MT40 Automne 2005

Examen final du 18 janvier 2006

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes. On pourra admettre tout résultat.

Exercice 1 (Intégration gaussienne)**.**
L'objet de l'exercice est de comparer les performances des méthodes d'intégration de Simpson et de Gauss pour une certaine classe de fonctions régulières sur $I = [-1, 1]$. Soit λ un réel strictement positif quelconque.

(1) On considère la fonction f_λ définie par :

$$\forall x \in I, \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x}.$$

   (a) Montrer que f_λ est indéfiniment dérivable sur I.

   (b) On note pour tout r de $\mathbb{N}$, $f_\lambda^{(r)}$ la dérivée $r^{\text{ième}}$ de f_λ sur I. Donner pour tout r de $\mathbb{N}$ et tout x de I, l'expression de $f_\lambda^{(r)}(x)$.

   (c) Etudier les variations de $f_\lambda^{(r)}$ sur I et en déduire que :

$$\forall x \in I, \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad \left| f_\lambda^{(r)}(x) \right| = f_\lambda^{(r)}(x) \leq e^{\lambda} \lambda^r.$$

   On notera désormais $M(\lambda, r)$ le majorant proposé de $f_\lambda^{(r)}$ sur I : Ainsi : $M(\lambda, r) = e^{\lambda} \lambda^r$.

(2) Calculer $J_\lambda = \int_{-1}^{1} f_\lambda(x) dx$.

Nb : L'étude qui suit a pour seul objectif une comparaison de performances, lors du calcul d'une valeur approchée de J_λ par différentes méthodes d'intégration numériques.

(3) *Mise en oeuvre d'une intégration de Simpson*

   (a) Montrer qu'on peut utiliser la méthode de Simpson pour calculer J_λ.

   (b) Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer en fonction de ε et λ, le pas maximal $h(\varepsilon, \lambda)$ d'intégration en méthode de Simpson permettant d'affirmer que l'erreur de méthode est inférieure à ε.

(c) En déduire le nombre minimal de points $N(\varepsilon, \lambda)$ où l'on doit connaître la fonction f_λ pour permettre le calcul d'une valeur approchée de J_λ convenable.

(d) Déduire de la valeur exacte de J_λ, un intervalle centré en J_λ auquel doit appartenir la valeur approchée qui sera calculée.

(e) *Application numérique :*
On donne $\lambda = 2$, $\varepsilon = 3 \times 10^{-6}$. Déterminer $N(\varepsilon, \lambda)$.

(4) *Mise en oeuvre d'une intégration gaussienne*

(a) Montrer qu'on peut utiliser une intégration de Gauss-Legendre pour fournir une valeur approchée de J_λ.

(b) Fournir le plan d'une procédure qui permettra, à partir des outils du cours, de fournir une valeur approchée de J_λ par la méthode de Gauss-Legendre à $K + 1$ points. Rappeler l'expression de l'erreur de méthode commise.

(c) *Application numérique*
On choisit $\lambda = 2$ et $K = 4$. Fournir un majorant de l'erreur de méthode commise lors de l'évaluation de J_2 par méthode de Gauss-Legendre à 5 points.

(5) Proposer le plan d'une procédure qui permettrait, à partir du nombre de points utilisés dans une méthode d'intégration de Simpson garantissant une précision ε, de calculer le nombre de points à utiliser en méthode de Legendre pour garantir une précision au moins égale.

Exercice 2 (Équations non linéaires)**.**
Soit a un réel strictement positif. On cherche à approcher de façon numérique $\sqrt{a}$, c'est-à-dire résoudre

$$x^2 - a = 0. \tag{1}$$

(1) On peut écrire l'équation (1) sous la forme d'équation de point fixe :

$$\frac{a}{x} = x. \tag{2}$$

Pourquoi la méthode du point fixe associée à l'équation (2) est inutilisable ?

(2) (a) Rappeler sommairement et sans preuve, les résultats de convergence de la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right). \end{cases} \tag{3}$$

(b) Faire des simulations numériques avec

$$a = 2, \quad x_0 = 1, \tag{4a}$$

$$a = 2 \times 10^4, \quad x_0 \in \{10^{-2}, 10^2\}, \tag{4b}$$

$$a = 2 \times 10^8, \quad x_0 \in \{10^{-4}, 10^4\}. \tag{4c}$$

Dans chacun des cas, on pourra calculer l'erreur suivante : $\left|x_n^2 - a\right|$. Commentez !

(3) On cherche maintenant une autre méthode que la méthode de la question 2. On remarque que la méthode (3) correspond à la méthode de Newton appliquée à la recherche des racines de $f(x) = x^2 - a$.

(a) Quels sont les racines, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - a \text{ ?} \tag{5}$$

(b) Montrer que la méthode de Newton appliquée à la recherche des racines de h s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases} \tag{6}$$

où

$$\forall x, \quad g(x) = \frac{1}{2}x\left(3 - ax^2\right). \tag{7}$$

(c) Montrer que, si la méthode définie par (6)-(7) est convergente vers un nombre strictement positif, alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{a}}. \tag{8}$$

(d) Montrer que si la méthode définie par (6)-(7) est convergente vers un nombre strictement positif, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a x_n = \sqrt{a}. \tag{9}$$

Que fournit l'égalité (9) ?

(e) En terme de calculs, quel est l'avantage de la méthode (6)-(7)-(9) sur la méthode (3) ?

(f) En admettant la convergence établie, quel est l'ordre de la méthode (6)-(7) ?

(g) **Question facultative**

Étudions maintenant si la méthode (6)-(7) est effectivement convergente.

(i) Que se passe-t-il si $x_0 \in \{0, \sqrt{1/a}, \sqrt{3/a}\}$?

(ii) Étudier la fonction g sur l'intervalle $]0, \sqrt{3/a}[$ et montrer que

$$g\left(\left]0, \sqrt{1/a}\right]\right) \subset \left]0, \sqrt{1/a}\right], \tag{10a}$$

$$g\left(\left]0, \sqrt{3/a}\right[\right) \subset \left]0, \sqrt{1/a}\right]. \tag{10b}$$

(iii) Montrer que

$$\forall x_0 \in \left]0, \sqrt{3/a}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in \left]0, \sqrt{1/a}\right]. \tag{11}$$

(iv) Déduire des résultats des questions précédentes que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers $1/\sqrt{a}$ pour tout $x_0 \in]0, \sqrt{3/a}[$

(h) Reprendre les simulations de la question 2b. Dans chacun des cas, on pourra calculera $x_n a$ et l'erreur suivante : $\left|(x_n a)^2 - a\right|$. Commentez !

(4) **Question facultative**

Que se passe-t-il si x_0 est choisi dans $\mathbb{R}$?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/`