MT40 Automne 2001

Examen médian du 21 novembre 2001

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (x points)**.** *Interpolation polynômiale*

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{R}$. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'interpolation polynômiale de la fonction f sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$ dans le cas où les x_i sont équidistants : il existe un réel strictement positif h tel que

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad x_i = x_0 + ih. \tag{1}$$

On pose

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad f_i = f(x_i).$$

On définit *l'opérateur aux différences finies* ∇ par

$$\nabla^0 f_i = f_i,$$
$$\nabla^1 f_i = \nabla f_i = f_{i+1} - f_i,$$

et, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla\left(\nabla^k f_i\right) = \nabla^k f_{i+1} - \nabla^k f_i.$$

1°) Montrer que

$$\nabla^k f_i = f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}]\, k! h^k. \tag{2}$$

On pourra démontrer ce résultat par récurrence sur k en utilisant la formule de récurrence entre les différences divisées successives.

2°) Déduire de (2) que, si l'on pose

$$s = \frac{x - x_0}{h}, \tag{3}$$

alors

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})\, f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}\nabla^k f_0. \tag{4}$$

3°) À partir de l'expression du polynôme p_n sous sa forme de Newton et de (4), montrer que

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}.\nabla f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}.\nabla^2 f_0 + ... + \frac{s(s-1)(s-2)...(s-n+1)}{n!}.\nabla^n f_0, \tag{5}$$

où s est défini par (3).

Pour la suite de l'exercice, on considère *le coefficient du binôme généralisé* défini par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad C_s^k = \frac{s(s-1)...(s-k+1)}{k!}. \tag{6}$$

4°) Pourquoi le coefficient C_s^k est il noté ainsi ?

5°) Montrer que sous la notation (6), (5) se réécrit

$$p_n(x) = C_s^0 f_0 + C_s^1 \nabla f_0 + C_s^2 \nabla^2 f_0 + ... + C_s^n \nabla^n f_0. \tag{7}$$

6°) Montrer que l'on obtient le tableau des valeurs successives $\nabla^k f_i$ en formant le tableau triangulaire définit par la figure 1 où

$$\begin{array}{ll} a \searrow & \\ & c \quad \text{signifie } c = b - a. \\ b \nearrow & \end{array}$$

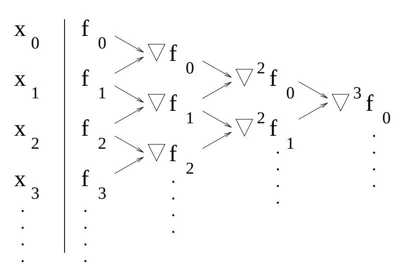

FIG. 1 – Le tableau des valeurs successives $\nabla^k f_i$

7°) Application numérique : on donne $n = 3$, $h = 1$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ et $f(3) = 15$. Remplir le tableau des différences divisées comme sur la figure 1 et en déduire le polynôme p_3 sous la forme (7). En déduire $p_3(2.5)$.

8°) Si on rajoute le point $x_4 = 4$ avec $f(4) = 38$, quelle est l'expression de p_4 ? En déduire $p_4(2.5)$.

Exercice 2 (y points)**.** *Intégration numérique*
On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

est convergente et d'en calculer une valeur approchée par la méthode de Simpson à la précision $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (fixé une fois pour toute).

1°) Peut-on calculer directement I par la méthode de Simpson ? Pourquoi ?

2°) Soit A appartenant à $[1, +\infty[$. On veut évaluer

$$I_A = \int_0^{A} e^{-x^2} dx$$

à $\varepsilon/2$ près.

a) Soit une fonction g donnée par

$$g(x) = e^{-x^2} p(x)$$

où p est un polynôme quelconque.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété suivante : il existe un polynôme p_n tel que la dérivée n-ième de g vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = e^{-x^2} p_n(x)$$

où les polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\begin{aligned} & p_0 = p, \\ & \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2x p_n(x). \end{aligned}$$

b) En déduire la dérivée quatrième $f^{(4)}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

c) Déterminer un majorant M de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0, A]$.

d) En déduire, en fonction de A, M et de ε, le pas maximal $h_{\max}$ autorisé en méthode de Simpson pour que l'erreur méthodique commise soit de valeur absolue inférieure à $\varepsilon/2$.

3°) Convergence de I et choix de A.
Soit X un réel vérifiant $X \geq A$ et A un élément de $[1, +\infty[$.

a) On pose

$$R(X) = \int_A^X e^{-x^2} dx.$$

Montrer que $R(X)$ est défini et que

$$R(X) \leq \int_A^X e^{-x} dx.$$

b) Calculer

$$b(X) = \int_A^X e^{-x} dx$$

et

$$l = \lim_{X\to+\infty} b(X) \text{ en fonction de } A.$$

c) Montrer que

$$\forall X \geq A, \quad \int_A^X e^{-x^2}\,dx \leq e^{-A}.$$

d) En déduire que I est convergente et que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq e^{-A}.$$

e) Déterminer en fonction de ε une valeur de A telle que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

4°) Bilan

On donne $\varepsilon = 10^{-4}$.

a) Déterminer A issu de la question 3 e).

b) Déterminer h_{max} issu des questions 2 c) et d).

c) Conclure sur le nombre de calculs à faire pour évaluer I à 10^{-4} près.

5°) Pourriez vous évoquer une autre méthode pour évaluer directement l'intégrale I ? Proposer, en utilisant les tables numériques fournies en cours, une estimation de I et comparer avec la valeur exacte de I que l'on admet être égale à $\sqrt{\pi}/2$. Conclure.