MQ41 Automne 2002

Corrigé de l'examen médian du 14 Novembre 2002

Correction de l'exercice 1. On renvoie au polycopié de cours.

Correction de l'exercice 2.

1°) Cette structure est plane, possède trois liaisons (un encastrement) et est donc isostatique.

2°) Comme d'habitude, on oriente la poutre en s'éloignant de l'appui, c'est-à-dire de A vers C. Après calculs, il vient (pour chaque travée, l'origine est prise à l'origine de cette travée) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sur } CB,\ (0 \leq x \leq \sqrt{2}l) & N = F, \\ & T = 0, \\ & M = \Gamma, \\ & \\ \text{sur } BA,\ (0 \leq x \leq l) & N = \frac{\sqrt{2}}{2}F, \\ & T = -\frac{\sqrt{2}}{2}F, \\ & M = \Gamma - \frac{\sqrt{2}}{2}F(l-x). \end{array}}$$

3°) Ainsi, en utilisant

$$W = \frac{1}{EI}\int_{\text{structure}} M^2 dx,$$

il vient, après calculs,

$$W = \frac{l}{2EI}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\Gamma^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}F\Gamma l + \frac{F^2 l^2}{6}\right). \tag{1}$$

4°) Le déplacement λ du point C dans la direction de F et la rotation ω de la section liée au point C. correspondent aux déplacement généralisés du point C respectivement associé à F et à Γ, c'est-à-dire, d'après le théorème de Castigliano,

$$\lambda = \frac{\partial W}{\partial F},$$
$$\omega = \frac{\partial W}{\partial \Gamma},$$

et, après calculs, il vient,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = \frac{l^2}{12EI}\left(2Fl - 3\sqrt{2}\Gamma\right), \\ \\ \omega = \frac{l}{4EI}\left(4\left(\sqrt{2}+1\right)\Gamma - \sqrt{2}Fl\right). \end{array}}$$

Correction de l'exercice 3.

1°)

a) C'est un résultat classique, que l'on peut montrer en se plaçant dans le repère cartésien (x, y) :

$$\begin{aligned}
\frac{du_r(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\, x + \sin\theta\, y\right), \\
&= \frac{d\cos\theta}{d\theta} x + \frac{d\sin\theta}{d\theta} y, \\
&= -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \\
&= u_\theta(\theta)\ ;
\end{aligned}$$

de même, on a

$$\frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} = -u_r(\theta).$$

b) D'après le principe d'action et de réaction, la partie en amont de la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, exerce sur cette section de poutre les efforts respectifs

$$\begin{aligned}
&-T(\theta)u_r(\theta), \\
&-N(\theta)u_\theta(\theta).
\end{aligned}$$

La partie en aval de cette section de poutre exerce sur cette section de poutre les efforts respectifs

$$\begin{aligned}
&T(\theta + d\theta)u_r(\theta + d\theta) \\
&N(\theta + d\theta)u_\theta(\theta + d\theta).
\end{aligned}$$

La seule force extérieure agissant sur cette portion de poutre (puisqu'il n'y a pas de forces ponctuelles) est la densité radiale $p(\theta)$, par définition égale à

$$p(\theta)u_r(\theta) \times dl,$$

où dl est la longueur de la section de poutre, c'est-à-dire $Rd\theta$. Ainsi, l'équilibre fournit l'équation

$$\begin{aligned}
&\Big(-T(\theta)u_r(\theta) + T(\theta + d\theta)u_r(\theta + d\theta)\Big) \\
&\qquad + \Big(-N(\theta)u_\theta(\theta) + N(\theta + d\theta)u_\theta(\theta + d\theta)\Big) + Rd\theta p(\theta)u_r(\theta) = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

c) On a, au premier ordre près en $d\theta$,

$$\begin{aligned}
T(\theta + d\theta) &= T(\theta) + \frac{dT}{d\theta} d\theta, \\
N(\theta + d\theta) &= N(\theta) + \frac{dN}{d\theta} d\theta, \\
u_r(\theta + d\theta) &= u_r(\theta) + \frac{du_r(\theta)}{d\theta} d\theta, \\
u_\theta(\theta + d\theta) &= u_\theta(\theta) + \frac{du_\theta}{d\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

D'après les calculs précédents, les deux dernières équations sont équivalentes à

$$\begin{aligned}
u_r(\theta + d\theta) &= u_r(\theta) + u_\theta(\theta)d\theta, \\
u_\theta(\theta + d\theta) &= u_\theta(\theta) - u_r(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi, en réinjectant ces expressions dans (2), on obtient

$$\begin{aligned}
&-T(\theta)u_r(\theta)+\left(T(\theta)+\frac{dT}{d\theta}d\theta\right)\left(u_r(\theta)+u_\theta(\theta)d\theta\right)\\
&\qquad -N(\theta)u_\theta(\theta)+\left(N(\theta)+\frac{dN}{d\theta}d\theta\right)\left(u_\theta(\theta)-u_r(\theta)d\theta\right)+Rd\theta p(\theta)u_r(\theta)=0\ ;
\end{aligned}$$

en ne conservant que les termes du premier ordre, on a

$$T(\theta)u_\theta(\theta)d\theta+\frac{dT}{d\theta}d\theta u_r(\theta)-N(\theta)u_r(\theta)d\theta+\frac{dN}{d\theta}d\theta u_\theta(\theta)+Rd\theta p(\theta)u_r(\theta)=0,$$

soit

$$T(\theta)u_\theta(\theta)+\frac{dT}{d\theta}u_r(\theta)-N(\theta)u_r(\theta)+\frac{dN}{d\theta}u_\theta(\theta)+Rp(\theta)u_r(\theta)=0,$$

ce qui donne, en projetant sur u_r et sur u_θ :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{dT}{d\theta}-N(\theta)+Rp(\theta)=0,\\[1ex]&T(\theta)+\frac{dN}{d\theta}=0.\end{aligned}}\tag{3}$$

Faisons le bilan des couples exercés sur la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta+d\theta)$ et calculés par rapport au point $P(\theta+d\theta)$:

$$\overrightarrow{P(\theta+d\theta)P(\theta)}\wedge\Big(-T(\theta)u_r(\theta)-N(\theta)u_\theta(\theta)\Big)+\Big(M(\theta+d\theta)-M(\theta)\Big)z+d\mathcal{Q}(\theta)=0,$$

où $d\mathcal{Q}(\theta)$ désigne le moment élémentaire de la densité linéaire de force $p(\theta)$, nécessairement d'ordre deux en $d\theta$, puisque le bras de levier est proportionnel à $d\theta$ et la force élémentaire est aussi proportionnelle à $d\theta$. On peut donc négliger d'emblée ce terme et on obtient donc

$$\overrightarrow{P(\theta+d\theta)P(\theta)}\wedge\Big(-T(\theta)u_r(\theta)-N(\theta)u_\theta(\theta)\Big)+\Big(M(\theta+d\theta)-M(\theta)\Big)z=0.\tag{4}$$

Au premier ordre en $d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P(\theta)P(\theta+d\theta)}&=\overrightarrow{OP(\theta+d\theta)}-\overrightarrow{OP(\theta)}\\
&=d\theta\,\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{OP(\theta)},\\
&=d\theta\,\frac{d}{d\theta}Ru_r(\theta),\\
&=d\theta\,R\frac{d}{d\theta}u_r(\theta),\\
&=d\theta\,Ru_\theta(\theta),
\end{aligned}$$

et

$$M(\theta+d\theta)-M(\theta)=d\theta\,\frac{dM}{d\theta}.$$

Ainsi, selon (4),

$$d\theta\left(Ru_\theta(\theta)\wedge\Big(T(\theta)u_r(\theta)+N(\theta)u_\theta(\theta)\Big)+\frac{dM}{d\theta}z\right)=0,$$

ce qui implique

$$RT(\theta)u_\theta(\theta) \wedge u_r(\theta) + \frac{dM}{d\theta}z = 0.$$

On a alors :

$$\boxed{\frac{dM}{d\theta} - RT(\theta) = 0.} \tag{5}$$

Remarque 1. Ces équations sont similaires à celles des poutres rectilignes, notamment $dM/dx = -T$. Le signe est opposé ; on rappelle en effet que l'effort tranchant est ici l'opposé de celui du cours alors que le moment fléchissant a le même signe.

d) L'avantage de ces équations est qu'il suffit d'un seul des trois efforts de la RDM, N, T ou M pour déterminer les deux autres par dérivation ou intégration.

2°)

a) La structure est invariante (appui, puisqu'il y en a pas ..., géométrie et chargement) par toute rotation autour de l'origine O ; il en est donc de même pour les efforts de la RDM, qui sont invariants par toute rotation autour de l'origine O et donc indépendants de θ ; ainsi écrit, pour tout θ :

$$\boxed{\begin{aligned} &N(\theta) = N_0, \\ &T(\theta) = T_0, \\ &M(\theta) = M_0. \end{aligned}} \tag{6}$$

b) Si l'on réinjecte (6) dans (3) et (5), on a, puisque toutes les dérivées sont nulles, pour tout $\theta \neq 0$ (puisqu'il n'y a pas de forces concentrées ailleurs qu'en A_- et A_+)

$$\begin{aligned} &-N_0 + Rp_0 = 0, \\ &T_0 = 0, \\ &RT_0 = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} &N_0 = pR, \\ &T_0 = 0. \end{aligned}} \tag{7}$$

L'effort normal N_0 est positif, ce qui correspond à un effort de traction, ce qui est physiquement acceptable (force centrifuge).

La valeur de M n'est pas déterminée, puisque la structure est hyperstatique de degré un (de façon interne) ; pour lever cette hyperstaticité, l'équilibre ne suffit plus et nous allons introduire une coupure interne.

Remarque 2. La nullité de T aurait pu être montrée par symétrie (comme dans le polycopié de cours, p. 18).

3°)

a) Par définition, $N(\theta)$ est l'action de la partie correspondant à $\phi \in [\theta, 2\pi]$ sur la section définie par θ ; c'est aussi l'opposé de la partie de la partie correspondant à $\phi \in [0, \theta]$ sur la section définie par θ. Cette partie est soumise à la densité linéaire de force (pour $\phi \in [0, \theta]$), à la force X et au couple Γ. Si $\phi \in [0, \theta]$, la portion de poutre comprise entre ϕ et $\phi + d\phi$ est soumise à la force élémentaire

$$d\overrightarrow{f}(\phi) = pRu_r(\phi)d\phi,$$

et donc la partie $\phi \in [0,\theta]$ exerce la force

$$\overrightarrow{F}(\theta) = \int_0^\theta pRu_r(\phi)d\phi.$$

Ainsi, selon la première question,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta) &= -pR\int_0^\phi \frac{du_\theta(\phi)}{d\phi}d\phi,\\ &= -pR[u_\theta(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\theta},\\ &= -pR\left(u_\theta(\theta) - u_\theta(0)\right),\\ &= -pR\left(u_\theta(\theta) - y\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on a, par projection sur u_θ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta).u_\theta &= -pR\left(u_\theta(\theta) - y\right).u_\theta,\\ &= pR\Big(-1 + y.u_\theta\Big),\\ &= pR\Big(-1 + y.(-\sin\theta x + \cos\theta y)\Big),\\ &= pR(-1+\cos\theta).\end{aligned}$$

Ainsi, en rajoutant réaction d'appui, de projection sur $u_\theta(\theta)$ $X\cos\theta$ et en prenant l'opposé, on a donc

$$\boxed{N(\theta) = pR(1-\cos\theta) - X\cos\theta.} \tag{8}$$

Remarque 3. Ici, on a intégré le vecteur $u_r(\phi)$; on pouvait aussi (mais c'est plus long et maladroit) repasser en base cartésienne (x, y) et écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\theta) &= \int_0^\theta pRu_r(\phi)d\phi,\\ &= pR\int_0^\theta \cos\phi x + \sin\phi y d\phi,\\ &= pR\Big(\sin\theta x + (1-\cos\theta)y\Big),\end{aligned}$$

que l'on projette sur $u_\theta(\theta) = -\sin\theta x + \cos\theta y$:

$$\overrightarrow{F}(\theta).u_\theta(\theta) = pR\Big(\sin\theta x + (1-\cos\theta)y\Big).(-\sin\theta x + \cos\theta y)$$

et on retrouve en développant et simplifiant l'expression donnée ci-dessus.

b) D'après (3) (deuxième équation), on a

$$\begin{aligned}T(\theta) &= -\frac{dN}{d\theta},\\ &= -\frac{d}{d\theta}\Big(pR(1-\cos\theta) - X\cos\theta\Big),\\ &= -pR\sin\theta - X\sin\theta.\end{aligned}$$

On en déduit donc, d'après (5),

$$\begin{aligned}\frac{dM}{d\theta} &= RT(\theta),\\ &= -pR^2\sin\theta - RX\sin\theta,\end{aligned}$$

et, par intégration,

$$M(\theta) = pR^2\cos\theta + RX\cos\theta + C,$$

où C est une constante. Par définition, on a

$$M(0) = -\Gamma.$$

Ainsi,

$$M(\theta) = pR^2\cos\theta + RX\cos\theta - \Gamma - pR^2 - RX.$$

Bref, on a

$$\boxed{\begin{aligned}&T(\theta) = -pR\sin\theta - X\sin\theta,\\ &M(\theta) = pR^2(\cos\theta - 1) + RX(\cos\theta - 1) - \Gamma.\end{aligned}} \tag{9}$$

c) La coupure introduite doit être telle que la structure introduite est équivalente à la structure initiale. Ainsi, Γ doit être tel que la coupure se referme. Dans la structure introduite (isostatique), la rotation du point A_+ est égale à

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = \omega.$$

On a donc

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = 0. \tag{10}$$

d) On utilise maintenant les valeurs des réactions d'appuis

$$X = -N_0, \quad Y = -T_0 = 0, \quad \Gamma = -M_0. \tag{11}$$

D'après le cours, on peut utiliser (10) en utilisant d'abord (11) et en dérivant ensuite par rapport à Γ ou en dérivant avant. Il est plus rapide d'utiliser d'abord (10). Par dérivation sous le signe somme, puisque N et T sont indépendants de Γ

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \Gamma} &= \frac{R}{EI}\int_0^{2\pi} M\frac{\partial M}{\partial \Gamma}d\theta,\\ &= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta - 1) + RX(\cos\theta - 1) - \Gamma\Big)d\theta,\\ &= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta - 1) - RN_0(\cos\theta - 1) - \Gamma\Big)d\theta,\end{aligned}$$

et selon (7),

$$\begin{aligned}&= -\frac{R}{EI}\int_0^{2\pi}\Big(pR^2(\cos\theta - 1) - pR^2(\cos\theta - 1) - \Gamma\Big)d\theta,\\ &= \frac{2\pi R\Gamma}{EI}.\end{aligned}$$

Ainsi, selon (10), $\Gamma = 0$ et donc

$$\boxed{M_0 = 0.} \tag{12}$$

4°)

a) Le seul effort de la RDM non nul est $N = N_0 = pR$. Ainsi la partie de la poutre circulaire comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, subit à un allongement relatif égal

$$d\lambda = \frac{N_0}{ES} dl,$$

où $dl = Rd\theta$ (au premier ordre près en $d\theta$). Ainsi

$$\boxed{d\lambda = \frac{pR^2}{ES} d\theta.} \tag{13}$$

Remarque 4. On remarque ici que l'on ne peut négliger les effets de l'effort normal devant ceux du moment fléchissant, nuls ici !

b) Par intégration, on a

$$\Delta\Lambda = \int_0^{2\pi} d\lambda,$$

et donc

$$\boxed{\Delta\Lambda = \frac{2\pi pR^2}{ES}.} \tag{14}$$

Puisque $\Delta\Lambda = 2\pi\Delta R$, on a donc

$$\boxed{\Delta R = \frac{pR^2}{ES}.} \tag{15}$$