MT40 Automne 2003

Examen médian du 12 novembre 2003

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Interpolation)**.**
Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=e^x$.

1. *Interpolation sur le support* $S_1=\left\{-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right\}$

   (a) Déterminer la fonction polynôme $p_{3,1}$ qui interpole f sur $\left\{-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right\}$.

   (b) Rappeler l'expression de l'erreur d'interpolation $e_1(x)=f(x)-p_{3,1}(x)$, pour tout x de $[-1,1]$, fournie en cours.

   (c) Montrer que :
$$\forall x\in[-1,1]\quad |e_1(x)|\leq M_1(x)=\frac{e}{24}\left(x^2-1\right)\left(x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right).$$

2. *Interpolation sur le support* $S_2=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\cos\left(3\frac{\pi}{8}\right),\cos\left(5\frac{\pi}{8}\right),\cos\left(7\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

   (a) Représenter graphiquement les supports S_1 et S_2. Qu'est-ce qui les différentie dans leur manière de partitionner $[-1,1]$?

   (b) Sans déterminer la fonction polynôme $p_{3,2}$ qui interpole f sur S_2, rappeler l'expression de l'erreur d'interpolation $e_2(x)=f(x)-p_{3,2}(x)$, pour tout x de $[-1,1]$, fournie en cours.

   (c) Montrer que :
$$\forall x\in[-1,1]\quad |e_2(x)|\leq M_2(x)=\frac{e}{24}\left(x^2-\alpha^2\right)\left(x^2-\beta^2\right),$$
   où α et β sont définis par : $\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\beta=\cos\left(3\frac{\pi}{8}\right)$.

3. *Comparaison des majorants* M_1 *et* M_2

   (a) Etudier les variations de M_1 *et* M_2 sur $[-1,1]$.

(b) Interprétez les résultats obtenus ; le cours laissait-il attendre ces résultats ?

Exercice 2 (Intégration)**.**
Dans tout cet exercice, on étudie la méthode élémentaire de quadrature suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) + E_n(a,b,f), \tag{1}$$

où $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ sont $n+1$ réels, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont $n+1$ réels deux à deux distincts de $[a,b]$ et $E_n(a,b,f)$ est l'erreur commise.
Rappelons qu'une méthode élémentaire de quadrature du type (1) est dite d'ordre m si elle est exacte (c'est-à-dire si $E_n(a,b,f)=0$) si f est un polynôme de degré au plus m.
Pour tout cet exercice, on pose

$$h = b - a.$$

On cherche à démontrer que si $m \geq n$, on a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

$$\text{La formule de quadrature (1) est d'ordre } m. \tag{2}$$

et

Il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^{m+1}[a,b]$,

$$|E_n(a,b,f)| \leq \alpha h^{m+2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(m+1)}(x)\right|, \tag{3}$$

sans utiliser l'expression de l'erreur liée à la théorie de l'interpolation, comme dans le cours.

1. Démontrer que (3) implique (2).
2. **Question facultative admise en première lecture et à reprendre éventuellement après la question 4**

   On suppose de plus qu'il existe $(\tau_i)_{0\leq i\leq n}$, $n+1$ réels deux à deux distincts, indépendants de a, b et h, appartenant à $[0,1]$ tels que

   $$\forall i \in \{0,...,n\}, \quad x_i = a + h\tau_i. \tag{4}$$

   Soit $f \in C^{m+1}[a,b]$.

   Montrer que sous, l'hypothèse (4), (2) implique (3).

   Indications :

   On appliquera la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[a,x]$ à l'ordre m sous la forme

   $$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = p_m(x) + g(x), \tag{5}$$

   où p_m est un polynôme de degré au plus m. On montrera ensuite que

   $$E_n(a,b,f) = \int_a^b g(x)dx + \sum_{i=0}^{n} W_i g(x_i), \tag{6}$$

   et on majorera en valeur absolue chacun des deux termes.

3. **Application**

Dans cette question, on étudie la méthode[1] suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_4(a,b,f)$$
$$= \frac{h}{90}\left(7f(a) + 32f\left(a+\frac{h}{4}\right) + 12f\left(a+\frac{h}{2}\right) + 32f\left(a+\frac{3h}{4}\right) + 7f(b)\right). \quad (7)$$

(a) Montrer que la méthode (7) est une méthode élémentaire de quadrature du type (1) en fournissant les x_i et les W_i.

(b) Montrer que la méthode (7) est d'ordre 5. On pourra supposer, pour simplifier [2] que $a=-1$ et que $b=1$. On exploitera au maximum les propriétés de symétrie du problème.

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a,b]$,

$$|E_4(a,b,f)| \leq \alpha h^7 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(6)}(x)\right|. \quad (8)$$

(d) On pose, pour tout couple de réels $A<B$ et pour tout entier non nul N,

$$x_0 = A; \quad x_N = B; \quad \forall i \in \{0,...,N\}, \quad x_i = A + ih, \text{ où } h = \frac{B-A}{N}. \quad (9)$$

Montrer que la méthode composée sur l'intervalle $[A,B]$ associée à la méthode élémentaire (7) s'écrit :

$$\int_A^B f(x)dx \approx \frac{h}{90}\Bigg(k_1\big(f(A)+f(B)\big) + k_2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$$
$$+ k_3\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{4}\right) + k_4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{3h}{4}\right) + k_5\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\Bigg), \quad (10)$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 et k_5, sont des réels à déterminer.

(e) Montrer que l'erreur commise vérifie : il existe $\gamma \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a,b]$

$$|E_N(A,B,f)| \leq \gamma h^6 (B-A) \sup_{x\in[A,B]} \left|f^{(6)}(x)\right|. \quad (11)$$

4. **Application**

Reprendre les questions de la partie 3 pour la méthode de quadrature de Gauss-Legendre à deux points. On supposera que $a=-1$ et $b=1$. On rappelle que la méthode de quadrature de Gauss-Legendre à deux points s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx I = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \quad (12)$$

On montrera notamment que cette méthode est d'ordre 3.

[1] appelée la méthode élémentaire de Boole-Villarceau.

[2] En fait, on peut montrer que les calculs fait sont équivalents.