MT31 Automne 2004

Corrigé de l'examen final du 18 janvier 2005

Correction de l'exercice 1. 1. Nous passons en coordonnées elliptiques (cf TD) pour obtenir :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{16}{3\pi} \\ y_G &= \frac{20}{3\pi} \end{aligned}$$

2. Il est nécessaire de passer en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

où

$$r \geq 0,\ \theta \in [0,\, 2\pi[,\ z \in \mathbb{R}$$

Le domaine $\mathcal{U}$ est donné par :

$$\mathcal{U} = \left\{(r,\, \theta,\, z), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq \sin\theta,\ -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\right\}$$

Nous avons,

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D dx\, dy\, dz$$

soit en passant en coordonnées cylindriques :

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}) = \iiint_{\mathcal{U}} r\, dr\, d\theta\, dz$$

soit encore,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{U}) &= \iiint_{\mathcal{U}} r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin\theta} r \left\{ \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dz \right\} dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin\theta} 2r\sqrt{1-r^2}dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sin\theta} d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^\pi \left((1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^\pi \left((\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\theta
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{2}{9}\left(3\pi - 4\right)}$$

Correction de l'exercice 2.

Cet exercice est inspiré du premier exercice du final de MQ41, donné au Printemps 2004 (voir énoncé et corrigé sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`).

Soit le système différentiel pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + x_2(t) + R\lambda \sin t = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} - x_1(t) - R\lambda \cos t = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} + Rx_1(t) = 0. \tag{1c}$$

avec les conditions initiales :

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f, \tag{2a}$$

$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{2b}$$

$$x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{2c}$$

Ces système différentiel décrit l'équilibre d'une poutre circulaire, soumis à son poids propre (voir [Bas04]).

1. (a) En dérivant (1a), il vient

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = -\frac{d^2x_1}{dt^2}(t) - R\lambda \cos t,$$

et, en réinjectant dans (1b), on obtient

$$\boxed{\forall t \in]0, \pi/2[, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}(t) + x_1(t) = -2R\lambda \cos t.} \tag{3a}$$

On connaît les conditions initiales en $\pi/2$, donc on connaît

$$\boxed{x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f.} \tag{3b}$$

Enfin, selon (1a), on a

$$\boxed{\frac{dT}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-R\lambda.} \tag{3c}$$

(b) On cherche une solution particulière de (3a) sous la forme $z(t)=Kt\sin t$ où K est une constante. On a

$$\frac{dz}{dt}(t)=K\left(\sin t+t\cos t\right).$$

et

$$\frac{d^2z}{dt^2}(t)=K\left(2\cos t-t\sin t\right)\ ;$$

on a donc

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2}+z(t)+2R\lambda\cos t=K\left(2\cos t-t\sin t+t\sin t\right)+2R\lambda\cos t=2\left(K+R\lambda\right)\cos t.$$

On choisit donc $K=-R\lambda$ et

$$\boxed{z(t)=-R\lambda t\sin t \text{ est solution particulière de (3a).}} \tag{4}$$

(c) La solution générale de l'équation homogène associée à (3a) est

$$x_1(t)=a\cos t+b\sin t,$$

on en déduit que la solution générale de (3a) est

$$x_1(t)=a\cos t+b\sin t-R\lambda t\sin t, \tag{5}$$

où a et b sont des réels. Grâce aux conditions initiales (3b) et (3c), on a déduit que

$$\boxed{x_1(t)=\ -\left(f+R\lambda\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin t.} \tag{6}$$

2. (a) En vertu de (1a), on a

$$\boxed{x_2(t)=\left(f+R\lambda\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos t.} \tag{7}$$

(b) En utilisant (1c) et (2c), on en déduit donc

$$\boxed{x_3(t)=R\left(\left(\frac{R\lambda\pi}{2}-f\right)\cos t+R\lambda(-1+\sin t-t\cos t)\right).} \tag{8}$$

3. On étudie le système différentiel :

$$\forall t\in[0,\pi/2],\quad \dot{X}(t)+AX(t)=g(t), \tag{9a}$$

avec

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},\tag{9b}$$

$$g(t)=\begin{pmatrix}-R\lambda\sin t\\R\lambda\cos t\\0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\R&0&0\end{pmatrix},\tag{9c}$$

et avec les conditions initiales

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right)=X_{\pi/2}=\begin{pmatrix}-f\\0\\0\end{pmatrix}\tag{9d}$$

On résoud ce système en utilisant la méthode de la diagonalisation, comme dans le cours : voir la section 8.3 du chapitre 8.

(a) Le polynôme caractéristique de A est égal à

$$\chi_A(X)=\begin{bmatrix}-X&1&0\\-1&-X&0\\R&0&-X\end{bmatrix},$$

soit

$$\boxed{\chi_A(X)=-X\left(X^2+1\right).}\tag{10}$$

Ses racines sont (dans $\mathbb{C}$), 0, i et $-i$, donc toutes distinctes. Ainsi, A est diagonalisable. Après calculs, on obtient la matrice de changement de base

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}0&i&i\\0&-1&1\\1&R&-R\end{pmatrix},}\tag{11}$$

la matrice diagonale

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix},}\tag{12}$$

et on calcule

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2R&2\\-i&-1&0\\i&1&0\end{pmatrix}.}\tag{13}$$

(b) On résoud les trois équations différentielles :

$$\dot{y}_1 = R^2\lambda\cos t, \tag{14a}$$

$$\dot{y}_2 + iy_2 = -\frac{R\lambda e^{-it}}{2}, \tag{14b}$$

$$\dot{y}_3 - iy_3 = \frac{R\lambda e^{it}}{2}. \tag{14c}$$

On considère d'abord l'équation homogène associée (c'est-à-dire sans second membre), puis on cherche une solution particulière[1]. Pour (14a), l'équation homogène associée est

$$\dot{y}_1 = 0,$$

dont la solution est

$$y_1(t) = y_1^0, \tag{15}$$

où y_1^0 est un complexe. On cherche une solution particulière de (14a) sous la forme

$$y_1(t) = \mu\sin t,$$

où μ est un complexe ; on trouve

$$y_1(t) = R^2\lambda\sin t. \tag{16}$$

En sommant (15) et (16) :

$$y_1(t) = y_1^0 + R^2\lambda\sin t. \tag{17}$$

De même, pour (14b), l'équation homogène associée est

$$\dot{y}_2 + iy_2 = 0,$$

dont la solution est

$$\boxed{y_2(t) = y_2^0 e^{-it},} \tag{18}$$

où y_2^0 est un complexe. On cherche une solution particulière de (14b) sous la forme

$$y_2(t) = \nu t e^{-it},$$

où μ est un complexe ; on trouve

$$y_2(t) = -\frac{R\lambda}{2} t e^{-it}. \tag{19}$$

En sommant (18) et (19) :

$$\boxed{y_2(t) = y_2^0 e^{-it} - \frac{R\lambda}{2} t e^{-it}.} \tag{20}$$

De même, pour (14c), on obtient

$$\boxed{y_3(t) = y_3^0 e^{it} + \frac{R\lambda}{2} t e^{it}.} \tag{21}$$

[1]ou on utilise la méthode de la variation de la constante, ce qui est plus long.

(c) Le système (9a) est équivalent à

$$\dot{X}(t) + PDP^{-1}X(t) = g(t),$$

soit encore

$$P^{-1}\dot{X}(t) + DP^{-1}X(t) = P^{-1}g(t),$$

ou encore

$$\boxed{\dot{Y}(t) + DY(t) = P^{-1}g(t),} \tag{22}$$

où l'on a posé :

$$\boxed{Y(t) = P^{-1}X(t).} \tag{23}$$

Grâce à (13), on a

$$\boxed{P^{-1}g(t) = \frac{R\lambda}{2}\begin{pmatrix} 2R\cos t \\ -\cos t + i\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} = \frac{R\lambda}{2}\begin{pmatrix} 2R\cos t \\ -e^{-it} \\ e^{it} \end{pmatrix}.} \tag{24}$$

(d) Les conditions initiales (9d) s'écrivent

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = P^{-1}\begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit encore, grâce à (13)

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{if}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(e) On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Le système (22) est donc équivalent à (14), dont la solution est donnée par (17), (20) et (21). Grâce aux conditions (25), on détermine chacun des trois complexes y_1^0, y_2^0 et y_3^0. Après calculs, on a

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= R^2\lambda\left(\sin t - 1\right), \\
y_2(t) &= \left(\frac{R\lambda\pi}{4} - \frac{f}{2}\right)e^{-it} - \frac{R\lambda}{2}te^{-it}, \\
y_3(t) &= -\left(\frac{R\lambda\pi}{4} - \frac{f}{2}\right)e^{it} + \frac{R\lambda}{2}te^{-it}.
\end{aligned}$$

Le vecteur Y est alors connu et on revient à X en utilisant de nouveau (23) sous la forme

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & R & -R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\big(y_2(t) + y_3(t)\big) \\ y_3(t) - y_2(t) \\ y_1(t) + R\big(y_2(t) - y_3(t)\big) \end{pmatrix}.$$

On remplace $e^{it}-e^{-it}$ par $2i\sin t$ et $e^{it}+e^{-it}$ par $2\cos t$ et on obtient

$$y_2(t)+y_3(t)=\left(f-\frac{R\lambda\pi}{2}\right)i\sin t+R\lambda it\sin t,$$

et

$$y_2(t)-y_3(t)=-\left(f-\frac{R\lambda\pi}{2}\right)\cos t-R\lambda t\cos t.$$

Bref[2], on a,

$$\boxed{x_1(t)=-R\lambda t\sin t+\left(\frac{R\lambda\pi}{2}-f\right)\sin t,}$$

$$\boxed{x_2(t)=\left(f-\frac{R\lambda\pi}{2}\right)\cos t+R\lambda t\cos t,\,,}$$

$$\boxed{x_3(t)=R^2\lambda(\sin t-1)+R\left(\left(\frac{R\lambda\pi}{2}-f\right)\cos t-R\lambda t\cos t\right)},$$

dont on vérifie que c'est bien équivalent à (6), (7) et (8).

(f) Cette méthode est donc, ici, bien plus lourde que celle des questions 1 et 2.

Remarque 1. On peut résoudre (9) sous matlab formel en tapant :

```
S=dsolve('Dx1+x2+R*lambda*sin(t)=0',...
         'Dx2-x1-R*lambda*cos(t)=0',...
         'Dx3+R*x1=0',...
         'x1(pi/2)=-f','x2(pi/2)=0','x3(pi/2)=0','t');
disp('x1');
pretty(simplify(S.x1));
disp('x2');
pretty(simplify(S.x2));
disp('x3');
pretty(simplify(S.x3));
```

On trouve

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=\frac{-R^2\lambda\,\sin(t)t+\sin(t)\left(1/2\,R^2\lambda\,\pi-fR\right)}{R},\\
x_2(t)&=-\frac{-R^2\lambda\,\cos(t)t+\cos(t)\left(1/2\,R^2\lambda\,\pi-fR\right)}{R},\\
x_3(t)&=R^2\lambda\,\sin(t)-R^2\lambda\,\cos(t)t-R^2\lambda+\cos(t)\left(1/2\,R^2\lambda\,\pi-fR\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien identique à (6), (7) et (8).

Références

[Bas04] Jérôme Bastien. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. Notes de cours de MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`, rubrique MQ41, 2004.

[2]On se retrouve tout naturellement dans $\mathbb{R}$.