MT40 Automne 2003

Examen final du 23 janvier 2004

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Intégration gaussienne)**.**
On cherche dans cet exercice à évaluer numériquement par une méthode gaussienne l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 r(x)w(x)dx, \tag{1}$$

où le poids w est défini sur $[0,1[$ par

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}. \tag{2}$$

1. Montrer que la fonction w est intégrable sur $(0,1)$.
2. **Lemmes techniques** (que l'on pourra admettre)

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx. \tag{3}$$

   (a) Montrer, en faisant en changement de variable, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^n du. \tag{4}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}. \tag{5}$$

   (c) Calculer I_0 et en déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

   (d) On rappelle que le produit scalaire considéré est défini par

$$\forall u, v \in C^0([0,1]), \quad < u, v >= \int_0^1 \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x}}dx. \tag{6}$$

Montrer que si P et Q sont deux polynômes, si on note le produit

$$PQ = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k,$$

alors

$$< P, Q > = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k I_k. \tag{7}$$

3. En utilisant la relation de récurrence à trois termes vue en cours pour les polynômes orthogonaux, déterminer P_0, P_1 et P_2, les trois premiers polynômes orthogonaux pour les poids w sur $(0, 1)$.

   Dans cette récurrence, on choisira tous les coefficients α_n égaux à 1, mais on divisera chacun des polynômes obtenus par sa valeur en 0, de façon à avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1. \tag{8}$$

   On pourra utiliser, pour simplifier les calculs, les résultats de la question 2d.

4. Pour toute la suite, on considère les polynômes de Legendre, vus en cours et notés $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux, relatifs au poids $w = 1/\sqrt{1-x}$.

   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \beta_n \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \beta_n L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right). \tag{9}$$

   (b) En déduire, en utilisant la normalisation (8), que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right). \tag{10}$$

5. On se donne maintenant la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 r(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i). \tag{11}$$

   (a) **Question facultative**
   Comment pourriez-vous, en utilisant (10), calculer les points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et les poids $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ de la formule (11) ?

   (b) **Applications numériques**
   On vous donne les $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et les $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ pour quelques valeurs de n (voir tableau 1 page ci-contre).
   Déterminer une approximation des intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 x^2 w(x)dx,$$

$$J = \int_0^1 x^7 w(x)dx,$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x+1}w(x)dx,$$

   en utilisant (11) pour $n \in \{0, ..., 3\}$.
   Quelles sont les valeurs exactes de I et de J ?

x_i		W_i
	$n=0$	
0.66666 66666 6667		2.00000 00000 0000
	$n=1$	
0.88441 28900 0295		1.30429 03097 2509
0.25844 42528 5419		0.69570 96902 7491
	$n=2$	
0.94306 08840 3299		0.93582 78691 4538
0.56280 21472 4891		0.72152 31460 9628
0.13050 06050 8174		0.34264 89847 5834
	$n=3$	
0.96635 17319 3249		0.72536 75667 5672
0.72381 56861 2754		0.62741 32917 5577
0.36532 25237 6536		0.44476 20689 0675
0.77843 39150 794 10^{-1}		0.20245 70725 8075

TAB. 1 – Quelques valeurs de $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et les $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ pour $n \in \{0, ..., 3\}$.

On donne la valeur exacte de K :

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}w(x)dx = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Commentez !

Exercice 2 (Équation non linéaire)**.**
On considère l'équation (E) donnée par :

$$(E) : f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

On se propose d'étudier les solutions réelles de (E) numériquement grâce à la méthode de Newton.

1. *Étude de la fonction f*
   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire l'existence de trois solutions réelles pour (E), notées dans l'ordre croissant α_1, α_2, α_3.
   (c) Fournir une représentation graphique de f dans un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
   (d) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. *Étude de la convergence de la suite des itérés de Newton*
   (a) Soit x_0 un réel ; définir la suite (x_n) des itérés de Newton de x_0 associée à (E).
   (b) *Étude de* (x_n) pour x_0 *élément de* $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
      (i) On choisit x_0 dans $]-\infty, \alpha_1]$.
      – Montrer que la suite (x_n) est monotone et convergente ; en déduire que sa limite est α_1.
      – Peut-on conclure quant à la convergence de (x_n) si x_0 est choisi dans $[\alpha_1, -1[$?
      (ii) On choisit x_0 dans $]1, +\infty[$.
      Conclure quant à la convergence de (x_n) en utilisant et adaptant l'étude conduite sur $]-\infty, -1[$.
   (c) **Question facultative**
   Étude de la convergence de la suite des itérés de Newton pour x_0 *élément de* $]-1, 1[$
      (i) On considère l'intervalle $[0, b]$ avec b élément de $]\alpha_2, 1[$
      En utilisant le théorème de condition suffisante de convergence de la suite (x_n) proposé en cours, montrer que la convergence vers α_2 est assurée pour tout choix de x_0 dans $[0, b]$ si b vérifie :

      $$b > \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad |F(b)| < b \quad \text{avec } F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

      (ii) Etudier les variations de F sur $[0, 1]$.
      (iii) En déduire une méthode de détermination d'un b_0 maximal dans $]\alpha_2, 1[$ garant de la convergence de la suite (x_n) vers α_2, au sens du critère considéré.
      (iv) Comment terminer l'étude ?

Corrigé

Le corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`