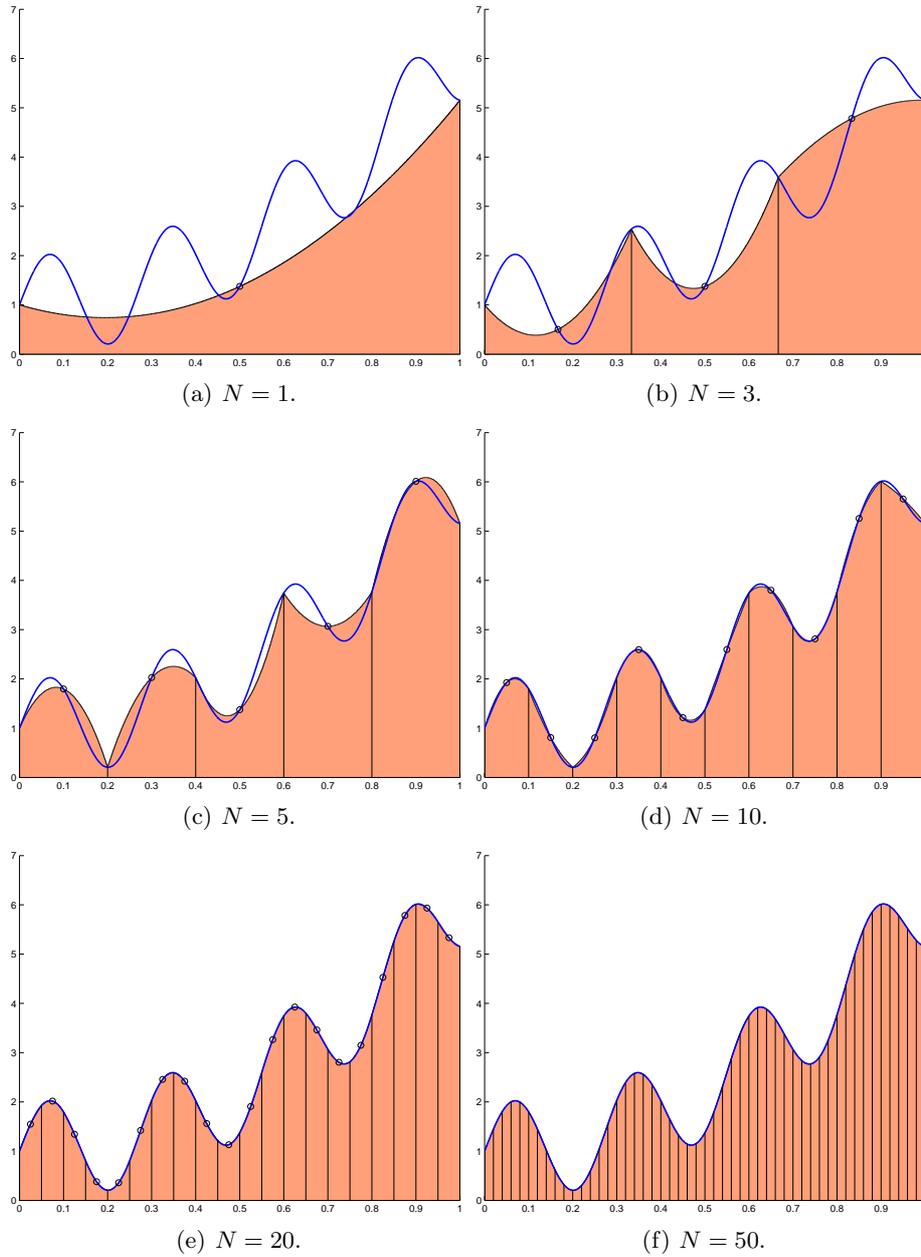


FIGURE 4.6. Différentes illustrations de l'approximation de l'intégrale I donnée par (4.30), fournie par la méthode de Simpson avec N sous-intervalles. Figures à comparer avec les figures 3.11 page 54!

EXEMPLE 4.18.

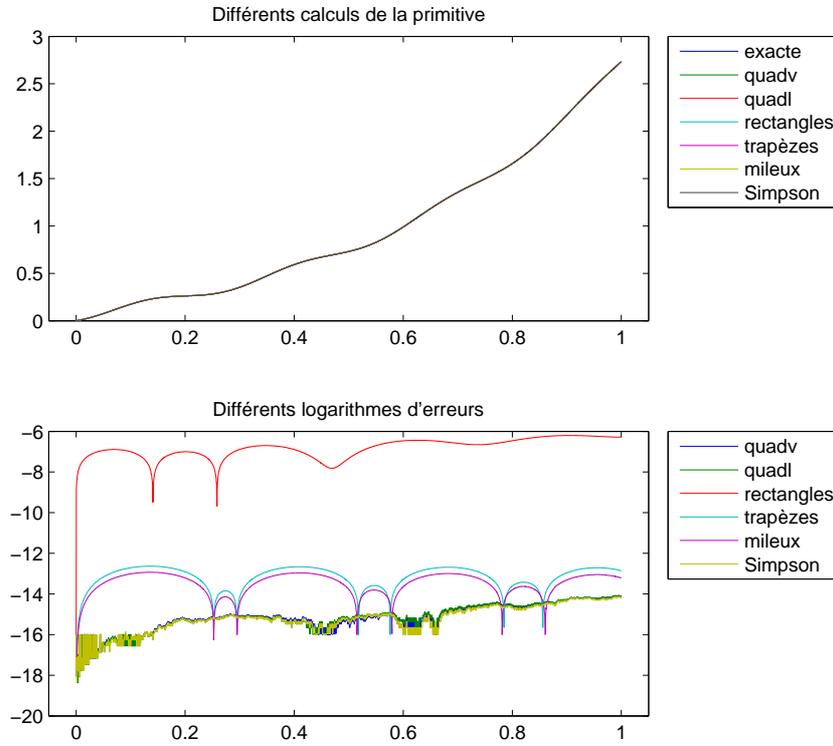


FIGURE 4.7. Différents calculs de la primitive de la fonction de l'exemple 4.17.

Reprenons l'exemple 4.17 page 68. Traçons maintenant la primitive de f sur $[A, B]$ en prenant 4000 points de calcul noté u_i et sur chacun des intervalles $[u_i, u_{i+1}]$, 1000 sous-intervalles. On utilise les fonctions `quadl` et `quadv` de matlab, puis par les méthodes des rectangles, des trapèzes, des milieux et de Simpson. Voir la figure 4.7. On y constate que la primitive calculée est visuellement identique pour les six méthodes. Comme prévu, la méthode la moins précise est celle des rectangles, puis celles des milieux et des trapèzes, du même ordre et enfin, les plus précises celles de Simpson et celles utilisant les fonctions `quadv` de `quadl` de matlab.

| quadv | quadl | rectangles | trapèzes | milieux | Simpson |
|---------|---------|------------|----------|---------|---------|
| 0.07982 | 0.41554 | 0.17777 | 0.22372 | 0.16589 | 0.37050 |

TABLE 4.7. Temps de calcul des différentes méthodes de calcul de la fonction définie dans l'exemple 4.17 page 68

Les temps de calculs sont donnés dans le tableau 4.7.

EXEMPLE 4.19. Reprenons l'exemple 4.17 page 68. On trace le logarithme (décimal, en base 10) de l'erreur entre les approximations par différentes méthodes (des rectangles, des trapèzes, des milieux et de Simpson) en fonction du logarithme du pas $h = (B - A)/N$ où N est le nombre de sous-intervalles. D'après les résultats du tableau 4.4, pour chacune des ces quatre méthodes, on a

$$|E| = C \left| f^{(q)}(\eta) \right| h^p,$$

où C dépend de A et de B . Si on admet que η varie peu en fonction de h et en écrivant abusivement, on a

$$\log(|E|) \approx p \log(h) + D,$$

où D ne dépend pas de h . Ainsi, la pente du nuage de points constitué par $(\log(h), (\log(|E|)))$ correspond à la valeur de p .

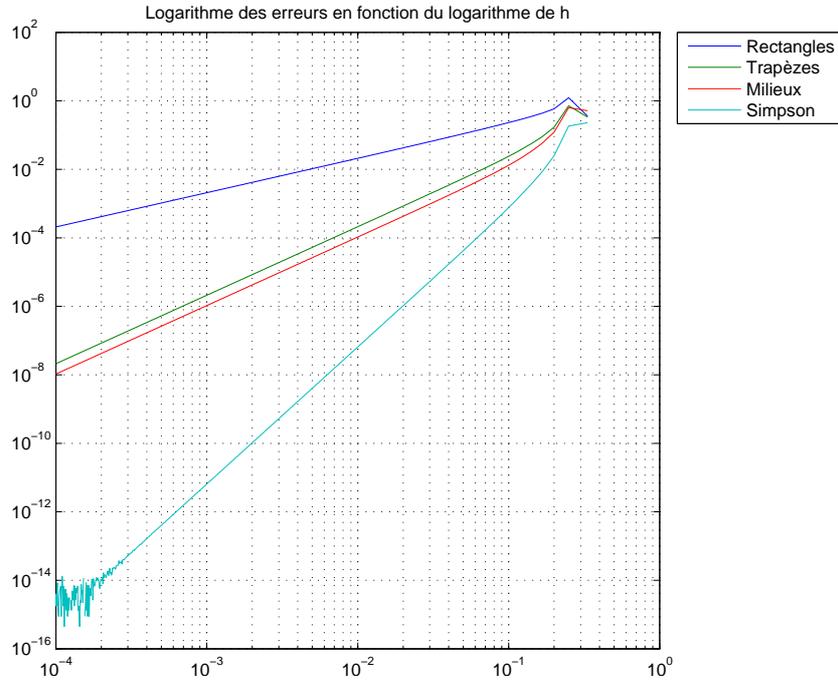


FIGURE 4.8. Le nuage de points $(\log(h), (\log(|E|)))$ pour f données dans l'exemple 4.17.

| | exposant théorique | pente expérimentale |
|------------|--------------------|---------------------|
| Rectangles | 1 | 1.0072318 |
| Trapezès | 2 | 2.0120085 |
| Milieux | 2 | 2.0207604 |
| Simpson | 4 | 3.9765418 |

TABLE 4.8. Pentés théoriques et calculées pour f donnée dans l'exemple 4.17

On observe alors pour N variant (de façon telle que les valeurs des \log de N soit équirépartis) de 3 à 10000, en prenant 666 valeurs, la figure 4.8 et les pentes données par le tableau 4.8.

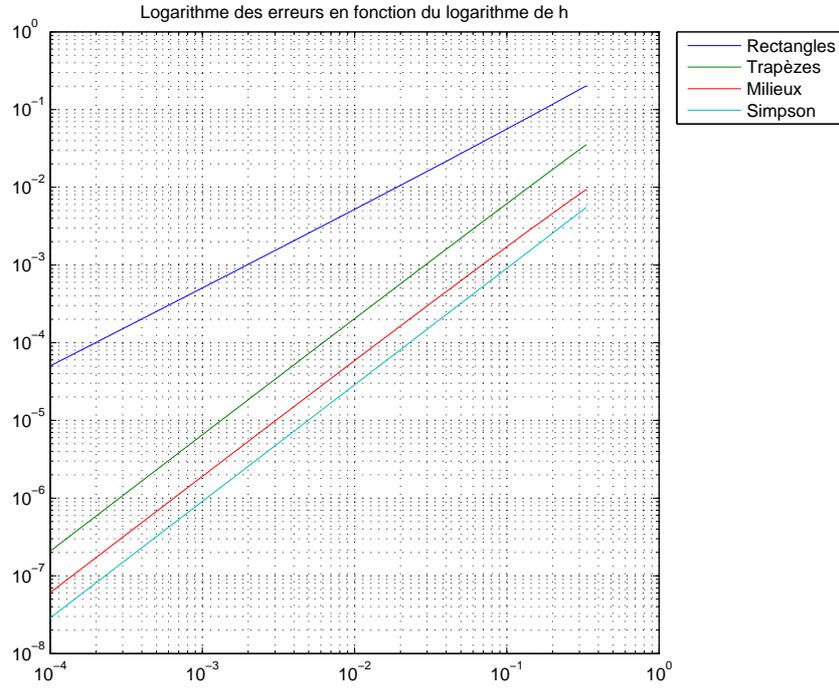
EXEMPLE 4.20.

Si maintenant, sur le même intervalle $[A, B]$ que dans l'exemple 4.19, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad (4.31)$$

on obtient alors la figure 4.9 et les pentes données par le tableau 4.9.

Cela s'explique que f n'est plus dérivable en zéro et que les résultats du tableau 4.4 ne sont donc plus valables.

FIGURE 4.9. Le nuage de points $(\log(h), (\log(|E|)))$ pour f données par (4.31).

| | exposant théorique | pente expérimentale |
|------------|--------------------|---------------------|
| Rectangles | 1 | 1.0119003 |
| Trapezés | 2 | 1.4935411 |
| Milieux | 2 | 1.4887678 |
| Simpson | 4 | 1.4999982 |

TABLE 4.9. Pentés théoriques et calculées pour f donnée par (4.31)

Voir [DB22, la section 3.4 page 68].♠

4.2. Un exercice type à savoir traiter parfaitement

Énoncé

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x) = \sin(x), \quad (4.32a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^2 f(x) dx. \quad (4.32b)$$

(1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.

- (b) Déterminer f' et f'' , puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.
- (c) (i) Calculer la valeur exacte de I .
- (ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (4.33)$$

Corrigé

- (1) (a) En utilisant le tableau 4.1, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = \sin(2) \quad (4.34)$$

soit

$$I^T = 0.90929742682568. \quad (4.35)$$

- (b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = \cos(x) ; \quad (4.36a)$$

$$f''(x) = -\sin(x). \quad (4.36b)$$

On majore $|\sin(x)|$ par 1. On en déduit

$$M_2 = \max_{x \in [0,2]} |f^{(2)}(x)|, \quad (4.37)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 1. \quad (4.38)$$

On note

$$a = 0, \quad b = 2. \quad (4.39)$$

Le tableau 4.2 fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad (4.40)$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe \mathcal{C}^2 . On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \quad (4.41)$$

Grâce à (4.39) et (4.38), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.6666666667. \quad (4.42)$$

(c) (i) On obtient

$$I = 1 - \cos(2), \quad (4.43a)$$

soit encore

$$I = 1.4161468365471. \quad (4.43b)$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I^T - I| = |1.4161468365471 - 0.9092974268257| = 0.5068494097215$$

qui est inférieure à celle donnée par (4.42).

(2) (a) En utilisant le tableau 4.3, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = 1/3 \sin(2) + 2/3 \sin(2/3) + 2/3 \sin(4/3) \quad (4.44)$$

soit

$$I_3^T = 1.36330427856393. \quad (4.45)$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 2. \quad (4.46)$$

Le tableau 4.4 fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \quad (4.47)$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \quad (4.48)$$

soit

$$h = \frac{(2) - (0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.66666666666667. \quad (4.49)$$

On peut donc écrire

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \quad (4.50)$$

En utilisant de nouveau (4.38), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 7.407407 \cdot 10^{-2}. \quad (4.51)$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I_3^T - I| = |1.4161468365471 - 1.3633042785639| = 5.284256 \cdot 10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (4.51).

(3) Pour que

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (4.50) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (4.48),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \quad (4.52)$$

où pour tout réel X ,

$\lceil X \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à X .

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (4.38),

$$N = 8165. \quad (4.53)$$

REMARQUE 4.21. Avec cette valeur de N , on a

$$\mathcal{E}_{8165}^T = 1.416146829466465,$$

et l'erreur réelle

$$|\mathcal{E}_{8165}^T - I| = 7.0806769 \cdot 10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4.33) de l'énoncé.

Troisième partie

Transformations continues

Transformées de Laplace

Ce chapitre est issu (et adapté) de [Esc22, chapitre 1 : Transformée de Laplace]. On pourra aussi consulter le [Gly11, Chapitre 5].

Rédaction partielle, un certain nombre de passages sont manuscrits et fournis sur internet, à l'adresse habituelle.

5.1. Rappels sur les intégrales impropres

Voir par exemple [Bas22, section 2.4].

5.2. Définition et propriétés élémentaires

5.2.1. Définitions

DÉFINITION 5.1. Une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dite causale si elle est nulle sur \mathbb{R}_- . Cette hypothèse sera systématiquement faite dans tout ce chapitre pour toute fonction dont on détermine la transformée de Laplace.

DÉFINITION 5.2 (Transformation de Laplace). Pour une application f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , on définit sa transformation de Laplace, notée \hat{f} , application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.1)$$

DÉFINITION 5.3 (Transformation (bis) de Laplace). Pour une application f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , on définit sa transformation de Laplace, notée \hat{f} , fonction¹ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.2)$$

On note aussi $\mathcal{L}(f) = \hat{f}$. Ainsi \mathcal{L} est une application de l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

On peut remarquer que \hat{f} est aussi donnée par (5.1).

DÉFINITION 5.4 (Indice de sommabilité). Si f est une application, on appelle l'indice de sommabilité le réel α défini par

$$\alpha = \inf \left\{ p \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} |f(t)| dt \text{ converge.} \right\}. \quad (5.3)$$

REMARQUE 5.5. Soit g une application d'un ensemble X non borné de \mathbb{R} (typiquement égal à \mathbb{R}_+ dans ce chapitre) à valeurs dans \mathbb{K} avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On la suppose assez régulière, par exemple continue par morceaux. On sait déjà que si g est "absolument intégrable" (c'est-à-dire $\int_X |g(t)| dt$ est convergente) alors g

1. On verra plus bas qu'elle n'est pas nécessairement définie sur \mathbb{C} tout entier.

est "intégrable" (c'est-à-dire $\int_X g(t)dt$ est convergente). On a donc

S'il existe ϕ de X dans \mathbb{R}_+ tel que $\forall x \in X, g(t) \leq \phi(t)$,

avec $\int_X \phi(t)dt$ est convergente, alors $\int_X g(t)dt$ est convergente.

Cette condition nécessaire en théorie de l'intégration de Riemann est en fait une condition nécessaire et suffisante dans la théorie de l'intégration de Lebesgue, hors programme. On a donc

(Il existe ϕ de X dans \mathbb{R}_+ tel que $\forall x \in X, g(t) \leq \phi(t)$,

avec $\int_X \phi(t)dt$ est convergente) est équivalent à $\int_X g(t)dt$ est convergente. (5.4)

Dans ce cours, nous remarquerons donc que pour toute fonction g une application d'un ensemble X à valeurs dans \mathbb{K} , alors l'intégrale $\int_X |g(t)|dt$ existe toujours dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec

$$\int_X |g(t)|dt = \begin{cases} < +\infty, & \text{si } g \text{ est intégrable,} \\ = +\infty, & \text{si } g \text{ n'est pas intégrable.} \end{cases} \quad (5.5)$$

REMARQUE 5.6.

(1) Il est important de vérifier que l'ensemble \mathcal{A} défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ p \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-pt} |f(t)| \text{ converge.} \right\},$$

est soit vide, soit égal à \mathbb{R} soit du type $(a, +\infty[$ (c'est à dire $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$).

(a) En effet, notons que si p appartient à \mathcal{A} alors tout réel $q > p$ appartient à \mathcal{A} . En effet, on a

$$e^{-qt} |g(t)| = e^{-(q-p)t} e^{-pt} |g(t)|,$$

et, puisque $q - p > 0$

$$\leq e^{-pt} |g(t)|$$

et on conclue en utilisant (5.4).

(b) On a donc l'un des deux cas suivants :

- \mathcal{A} est vide ;
- \mathcal{A} est non vide ; dans ce cas, cette partie admet une borne inférieure $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
 - Si $\alpha = -\infty$, alors d'après le point 1a, \mathcal{A} est égal à \mathbb{R} .
 - Si $\alpha > -\infty$, alors d'après le point 1a, \mathcal{A} est égal à $(\alpha, +\infty[$.

(2) Notons que l'on aussi

$$\widehat{f} \text{ est définie sur le demi plan ouvert } \operatorname{Re}(p) > \alpha. \quad (5.6)$$

et donc que

$$\text{s'il existe } p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \widehat{f}(p) \text{ est défini alors } \operatorname{Re}(p) > \alpha. \quad (5.7)$$

Cela provient du lemme suivant :

LEMME 5.7. Pour tout $p \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt \text{ existe ssi } \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(p)t} g(t)dt \text{ existe.} \quad (5.8)$$

DÉMONSTRATION. Cela est immédiat en fonction de (5.5) puisque l'intégrabilité de la fonction $e^{-pt}g(t)$ et celle de la fonction $e^{-\operatorname{Re}(p)t}g(t)$ sont équivalentes puisqu'elles ont même module. En effet, si on pose, pour tout $p \in \mathbb{C}$, $p = a + ib$, on a alors

$$\begin{aligned} |e^{-pt}g(t)| &= |e^{-pt}| |g(t)|, \\ &= |e^{-(a+ib)t}| |g(t)|, \\ &= |e^{-at}| |e^{-ibt}| |g(t)|, \\ &= |e^{-at}| |g(t)|, \\ &= |e^{-at}g(t)|. \end{aligned}$$

□

DÉFINITION 5.8 (fonction d'ordre exponentiel). Si f est une application. Elle est dite d'ordre exponentiel lorsque qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ et $(M, T) \in (\mathbb{R}_+)^2$, tels que

$$\forall t \geq T, \quad |f(t)| \leq Me^{\sigma t}. \quad (5.9)$$

EXEMPLE 5.9. Les applications $t \mapsto t^n$, pour n réel ou $t \mapsto e^{3t}$ sont d'ordre exponentiel, tandis que $t \mapsto e^{t^2}$ ne l'est pas (à vérifier en exercice).

PROPOSITION 5.10. Si f est une application d'ordre exponentiel (avec σ défini par (5.9)), alors son indice de sommabilité α vérifie

$$\alpha \leq \sigma. \quad (5.10)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que pour tout $\beta > \sigma$, $e^{-\beta t}|f(t)|$ est intégrable, ce qui est immédiat car on a (pour t assez grand)

$$e^{-\beta}|f(t)| \leq Me^{-\beta}e^{\sigma t} = Me^{-(\beta-\sigma)t}$$

intégrable puisque $\beta - \sigma > 0$. □

REMARQUE 5.11. Attention, il est souvent écrit, comme dans [Esc22, chapitre 1 : Transformée de Laplace] que $\alpha = \sigma$, ce qui me semble faux *a priori*. En outre, on peut exhiber des applications qui ne sont pas d'ordre exponentiel (donc pour laquelle σ n'est même pas défini) et qui néanmoins ont un indice de sommabilité. Voir l'exercice de TD 5.4.

EXEMPLE 5.12. Pour chacune des fonctions f données, déterminons leur indice de sommabilité (sans passer par la notion d'ordre exponentiel) ainsi que leur transformée de Laplace.

(1)

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

H est appelée fonction de Heaviside. On a

$$\alpha = 0, \quad (5.12a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{H}(p) = \frac{1}{p}. \quad (5.12b)$$

(2)

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

On a

$$\alpha = 0, \quad (5.14a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{f}(p) = \frac{1}{p^2}. \quad (5.14b)$$

(3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$g(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

On a

$$\alpha = \beta, \quad (5.16a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \beta, \quad \widehat{g}(p) = \frac{1}{p - \beta}. \quad (5.16b)$$

Voir les calculs dans <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/point03.pdf>.

EXEMPLE 5.13. Pour chacune des fonctions f données, déterminons leur indice de sommabilité (sans passer par la notion d'ordre exponentiel) ainsi que leur transformée de Laplace. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

(1)

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \cos(\omega t). \quad (5.17)$$

On a

$$\alpha = 0, \quad (5.18a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{f}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (5.18b)$$

Voir point 2.

(2)

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \sin(\omega t). \quad (5.19)$$

On a

$$\alpha = 0, \quad (5.20a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{f}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (5.20b)$$

Pour ce point-là et le point 1, il suffit de calculer pour tout p réel (tant que l'expression suivante a un sens) : en considérant f définie par (5.11) et en notant $A = p - i\omega$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-At} dt = \widehat{f}(A).$$

D'après (5.12a), cette expression est valable dès que $\operatorname{Re}(A) = p > 0$ et elle vaut d'après (5.12b), $1/A$. Bref, dès que $p > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt &= \frac{1}{p - i\omega}, \\ &= \frac{p + i\omega}{p^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

et on conclue en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de $\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt$ qui valent respectivement $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin(\omega t) dt$.

(3)

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \cosh(\omega t). \quad (5.21)$$

On a

$$\alpha = 0, \quad (5.22a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (5.22b)$$

Calcul laissé à la sagacité du lecteur en procédant come dans les points 1 et 2.

(4)

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \sinh(\omega t). \quad (5.23)$$

On a

$$\alpha = 0, \quad (5.24a)$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \widehat{f}(p) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}. \quad (5.24b)$$

Calcul laissé à la sagacité du lecteur en procédant come dans les points 1 et 2.

5.2.2. Propriétés élémentaires

On a différentes propriétés qui permettent de calculer des transformées de Laplace, en se ramenant à des transformées connues.

PROPOSITION 5.14 (linéarité). *La transformations de Laplace est linéaire (c'est-à-dire, pour tout a, b, g, f , $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$.*

DÉMONSTRATION. Élémentaire. □

PROPOSITION 5.15 (1^{er} théorème du déplacement). *Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et f dont l'indice de sommabilité vaut α . L'indice de sommabilité de $g : p \mapsto g(t) = e^{-\beta t} f(t)$ vaut $\alpha - \beta$ et on a*

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \alpha - \beta, \quad \widehat{g}(p) = \widehat{f}(p + \beta). \quad (5.25)$$

DÉMONSTRATION. Voir <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/point10.pdf>. □

PROPOSITION 5.16 (2nd théorème du déplacement). *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et f dont l'indice de sommabilité vaut α . L'indice de sommabilité de $g : p \mapsto g(t) = f(t - t_0)H(t - t_0)$ (ou H est définie par (5.11)) vaut α et on a*

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \alpha, \quad \widehat{g}(p) = e^{-t_0 p} \widehat{f}(p). \quad (5.26)$$

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur. □

PROPOSITION 5.17 (théorème de la dilatation). *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et f dont l'indice de sommabilité vaut α . L'indice de sommabilité de $g : p \mapsto g(t) = f(\lambda t)$ vaut $\lambda\alpha$ et on a*

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \lambda\alpha, \quad \widehat{g}(p) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (5.27)$$

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur. □

EXEMPLE 5.18. Voir les exercices de TD 5.1 et 5.2.

5.3. Tables de transformées de Laplace

Voir l'annexe F page 102.

5.4. Transformées de Laplace des dérivées et des primitives et applications

5.4.1. Transformées de Laplace des dérivées et des primitives

THÉORÈME 5.19 (Transformée d'une dérivée). *Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en $t = 0$ où $\lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} f(t) = f(0^+)$ existe. On suppose en outre en outre que f' est une fonction continue par morceaux qui admet une transformée de Laplace, alors, en notant α et α' les indices de sommabilité de f et f' , on a*

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \max(\alpha, \alpha'), \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+). \quad (5.28)$$

DÉMONSTRATION. Voir <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/point20.pdf>. \square

THÉORÈME 5.20 (Transformée d'une primitive). *Soit $g(t) = \int_0^t f(u)du$ la primitive de f qui s'annule en 0, alors, en notant α l'indice de sommabilité de f , on a*

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(p) > \max(\alpha, 0), \quad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}. \quad (5.29)$$

DÉMONSTRATION. Voir <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/point21.pdf>. \square

5.4.2. Application à la résolution d'équations différentielles

5.4.2.1. Ordre 1.

Voir http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MPISIR/complementscannes/resol_edo_cos.pdf.

EXEMPLE 5.21. Voir l'exercice de TD 5.3.

5.4.2.2. Ordre 2.

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

où a , b , et c sont des constantes, et $f(t)$ est une fonction donnée. Les conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$ doivent être connues.

- (1) Appliquer la transformée de Laplace

La transformée de Laplace des dérivées est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'(t)] &= sY(s) - y(0), \\ \mathcal{L}[y''(t)] &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \end{aligned}$$

où $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

En appliquant la transformée de Laplace à tous les termes de l'équation différentielle, on obtient :

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

- (2) Isoler $Y(s)$

Réorganisons l'équation pour isoler $Y(s)$:

$$Y(s)(as^2 + bs + c) = \mathcal{L}[f(t)] + a(sy(0) + y'(0)) + by(0).$$

Ainsi :

$$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)] + a(sy(0) + y'(0)) + by(0)}{as^2 + bs + c}.$$

- (3) Décomposer en éléments simples

Si le dénominateur $as^2 + bs + c$ est factorisable, on peut le décomposer en facteurs linéaires ou quadratiques. Par exemple :

- Si $as^2 + bs + c = (s - p_1)(s - p_2)$ (racines réelles distinctes), on décompose $Y(s)$ en éléments simples.
- Si $as^2 + bs + c = (s - p)^2$ (racine double), ou si les racines sont complexes, une méthode similaire est appliquée.

(4) Appliquer la transformée inverse de Laplace

Utilisez une table de transformées de Laplace inverses pour revenir dans le domaine temporel et obtenir $y(t)$.

EXEMPLE 5.22. Résolvons l'équation suivante :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(1) Appliquer la transformée de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''(t)] + 3\mathcal{L}[y'(t)] + 2\mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[e^{-t}], \\ (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

(2) Simplifier

En remplaçant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - (s + 3) = \frac{1}{s+1}.$$

(3) Isoler $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + (s + 3)}{s^2 + 3s + 2}.$$

(4) Décomposition en éléments simples.

Le dénominateur $s^2 + 3s + 2$ se factorise :

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2).$$

et donc

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + (s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}.$$

Regroupons les termes au numérateur :

$$\begin{aligned} \text{Numérateur} &= 1 + (s + 1)(s + 3) \\ &= 1 + s^2 + 3s + s + 3 \\ &= s^2 + 4s + 4. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{(s + 1)(s + 2)}.$$

Factorisons le numérateur $s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2$:

$$Y(s) = \frac{(s + 2)^2}{(s + 1)(s + 2)}.$$

Simplifions :

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s + 1}. \tag{5.30}$$

(5) Transformée inverse de Laplace

Réécrivons $Y(s)$:

$$Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1}.$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace :

$$- \mathcal{L}^{-1}[1] = 1,$$

$$- \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t},$$

nous obtenons :

$$y(t) = 1 + e^{-t}. \quad (5.31)$$

(6) Conclusion

La solution de l'équation différentielle est :

$$\boxed{y(t) = 1 + e^{-t}.}$$

Chapitre 6

Transformées de Fourier

Ce chapitre est issu (et adapté) de [Esc22, chapitre 3 : Série et transformée de Fourier].

Rédaction partielle, un certain nombre de passages sont manuscrits et fournis sur internet, à l'adresse habituelle.

En cours de rédaction

Quatrième partie

Annexes

Quelques développements limités usuels

n est un entier naturel et tous ces développements limités sont en zéro.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Annexe B

Quelques dérivées usuelles

| fonction | dérivée |
|-------------|-------------------------------|
| x^α | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| \sqrt{x} | $1/(2\sqrt{x})$ |
| $\ln x$ | $1/x$ |
| $\ln u $ | u'/u |
| e^x | e^x |
| a^x | $\ln a a^x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\tan x$ | $1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$ |
| $\tanh x$ | $1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$ |
| $\arctan x$ | $1/(1+x^2)$ |
| $\arccos x$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\arcsin x$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Différents calculs de l'exemple 3.22 page 46 du cours

- (1) Si on utilise la méthode de la section 3.2.2.1, l'équation de la droite est donnée par

$$y = \alpha x + \beta$$

où, d'après l'équation (3.18)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_A & x_B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix}.$$

On a aisément

$$\begin{pmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B & -1 \\ -x_A & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B & -1 \\ -x_A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B y_A - x_A y_B \\ y_B - y_A \end{pmatrix},$$

et donc l'équation de la droite est

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}, \quad (\text{C.1})$$

ce qui est bien l'équation (3.9) équivalente à l'équation (3.10).

- (2) Si on utilise la méthode de la section 3.2.2.2, on utilise l'expression des polynômes de Lagranges l_0 et l_1 donnés par les équations (3.25b) et (3.25c), puis l'équation (3.27) qui donne

$$y = y_A l_0(x) + y_B l_1(x)$$

ce qui donne encore

$$y = y_A \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + y_B \frac{x - x_A}{x_B - x_A},$$

ce qui bien équivalent à l'équation (C.1) et donc à l'équation (3.10).

- (3) Enfin, si on utilise la méthode de la section 3.2.2.3, d'après les calculs de l'exemple 3.17, on a

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A), \quad (\text{C.2})$$

ce qui bien équivalent à l'équation (3.10).

- (4) Lors d'un examen, une méthode originale a été proposée par Monsieur Mehdi Rosine à l'automne 2023 : Il s'agit de remarquer que la droite en question passe par le point $(x_A, f(x_A))$ et a pour coefficient directeur le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (qui n'est autre que la différence divisée $f[x_A, x_B] = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$). Si $y = g(x)$ désigne l'équation de la droite, on a donc

$$\begin{aligned} g(x_A) &= y_A, \\ g'(x_A) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \end{aligned}$$

et la formule de Taylor appliquée à g donne, entre x et x_A , puisque $g'' = 0$:

$$\begin{aligned}y &= g(x), \\ &= g(x_A) + g'(x_A)(x - x_A) + \frac{1}{2}g''(\xi)(x - x_A), \\ &= y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A),\end{aligned}$$

et on retrouve donc bien l'équation (3.10).

REMARQUE C.1. C'est exactement l'idée de l'interpolation de Hermite! Voir le début de [DB22, la section 2.7 page 40].

Étude théorique d'un problème de moindres carrés

D.1. Rappels sur la régression linéaire

Les coordonnées $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant connues (de façon expérimentale ou par mesure), on cherche donc à résoudre le problème suivant :

$$\text{trouver } (a, b) \text{ qui minimise } S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2. \quad (\text{D.1})$$

La quantité S est appelé l'écart entre les données et la droite d'équation $Y = aX + b$. Ce problème s'écrit aussi : trouver le couple (a_0, b_0) tel que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{i=1}^n (a_0 x_i + b_0 - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \quad (\text{D.2})$$

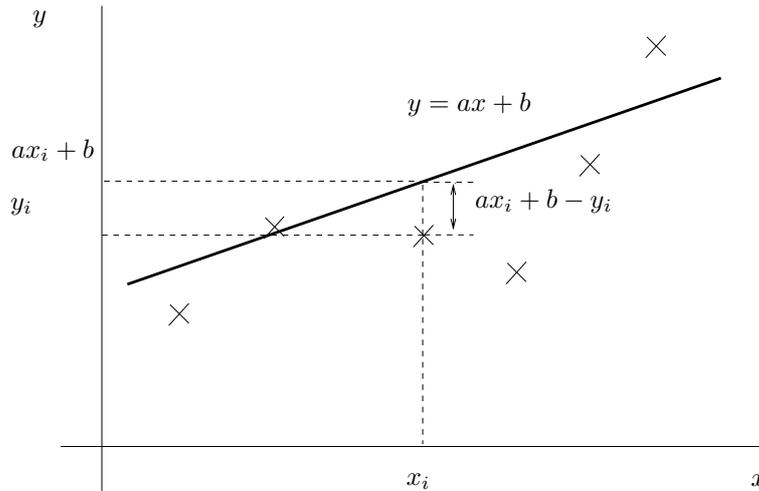


FIGURE D.1. le principe de la droite de régression linéaire

Voir la figure D.1.

On peut expliciter les coefficients a_0 et b_0 en fonction de $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$; voir par exemple les rubriques "régression linéaire" et "Ajustement affine" de Wikipédia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_linéaire et https://fr.wikipedia.org/wiki/Ajustement_affine).

Voir par exemple la figure D.2 page suivante, où sont tracés les points expérimentaux $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, deux droites différentes correspondant à deux couples (a, b) avec les écart associés et la "meilleure droite". Sur cette figure,

- les points de coordonnées $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont représentés par des carrés noirs;
- les points de coordonnées $(x_i, ax_i + b)_{1 \leq i \leq n}$ sont représentés par des ronds bleu;
- deux droites sont tracées en noir et la "meilleure" en rouge. Cette droite a une pente a positive.

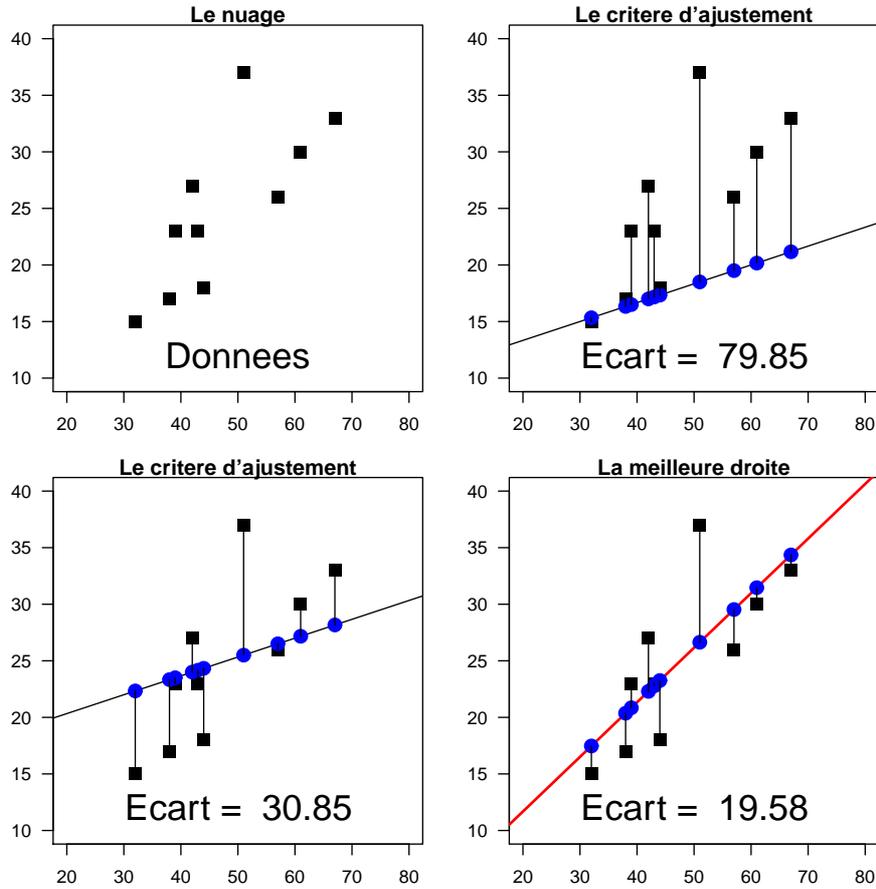


FIGURE D.2. la droite de régression linéaire

Cette figure, faite sous R, est extraite de [Bas12, chapitre 4].

D.2. Rappels sur la norme Euclidienne et le produit scalaire associé

On rappelle que $\|\cdot\|_2$ définit la norme Euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^p :

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p x_k^2} = \sqrt{{}^t x x}, \quad (\text{D.3})$$

où ${}^t C$ désigne la matrice transposée de la matrice C . Cette norme est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, \quad \langle x, y \rangle = {}^t x y. \quad (\text{D.4})$$

Pour un rappel sur les normes, on pourra consulter l'annexe A de [BM03] ou [Sch01].

D.3. Théorie

Pour plus d'information sur les systèmes au sens des moindres carrés, on pourra consulter [Cia82].

De façon plus générale, on se donne $n \geq p$ deux entiers non nuls, b un vecteur de \mathbb{R}^n , $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on cherche à trouver le vecteur X qui vérifie le système sur-déterminé $AX = b$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j = b_i, \quad (\text{D.5})$$

mais au sens des moindres carrés : on veut trouver X tel que la quantité

$$\sum_{j=i}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j - b_j \right)^2 \quad (\text{D.6})$$

soit minimale. Par exemple, le cas de la section D.1, correspond à

$$p = 2, \quad (\text{D.7a})$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{i,1} = 1, \quad a_{i,2} = x_i. \quad (\text{D.7b})$$

La section D.1 traite le cas particulier de la régression linéaire (c'est-à-dire, trouver la droite qui passe le plus proche d'un nuage de points donnés), avec (D.7).

De façon plus générale, on cherche donc à résoudre

$$\|Ax_0 - b\|_2^2 = \inf_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - b\|_2^2, \quad (\text{D.8})$$

où $n \geq p$ sont deux entiers non nuls, A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, b est un vecteur donné de \mathbb{R}^n et x_0 est l'inconnue dans \mathbb{R}^p . Voir la section D.2 pour les rappels sur la norme $\|\cdot\|_2$. On écrit parfois que l'on résout le système «rectangulaire»

$$Ax = b, \quad (\text{D.9})$$

au sens des moindres carrés. En effet, on a

$$Ax \approx b, \quad (\text{D.10})$$

et c'est l'écart entre Ax et b que l'on cherche à minimiser.

LEMME D.1. *Si la matrice A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p , alors tAA est inversible.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$,

$${}^tAAx = 0 \implies x = 0.$$

Si le vecteur de \mathbb{R}^p , tAAx est nul alors ${}^t x {}^tAAx$ est nul et donc, par définition

$$\|Ax\|_2^2 = {}^t(Ax)(Ax) = {}^t x {}^tAAx = 0,$$

et donc $Ax = 0$. Ainsi x appartient au noyau de A . D'après la relation rang-noyau, on a $\dim(\text{Ker}A) = p - \text{rg}(A) = 0$, par hypothèse. Ainsi, le noyau de A est réduit à $\{0\}$ et x est donc nul. \square

REMARQUE D.2. Si les x_i ont au moins deux valeurs différentes, alors la matrice A donnée par (D.7), c'est-à-dire le cas de la section D.1, est de rang 2. En effet, on peut extraire de A , une sous-matrice de type

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{pmatrix}$$

avec $x_i \neq x_j$ et l'on sait que cette matrice est inversible (voir par exemple [DB22, Chapitre "Interpolation", section "Calcul direct (Matrice de Vandermonde)"]).

On peut donc déduire du lemme D.1 le résultat suivant :

PROPOSITION D.3. *On suppose que la matrice A est de rang p . On note x_0 défini par*

$$x_0 = ({}^tAA)^{-1} ({}^tAb). \quad (\text{D.11})$$

La solution de (D.8) est unique et est égale à x_0 .

DÉMONSTRATION. Voir [Cia82].

□

Définition et utilisation de la fonction W de Lambert

On pourra consulter par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_W_de_Lambert

E.1. Définition de la fonction W de Lambert

On cherche à résoudre l'équation suivante : pour $z \in \mathbb{R}$ donné, on cherche $w \in \mathbb{R}$ tel que

$$we^w = z. \quad (\text{E.1})$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION E.1 (les deux branches W_0 et W_{-1} de la "fonction" de Lambert).

- Si $z < -\frac{1}{e}$, il n'existe aucun $w \in \mathbb{R}$ solution de (E.1) ;
- Il existe une unique fonction W_0 de $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$ telle que (E.1) est équivalent à $w = W_0(z)$;
- Il existe une unique fonction W_{-1} de $[-\frac{1}{e}, 0[$ dans $]-\infty, -1]$ telle que (E.1) est équivalent à $w = W_{-1}(z)$.

Cela est équivalent à dire : Pour tout $z \in \mathbb{R}$:

- Si $z < -\frac{1}{e}$, l'équation (E.1) n'a pas de solution ;
- Si $z = -\frac{1}{e}$, la seule solution de (E.1) est donnée par

$$w = W_{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) = W_0\left(-\frac{1}{e}\right) = -1; \quad (\text{E.2})$$

- Si $z \in]-\frac{1}{e}, 0[$, les deux solutions distinctes de (E.1) sont données par

$$w = W_{-1}(z), \quad (\text{E.3a})$$

$$w = W_0(z); \quad (\text{E.3b})$$

- Si $z \in [0, +\infty[$, l'unique solution de (E.1) est donnée par

$$w = W_0(z). \quad (\text{E.4})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f(w) = we^w, \quad (\text{E.5})$$

dont la dérivée est donné par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f'(w) = (1+w)e^w, \quad (\text{E.6})$$

strictement positive sur $] -1, +\infty[$ et strictement négative sur $]-\infty, -1[$. On en déduit le tableau de variation de f , que l'on complète grâce à

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow -\infty} f(w) &= 0, \\ \lim_{w \rightarrow +\infty} f(w) &= +\infty, \\ f(-1) &= -\frac{1}{e}, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

| | | | | |
|-------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | $+\infty$ |
| signe de $v'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| variations de v | 0 | $-\frac{1}{e}$ | 0 | $+\infty$ |

TABLE E.1. Tableau de variation de f

Voir le tableau E.1 et les figure 1(a) et 1(b).

Compte tenu du tableau E.1, on constate que

- l'image de \mathbb{R} par f est égale à $[-1/e, +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et définit donc une bijection de $] -\infty, -1]$ sur $f(] -\infty, -1]) = [-1/e, 0[$;
- f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et définit donc une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[) = [-1/e, +\infty[$.

Voir les figures 1(c) et 1(d). On peut donc conclure à partir de ces éléments. \square

E.2. Utilisation de la fonction W de Lambert : résolution de l'équation $ae^x + bx + c = 0$

LEMME E.2. Soient a, b et c trois réels, a et b étant non nuls. On pose

$$\Delta = \frac{a}{b} e^{-\frac{c}{b}}. \quad (\text{E.7})$$

L'équation

$$ae^x + bx + c = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{E.8})$$

admet

- aucune solution si $\Delta < -\frac{1}{e}$;
- une unique solution x si $\Delta = -\frac{1}{e}$, donnée par

$$x = -\frac{c}{b} + 1, \quad (\text{E.9})$$

- deux solutions deux à deux distinctes x_0 et x_{-1} si Δ appartient à $] -\frac{1}{e}, 0[$, données par

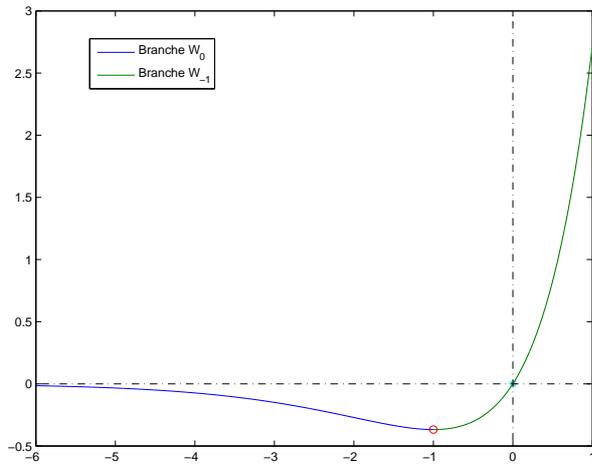
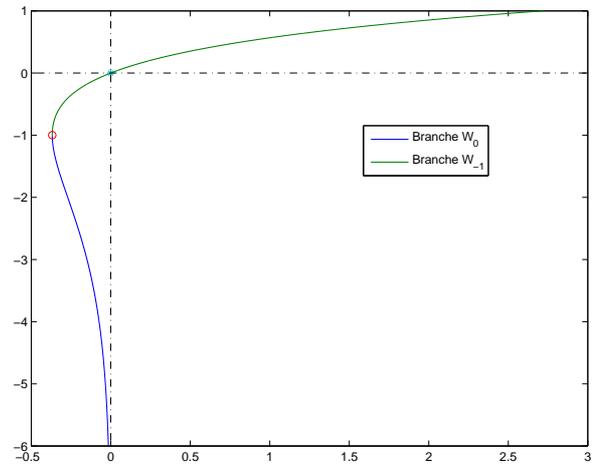
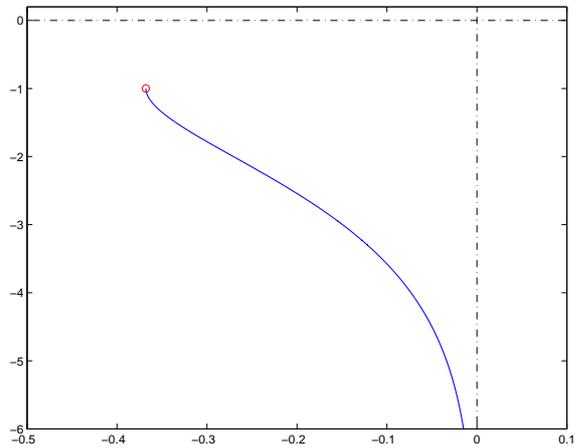
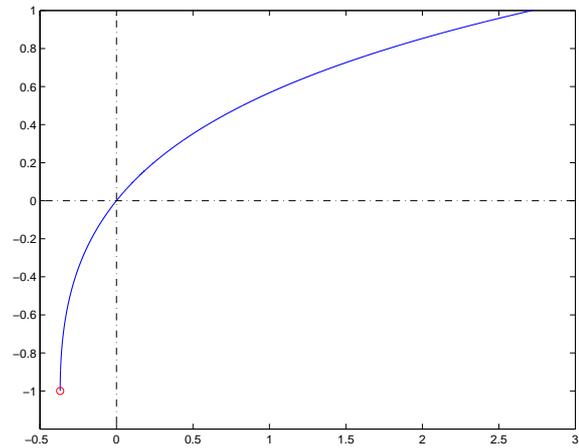
$$x_k = -\frac{c}{b} - W_k(\Delta), \quad \forall k \in \{0, -1\}, \quad (\text{E.10})$$

- une unique solution x si Δ appartient à $[0, +\infty[$, donnée par

$$x = -\frac{c}{b} - W_0(\Delta). \quad (\text{E.11})$$

DÉMONSTRATION. L'équation (E.8) est successivement équivalente à (puisque a et b sont non nuls)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} e^x = -x - \frac{c}{b} &\iff \left(-x - \frac{c}{b}\right) \frac{b}{a} e^{-x} = -1, \\ &\iff \left(-x - \frac{c}{b}\right) e^{-x} e^{-\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} e^{-\frac{c}{b}}, \end{aligned}$$

(a) La fonction f et les deux branches W_0 (en vert) et W_{-1} (en bleu).(b) La fonction f^{-1} et les deux branches W_0 (en vert) et W_{-1} (en bleu).(c) la branche W_{-1} .(d) la branche W_0 .FIGURE E.1. La fonction f et les deux branches W_0 et W_{-1} .

cela est équivalent, en posant

$$X = -x - \frac{c}{b},$$

$$\Delta = \frac{a}{b} e^{-\frac{c}{b}},$$

à

$$Xe^X = \Delta. \quad (\text{E.12})$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les résultats de la proposition E.1, qui donne X en fonction de $W_k(\Delta)$ et donc x de la forme (selon les valeurs de Δ) :

$$x = -\frac{c}{b} - W_k(\Delta).$$

□

E.3. Utilisation de la fonction W de Lambert : résolution de l'équation $x^x = z$

On cherche à résoudre l'équation suivante : pour $z \in \mathbb{R}$ donné, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^x = z. \quad (\text{E.13})$$

Si x existe, on a nécessairement

$$z > 0. \quad (\text{E.14})$$

L'équation (E.13) est équivalente à

$$e^{x \ln x} = z,$$

soit encore

$$x \ln x = \ln z,$$

et donc

$$\ln x e^{\ln x} = \ln z,$$

et donc encore

$$X e^X = \ln z. \quad (\text{E.15})$$

où

$$X = \ln x. \quad (\text{E.16})$$

D'après la section E.1, cette équation a une solution supérieur à -1 unique, si $\ln(z) \geq -1/e$ et donc si

$$z \geq e^{-\frac{1}{e}}. \quad (\text{E.17})$$

Cette solution est donnée par

$$X = W(\ln z),$$

et, d'après (E.16)

$$x = e^{W(\ln z)},$$

et d'après l'équation (E.1), on a finalement

$$x = \frac{\ln z}{W(\ln z)} \geq \frac{1}{e}. \quad (\text{E.18})$$

Annexe F

Quelques transformées de Laplace

Dans ce tableau, β est un réel, ω est un réel strictement positif.

| fonction (causale) | transformée de Laplace | abscisse de sommabilité |
|--------------------------------|---|-------------------------|
| β | $\frac{\beta}{p}$ | 0 |
| t^n ($n \in \mathbb{N}^*$) | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | 0 |
| $e^{\beta t}$ | $\frac{1}{p - \beta}$ | β |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ | 0 |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ | 0 |
| $e^{-\beta t} \cos(\omega t)$ | $\frac{p + \beta}{(p + \beta)^2 + \omega^2}$ | $-\beta$ |
| $e^{-\beta t} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2}$ | $-\beta$ |
| $\ln(t)$ | $-\frac{1}{s}(\ln(p) + \gamma)$ ($\gamma = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860$ est la constante d'Euler) | 0 |

Bibliographie

- [Bas11] J. BASTIEN. *Mathématiques : Applications*. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31. 2011. 158 pages.
- [Bas12] J. BASTIEN. *Introduction à la statistique descriptive*. Notes de cours de statistiques du M1 APA de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique M1 APA. 2012. 127 pages.
- [Bas18] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 93 pages.
- [Bas22] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.
- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^e étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [CB81] D. CONTE et C. de BOOR. *Elementary numerical analysis. An algorithmic approach*. Mc Graw-Hill, 1981.
- [Cia82] P. G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Paris : Masson, 1982, pages xii+279.
- [CM84] M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.
- [DB22] N. DÉBIT et J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 326 pages.
- [Esc22] X. ESCRIVA. "Cours de mathématiques". 2022.
- [Gly11] J. GLYN. *Advanced Modern Engineering Mathematics*. 4^e édition. disponible sur https://sv.20file.org/up1/692_0.pdf. Pearsprn, 2011.
- [LT93] P. LASCAUX et R. THÉODOR. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1*. Second. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 518.2 LAS, niveau Capes/Agreg). Masson, Paris, 1993, pages xxiv+327.
- [Sch01] M. SCHATZMANN. *Analyse numérique, une approche mathématique, Cours et exercices*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.07 SCH, 4^e étage). Dunod, 2001.
- [Vél03] J. VÉLU. *Mathématiques générales : cours et exercices corrigés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 VEL, 4^e étage). Paris : Dunod, 2003.