COURS MT11 UTBM-année 2000/2001
Automne 2000

TD6 – Suites de nombres réels ou complexes

Exercice 1

Soit l'ensemble

$$E = \left\{ 2(-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de cet ensemble et, le cas échéant, son plus grand et son plus petit élément.

Exercice 2

Déterminer

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3

Calculer la limite des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2}$

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

c) $u_n = \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

d) $u_n = \dfrac{\mathrm{E}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{\mathrm{E}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$

e) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

f) $u_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k}$

Exercice 4

Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 5

Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et bornée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on montrera que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes).

Exercice 8

On définit pour $a, r, q \in \mathbb{R}$, la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n + r$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (on introduira l'éventuel réel λ tel que $\lambda = q\lambda + r$) et étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9

1) Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} &u_0 = 2, \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}. \end{aligned}$$

2) Étudier la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} &v_0 \in \{1, 3\}, \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1 + \frac{{v_n}^2}{4}. \end{aligned}$$

3) Étudier la suite complexe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} &0 < |w_0| < 1, \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{w_n}{2 - w_n}. \end{aligned}$$

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On dit qu'elle converge au sens de Cesaro vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = l.$$

1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l, alors elle converge au sens de Cesaro vers l.
2) Réciproquement, trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge au sens de Cesaro mais qui ne converge pas.